제 2 교시

수학 영역(가 형)

5지선다형

1. $\sqrt[3]{2}\times 2^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

$2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2$

2. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{4n+4n}{2n+5} = 4$

3. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5},\quad \mathrm{P}(B)=\frac{4}{5},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{9}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(B\,|\,A)$의 값은? [2점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$\frac{9}{10} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} - P(A\cap B)$

$P(A\cap B) = \frac{3}{10}$

$P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{3}{\cancel{10}\,2}}{\frac{2}{\cancel{5}}} = \frac{3}{4}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n(n+2)}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

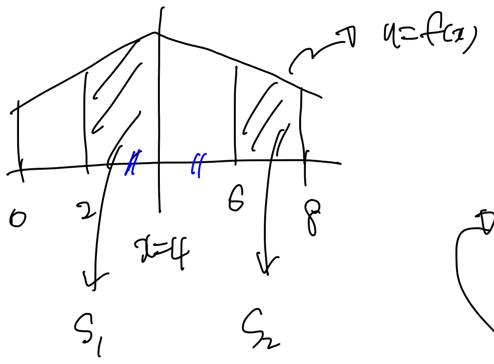
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) = 1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} \; \vdots = 1$

5. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 8$이고, X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

$$3\mathrm{P}(2 \le X \le 4) = 4\mathrm{P}(6 \le X \le 8)$$

일 때, $\mathrm{P}(2 \le X \le 6)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{5}{7}$



$P(2 \le X \le 6)$

$= 2P(2 \le X \le 4)$

$= 2S_1 = \frac{4}{7}$

$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \quad \cdots ①$

$3S_1 = 4S_2 \quad \cdots ②$

$S_2 = \frac{3}{4}S_1 \overset{①}{\Rightarrow} S_1 + \frac{3}{4}S_1 = \frac{1}{2}$

$\frac{7}{4}S_1 = \frac{1}{2} \quad \therefore S_1 = \frac{2}{7}$

6. $\int_1^2 (x-1)e^{-x}\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e} - \frac{2}{e^2}$ ② $\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$ ③ $\frac{1}{e}$

④ $\frac{2}{e} - \frac{2}{e^2}$ ⑤ $\frac{2}{e} - \frac{1}{e^2}$

$\int_1^2 (x-1)e^{-x}dx = -(x-1)e^{-x}\Big|_1^2 + \int_1^2 e^{-x}dx$

$= -e^{-2} - e^{-x}\Big|_1^2$

$= -e^{-2} - (e^{-2} - e^{-1})$

$= \frac{1}{e} - \frac{2}{e^2}$

7. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 함수

$$x = \ln t + t, \quad y = -t^3 + 3t$$

에 대하여 $\frac{dy}{dx}$가 $t=a$에서 최댓값을 가질 때, a의 값은? [3점]

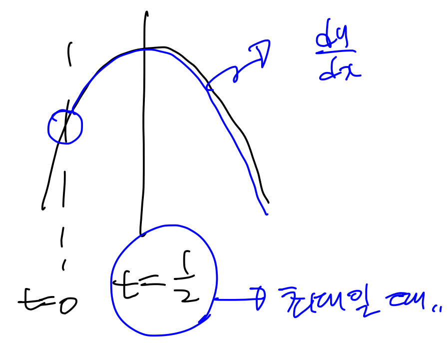
① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

$\frac{dy}{dt} = -3t^2 + 3$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} + 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3t^2+3}{\frac{1}{t}+1} = \frac{-3t^3+3t}{t+1} = \frac{-3t(t^2-1)}{t+1}$

$= -3t(t-1) \quad (t>0)$



$a = \frac{1}{2}$

8. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{a_n+2^n}=6$일 때,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{a_n+2^n}=6$

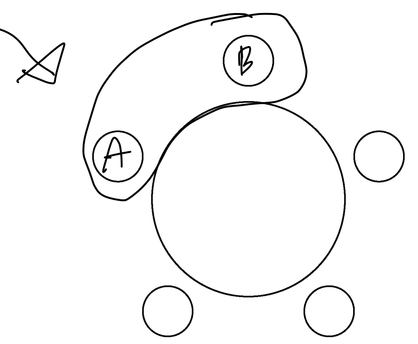
$a_n=\dfrac{1}{6}\times 3^n$

$\dfrac{1}{a_n}=6\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}6\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=6\times\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=3$

9. 다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 180 ② 200 ③ 220 ④ 240 ⑤ 260



A, B, 6명

V 5명 中 A, B, 3명

∴ 6명 中 3명 뽑아야.

$_6C_3$

A, B, ①, ②, ③ 5명 선택

이웃해야 하므로 하나로 묶음.

