NOTE

15

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=\frac{1}{4}x^4+6x^2-8x+8$

(나) $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2+2x$

함수

$$y=f(x)g(x)+2xf(x)+5$$

가 $x=a$에서 극댓값 b를 가질 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

35

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)dx$의 최솟값을 m이라 하자. $4m$의 값을 구하시오.

$f(1)=3$이고, $x \neq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\{f'(x)-3x^2-1\}=0$이다.

NOTE

OIS

모든 항이 정수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n + b_n = -n + 20, \quad a_n b_n = -6n^2 + 35n + 19, \quad b_n < 8$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오.

NOTE

NOTE

[15번 해설]

$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=\frac{1}{4}x^4+6x^2-8x+8\cdots$ ㉠, $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2+2x\ \cdots$ ㉡

이므로 $f(x)$와 $g(x)$를 각각 구할 수 있다. 하지만, $f(x)g(x)$의 형태로 식을 나타내면 각각의 함수를 쉽게 추측할 수 있으므로 ㉡을 제곱하여 ㉠과 연립한 뒤 $f(x)g(x)$를 구해 보자.

$\{f(x)-g(x)\}^2=\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)^2=\frac{1}{4}x^4+2x^3+4x^2$이므로

$f(x)g(x)=-x^3+x^2-4x+4=-(x-1)(x^2+4)$이다.

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$, $g(x)=-2x+2$이거나, $f(x)=2x-2$, $g(x)=-\frac{1}{2}x^2-2$이다.

(가), (나)조건에서 알 수 있듯이, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이거나 함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 $-\frac{1}{2}$이어야 한다.

각각의 경우 함수 $y=f(x)g(x)+2xf(x)+5$는 $y=x^2+9$이거나 $y=-x^3+5x^2-8x+9$이다.

이때, 함수 $y=x^2+9$는 극댓값을 가질 수 없으므로 $f(x)=2x-2$, $g(x)=-\frac{1}{2}x^2-2$이다.

함수 $h(x)$를 $h(x)=-x^3+5x^2-8x+9$라 하면 $h'(x)=-3x^2+10x-8$이고, $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $3x^2-10x+8=(3x-4)(x-2)=0$에서 $x=\frac{4}{3}$ 또는 $x=2$이다.

이때, $x=2$에서 극댓값 $h(2)$를 갖는다. $h(2)=5$이므로 $a+b=2+5=7$이다.

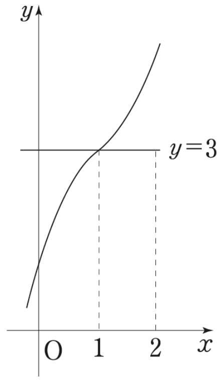
[답] 7

NOTE

[35번 해설]

$f'(x)\{f'(x)-3x^2-1\}=0$ 이므로 $f(x)=c$ (c는 상수)이거나 $f(x)=x^3+x+C$ (C는 적분상수)이다. $f(1)=3$이므로 $f(x)=3$이거나 $f(x)=x^3+x+1$이다.

이 2가지 함수의 그래프를 함께 그린 그래프가 아래와 같다.



$\int_0^2 f(x)dx$ 가 최소가 되려면 $\int_0^1 (x^3+x+1)dx+\int_1^2 3dx$ 인 경우이므로 최솟값은 $\int_0^1 (x^3+x+1)dx+\int_1^2 3dx=\frac{7}{4}+3=\frac{19}{4}$ 이다. 그러므로 답은 19 이다.

[답] 19

NOTE

[OIS 해설]

이차방정식 $x^2-(-n+20)x+(-6n^2+35n+19)=0$, $(x+3n-19)(x-2n-1)=0$의 두 근이

a_n, b_n이므로 어떤 자연수 i에 대하여

$a_i=-3i+19$이면 $b_i=2i+1$이고, $a_i=2i+1$이면 $b_i=-3i+19$이다.

수열 $\{2n+1\}$을 나열하면

$\{2n+1\}$: $3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \cdots$

이고 수열 $\{-3n+19\}$를 나열하면

$\{-3n+19\}$: $16,\ 13,\ 10,\ 7,\ 4,\ 1,\ \cdots$

이다. 한편 모든 자연수 n에 대하여 $b_n<8$이므로 수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$\{a_n\}$: $16,\ 13,\ 10,\ 9,\ 11,\ 13,\ \cdots$

이다. 곧 $a_1=16$, $a_2=13$, $a_3=10$이고, $n\geq 4$일 때, $a_n=2n+1$이다.

그러므로 $\sum_{k=1}^{10}a_k=16+13+10+\sum_{k=4}^{10}(2k+1)=144$

[답] 144