$2!\times 3!$

A, B 자리교체 나머지 3명 앉히기

$\therefore\ {_6C_3}\times 2!\times 3!$

$=240$

10. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=12$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1}\times n$$

을 만족시킨다. $a_k>a_1$인 자연수 k의 최솟값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

기본점화식이 아님 → 대입후 구해내기

$a_2+a_1=1$

$\therefore a_2=-11$

$a_3+a_2=-2$

$\therefore a_3=9$

$a_4+a_3=3$

$\therefore a_4=-6$

$a_4+a_5=-4$

$\therefore a_5=2$

$a_5+a_6=5$

$\therefore a_6=3$

$a_6+a_7=-6$

$\therefore a_7=-9$

$a_7+a_8=7$

$\therefore a_8=16$ 가12.

11. 1보다 큰 세 실수 a, b, c가

$$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{4}$$

를 만족시킬 때, $\log_a b + \log_b c + \log_c a$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{4} = k.$

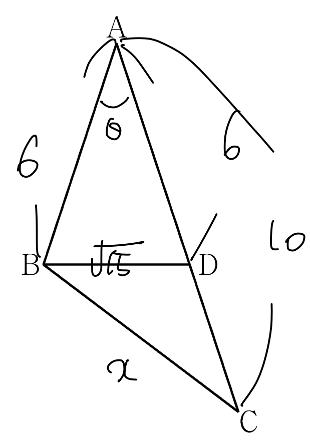
$k^3 = \log_a b \times \frac{\log_b c}{2} \times \frac{\log_c a}{4} = \frac{1}{8}$

$\therefore k = \frac{1}{2}$

$\therefore \log_a b + \log_b c + \log_c a = k + 2k + 4k = 7k = \frac{7}{2}$

12. $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB} = \overline{AD}$가 되도록 잡는다. $\overline{BD} = \sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이는? [3점]

① $\sqrt{37}$ ② $\sqrt{38}$ ③ $\sqrt{39}$ ④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{41}$



x를 구하려면 각 θ로 코사인 법칙..

⇒ $\cos\theta$ 필요.

△ABD의 세변길이 안다 ⇒ 코사인 법칙

$\cos\theta = \frac{6^2+6^2-15}{2\cdot6\cdot6} = \frac{\cancel{36+21}\ \cancel{57}\ 19}{2\times6\times\cancel{6}\ 2} = \frac{19}{24}$

$x^2 = 36+100-2\cdot6\cdot10\times\frac{19}{24}$

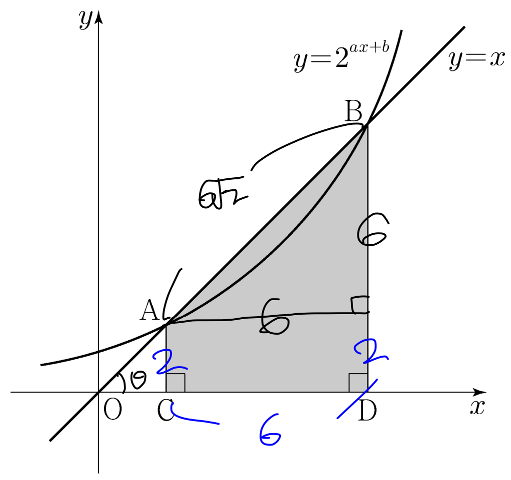
$= 136 - 95$

$= 41$

$\therefore x = \sqrt{41}\ (>0)$

13. 곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



$\overline{AB}=6\sqrt{2}$ 이고 $y=x$ 위의 선분이므로

$\theta=\frac{\pi}{4}$ (45°)

$\therefore \overline{CD}=6$

$\square ABCD = \frac{1}{2}\times(\overline{AC}+\overline{BD})\times 6 = 30$

$\overline{AC}+\overline{BD} = \overline{AC}+(\overline{AC}+6) = 10$

$\therefore \overline{AC}=2$

$A(2,2) \to 2^{2a+b}=2 \Rightarrow 2a+b=1$

$B(8,8) \to 2^{8a+b}=8=2^3 \Rightarrow 8a+b=3$

$6a=2$

$a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{3}$

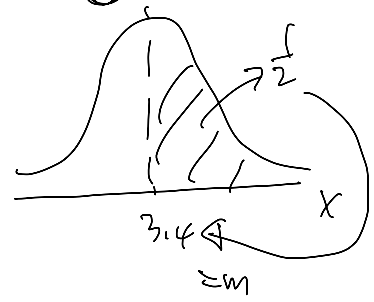
14. 어느 지역 신생아의 출생 시 몸무게 X가 정규분포를 따르고

$$P(X \geq 3.4)=\frac{1}{2},\quad P(X \leq 3.9)+P(Z \leq -1)=1$$

이다. 이 지역 신생아 중에서 임의추출한 25명의 출생 시 몸무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $P(\overline{X} \geq 3.55)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 몸무게의 단위는 kg이고, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668
④ 0.1587 ⑤ 0.3413

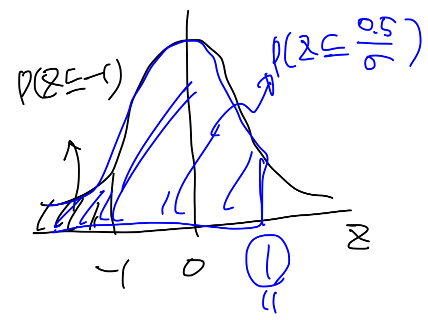


$X_{몸무게} \sim N(m, \sigma^2)$

$m=3.4$

$P(X \leq 3.9) + P(Z \leq -1)$

$= P(Z \leq \frac{0.5}{\sigma}) + P(Z \leq -1) = 1$



$\therefore N(m, \sigma^2) = N(3.4, 0.5^2)$

$n=25$

$\overline{X} \Rightarrow N(3.4, (\frac{0.5}{\sqrt{25}})^2)$

$= N(3.4, 0.1^2)$

$P(\overline{X} \geq 3.55) = P(Z \geq \frac{0.15}{0.1}) = P(Z \geq 1.5)$

$= 1 - P(0 \leq Z \leq 1.5) = 1 - 0.4332 = 0.0668$

15. 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\ln\left(\frac{\sec x+\tan x}{a}\right)$$

의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\lim_{x\to -2}\frac{g(x)}{x+2}=b$일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $a>0$) [4점]

① $\frac{e^2}{4}$ ② $\frac{e^2}{2}$ ③ e^2 ④ $2e^2$ ⑤ $4e^2$

$g(-2)=0 \rightsquigarrow f(0)=-2$

$g'(-2)=b$

$f(0)=\ln\frac{1}{a}=-2$

$a=e^2$

$g(f(x))=x$

$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}=\frac{\sec x\cdot\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}$

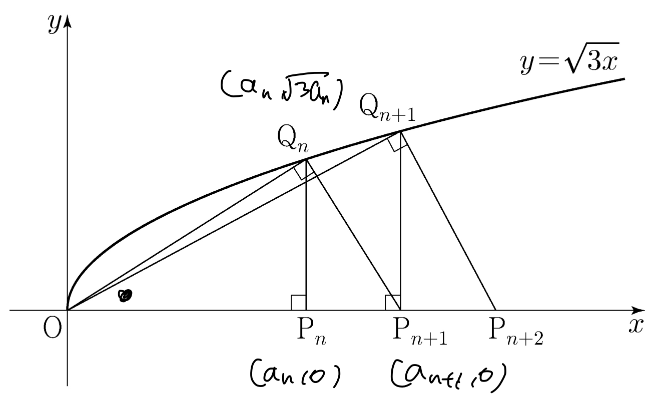
$g'(f(0))=g'(-2)=\frac{0+1}{1+0}=1=b$

$a=e^2, b=1$

16. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

- 선분 OP_n과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$이 서로 수직이다.
- 선분 OQ_n과 선분 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1, 0)$일 때, 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하자. $\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OP}_n}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

$\frac{\overline{\mathrm{OP}_n}}{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}}=\frac{a_n}{\sqrt{3a_n}}$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $(a_n, \sqrt{3a_n})$이므로

$\frac{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}}{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}}=\frac{\sqrt{3a_n}}{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}}$

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\boxed{(가)}$$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

$\therefore \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=3$

$$A_n=\frac{1}{2}\times\left(\boxed{(나)}\right)\times\sqrt{9n-6}$$

$a_{n+1}=3n+1$

$a_{n+1}=a_n+3$

등차

이다.

$a_n=3n-2$ $(a_1=1)$

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은? [4점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

$\therefore 3+25=28$

17. 어느 고등학교에는 5개의 과학 동아리와 2개의 수학 동아리 A, B가 있다. 동아리 학술 발표회에서 이 7개 동아리가 모두 발표하도록 발표 순서를 임의로 정할 때, 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하는 순서로 정해지거나 두 수학 동아리의 발표 사이에는 2개의 과학 동아리만이 발표하는 순서로 정해질 확률은? (단, 발표는 한 동아리씩 하고, 각 동아리는 1회만 발표한다.) [4점]

① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{25}{42}$ ④ $\frac{17}{28}$ ⑤ $\frac{13}{21}$

5개 과학 a, b, c, d, e

2개 수학 A, B

사건 P : A → B 순서 ①

사건 Q : A ㉮㉮ B ②

B ㉮㉮ A ③

①에 ② 포함

$P(P \cup Q)$ = ① + ③

① A → B 순서 → 같은것 취급

(A)(B) a, b, c, d, e

$\frac{\frac{7!}{2!}}{7!} = \frac{1}{2}$

③ (B _ _ A) ㉮㉮㉮

과 2개고르기 ⇓ 배열

$\frac{({}_5C_2 \times 2!) \times 4!}{7!} = \frac{2}{21}$

∴ ① + ③ = $\frac{1}{2} + \frac{2}{21} = \frac{21+4}{42} = \frac{25}{42}$

18. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x > 0) \end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_0^x f(t) f(1-t)\, dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

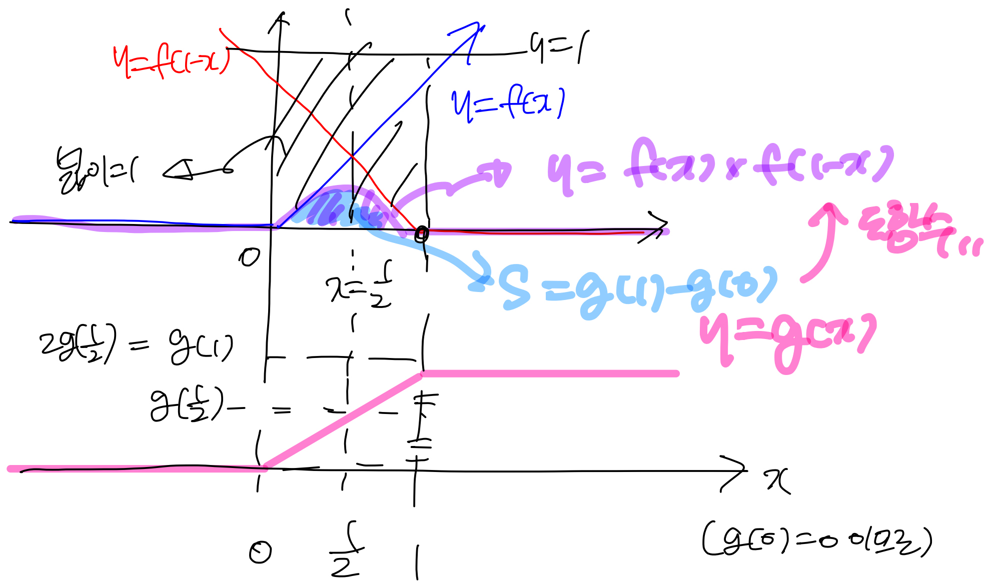
<보 기>

ㄱ. $x \le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) = 0$이다.

ㄴ. $g(1) = 2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a) \ge 1$인 실수 a가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



$g(x) = \int_0^x f(t)f(1-t)\,dt$ → 정적분으로 정의된 함수.

$g'(x) = f(x)f(1-x)$ → g(x)의 도함수

$g(0) = 0$ → g(x)의 개형 결정!!

$f(1-x)$는 $f(x)$를 $x=\frac{1}{2}$ 대칭시킨 함수.

ㄱ. $x \le 0$ → $f(x) \times f(1-x) = 0$

∴ $g(x) = 0$

ㄴ. 그래프..

ㄷ. $g(1)$이 $g(x)$의 최댓값. $S = g(1) - \cancel{g(0)}$ $= g(1)$

그런데, $f(1) = (\ln 2)^{10} < 1$

그래프 □ = 넓이 1 > S ∴ $g(1) < 1$

a 존재 X

19. 집합 $X=\{1,2,3,4\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합 15개 중에서 임의로 서로 다른 세 부분집합을 뽑아 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 A, B, C라 할 때, $A\subset B\subset C$일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{91}$ ② $\frac{2}{91}$ ③ $\frac{3}{91}$ ④ $\frac{4}{91}$ ⑤ $\frac{5}{91}$

* 부분집합 원소 기준 case 분류.

1개, 2개, 3개, 4개 (0개 X)

서로 다른 → $A\subset B$ 에서 $A\neq B$ → $n(A)<n(B)$

(원소개수)	A ⊂	B ⊂	C
①	1	2	3
②	1	2	4
③	1	3	4
④	2	3	4

① $1\subset 2\subset 3$

{1} {1, 2} {1, 2, 3}

$_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 24$

② $1\subset 2\subset 4$

{1} {1, 2} {1, 2, 3, 4}

$_4C_1 \times {}_3C_1 \times 1 = 12$

③ $1\subset 3\subset 4$

{1} {1, _, _}

$_4C_1 \times {}_3C_2 \times 1 = 12$

④ $2\subset 3\subset 4$

{1, 2}, {1, 2, _}

$_4C_2 \times {}_2C_1 \times 1 = 12$

$\therefore \frac{60}{_{15}P_3} = \frac{\cancel{60}\ \cancel{4}\ 2}{\cancel{15\times 14}\times 13\ 7} = \frac{2}{91}$

20. 함수 $f(x)=\sin(\pi\sqrt{x})$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt \quad (x\geq 0)$$

이 $x=a$에서 극대인 모든 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $k^2<a_6<(k+1)^2$인 자연수 k의 값은? [4점]

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

$g(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt$

$\boxed{x-t=p \quad \begin{cases} t=x \to p=0 \\ t=0 \to p=x \end{cases} \quad -dt=dp}$

$=\int_x^0 (x-p)f(p)(-dp) = \int_0^x (x-p)f(p)\,dp$

$g(x) = x\int_0^x f(p)\,dp - \int_0^x pf(p)\,dp$

$g'(x)=\int_0^x f(p)\,dp + \cancel{xf(x)} - \cancel{xf(x)} = \int_0^x f(p)\,dp$

$g'(0)=0$

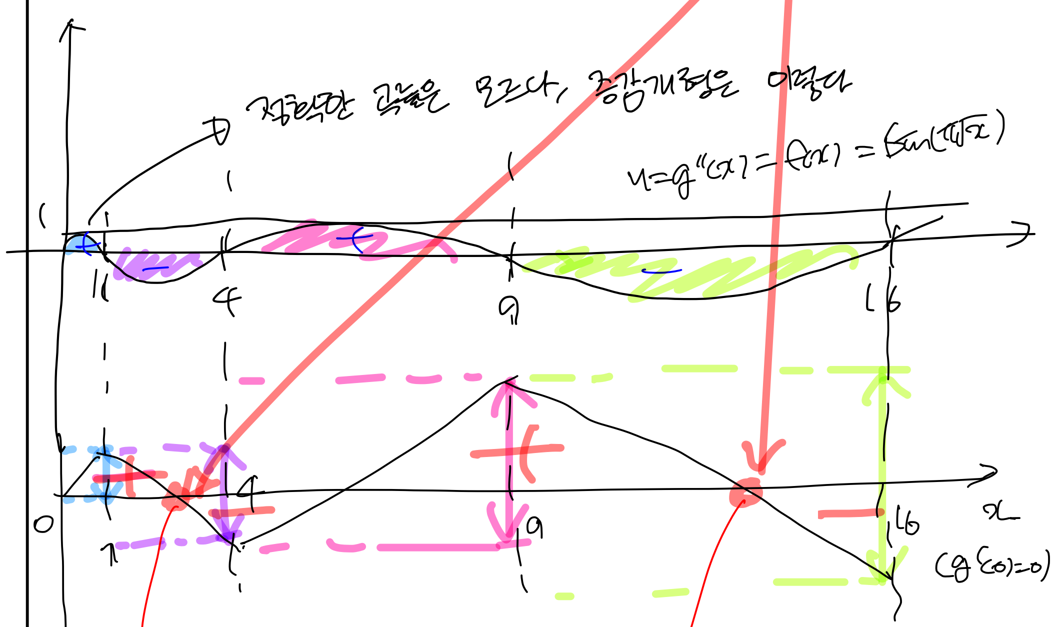
$g''(x)=f(x)$

$g'(0)=0$

$g(x)$의 극점 → $g'(x)$의 그래프에서 $+\to-$ 바뀌는 지점.

$g'(x)$ 그래프? ← $g''(x)=f(x)$ 그래프 이용

도함수



$1^2<a_1<2^2$ $3^2<a_2<4^2$

$1^2<a_1<2^2$

$3^2<a_2<4^2$

$\vdots$

$11^2<a_6<12^2$

$\|$

k.

21. 닫힌구간 $[-2\pi, 2\pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \sin kx + 2, \quad g(x) = 3\cos 12x$$

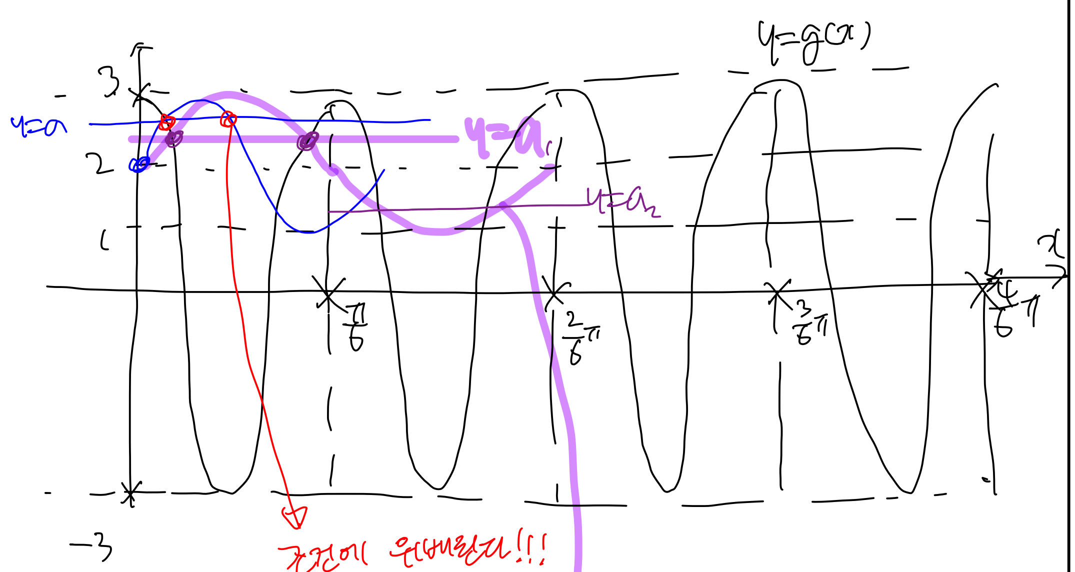
↳ 주기 $\frac{\pi}{6}$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는? [4점]

> 실수 a가 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 교점의 y좌표이면
>
> $\{x \mid f(x) = a\} \subset \{x \mid g(x) = a\}$
>
> 이다.

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

→ $f(x)=a$ 의 교점은 모두 $f(x)=g(x)$의 교점이어야 한다.



조건에 위배된다!!!

⇒ 이렇게되면 X.

이렇게 $y=f(x)$ 와 $y=a$ 의 교점은 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점이어야 해야한다.

↝ 대칭되게 만나야!

반주기 $= \frac{2\pi}{k} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{6}, \frac{2}{6}\pi, \frac{3}{6}\pi, \frac{4}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{6}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi \ldots$

$\therefore k = 6, 3, 2, 1.$

4개

단답형

22. $\left(x + \frac{4}{x^2}\right)^6$ 의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오. [3점]

$_6C_r\, x^r (4x^{-2})^{6-r}$

$= {_6C_r} \cdot 4^{6-r} \cdot x^{3r-12}$

$3r-12=3$

$r=5$

$\therefore\ {_6C_5} \times 4 = 24$

23. 함수 $f(x) = x\ln(2x-1)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(x) = \ln(2x-1) + x \cdot \frac{2}{2x-1}$

$f'(1) = 0 + 2$

2

24. 방정식

$$\log_2 x = 1 + \log_4 (2x-3)$$

을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱을 구하시오. [3점]

$\boxed{x>0\ ,\ 2x-3>0}$

$x > \frac{3}{2}$ ..

$\log_2 x - 1 = \frac{1}{2}\log_2 (2x-3)$

$\log_2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \log_2 (2x-3)$

$\frac{x^2}{4} = 2x-3$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

-2

-6

$x = 2, 6 \ \left(> \frac{3}{2}\right)$

확인 꼭!!!

12

25. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4 = a$ 일 때, $5a$의 값을 구하시오. [3점]

$1 + \frac{2c}{n} \to x$

$k=0 \to 1$

$k=n \to 3$

$\frac{2}{n} \to dx$

$\int_1^3 x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 \Big|_1^3$

$= \frac{1}{5} \times (3^5 - 1) = a$

$\therefore 5a = 242$

26. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	d	1

Y	11	21	31	41	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	c	d	1

$\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{E}(X^2)=5$일 때, $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

$Y = 10X + 1$ / $V(X) = 5 - 2^2 = 1$

$E(Y) + V(Y) = 10E(X) + 1 + 100V(X)$

$= 20 + 1 + 100$

$\therefore 121$

27. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+3}-S_n=13\times 3^{n-1}$$

일 때, a_4의 값을 구하시오. [4점]

$S_{n+3}-S_n=\overset{\text{등비}}{a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}}$

$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=a_{n+1}(1+r+r^2)$

$=a\cdot r^n(1+r+r^2)=13\cdot 3^{n-1}$

$r=3$

$a\cdot \cancel{3^n}\cdot \cancel{13}=\cancel{13}\cdot \cancel{3^{n-1}}$
3

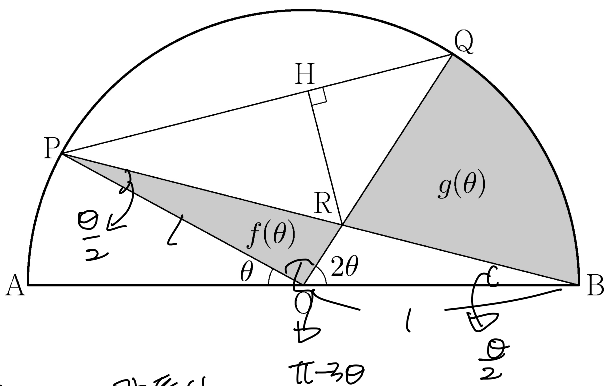
$\therefore a=\frac{1}{3}$

$a_4=\frac{1}{3}\times 3^3=9$

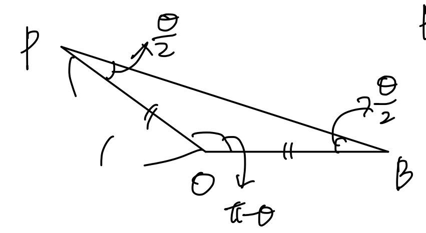
28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle POA=\theta$, $\angle QOB=2\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 PB, OQ의 교점을 R라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POR의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

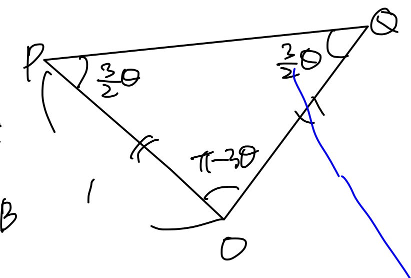
$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{RH}}=\frac{q}{p}$$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

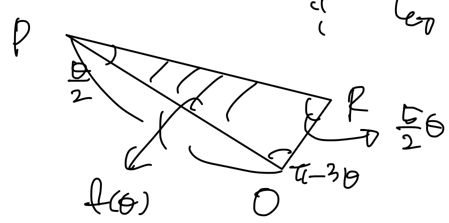


① → 각도!



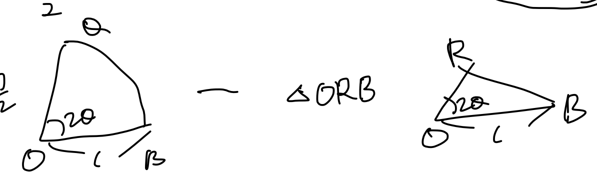


② $f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OR}\times\sin(\pi-3\theta)$
$\overline{OP}=1$, $\overline{OR}$ → 구하고 넘어야!



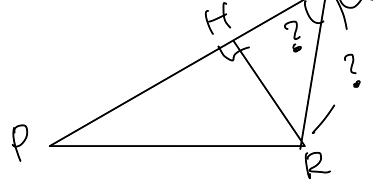
$\frac{1}{\sin\frac{5}{2}\theta}=\frac{\overline{OR}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ → $\overline{OR}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5}{2}\theta}$ → $\lim_{\theta\to0}\overline{OR}=\frac{1}{5}$

③ $g(\theta)=$ 부채꼴 − △ORB



$=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 2\theta-\frac{1}{2}\cdot 1\times\overline{OR}\times\sin 2\theta$

④ $\overline{RH}$ → $\overline{QR}$과 $\angle RQH$ 이용!
$\overline{QR}=1-\overline{OR}$, $\angle RQH=\frac{3}{2}\theta$



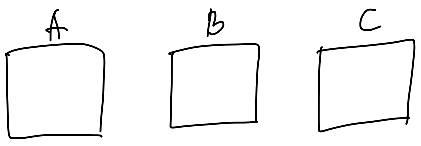
$\overline{RH}=\overline{QR}\sin\frac{3}{2}\theta=(1-\overline{OR})\sin\frac{3}{2}\theta$

$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\frac{1}{2}\overline{OR}\cdot\sin3\theta+\theta-\frac{1}{2}\cdot\overline{OR}\cdot\sin2\theta\right)\times\frac{1}{\theta}}{\left((1-\overline{OR})\sin\frac{3}{2}\theta\right)\times\frac{1}{\theta}}$

$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times3+1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times2}{(1-\frac{1}{5})\times\frac{3}{2}}=\frac{\frac{3}{10}+1-\frac{1}{5}}{\frac{6}{5}}=\frac{\frac{11}{10}}{\frac{6}{5}}=\frac{11}{12}$

23

29. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]



"흰공먼저"

검은 공 기본으로 채우기

① 4/0/0
② 3/1/0
③ 2/2/0
④ 2/1/1

① A B C → $\frac{3!}{2!} \times {}_3H_2$

검은공 2개 남음

자리바꾸기

② 검 3 → $3! \times {}_3H_3$

③ 검4 → $\frac{3!}{2!} \times {}_3H_4$

④ 검4 → $\frac{3!}{2!} \times {}_3H_4$

①+②+③+④ = $3\times6 + 6\times10 + 3\times15 + 3\times15$

= $18+60+90$

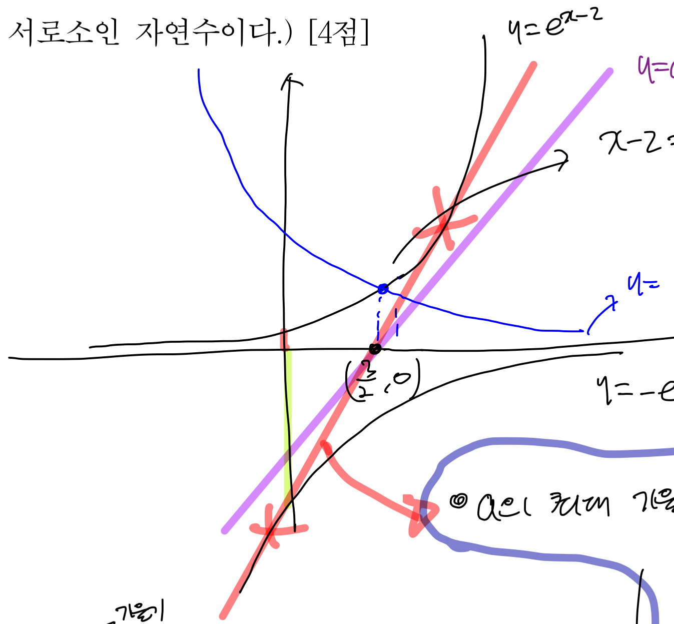
= 168

30. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
>
> $$-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$$
>
> 이 성립한다.

$(\frac{3}{2}, 0)$ 대칭

$|M \times m^3| = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



◎ a의 최대 기울기 → $y=e^{x-2}$ & $y=-e^{-x+1}$ 공통접선

$(\frac{3}{2}, 0) \to y=e^{x-2}$에 그은 접선 (접점을 (p, e^{p-2}))

$\frac{e^{p-2}}{p-\frac{3}{2}} = e^{p-2}$

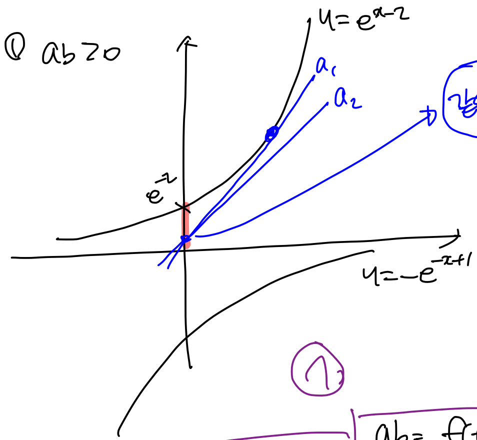
$p=\frac{5}{2}$ → $e^{\frac{5}{2}-2} = e^{\frac{1}{2}}$

ⓐ 최대기울기

a가 음수이면 부등식 X → $a>0$
b는 y절편

4종
→ b가 여기 속하면 $ab<0$ ⇒ 최소
→ b가 여기 속하면 $ab>0$ ⇒ 최대

① $ab>0$



같은 절편에서 $a_1>a_2$ → $a_1b>a_2b$

∴ "접할 때"가 최대

접점 (t, e^{t-2})에서 접선

$y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$

$a=e^{t-2}$, $b=(1-t)e^{t-2}$ → $0<b\le e^{-2}$

㉠

$ab=f(t)=(1-t)e^{2(t-2)}$ 의 최대

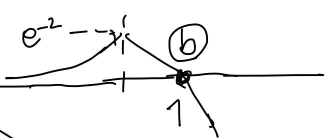
$f'(t)=(2-2t-1)e^{2(t-2)}$

$0<(1-t)e^{t-2}\le e^{-2}$ → t의 범위 찾자

"b"

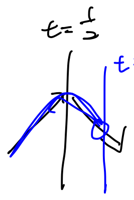
$\frac{db}{dt}=(1-t-1)e^{t-2}=0$

$t=0$



$t<1$

$t=\frac{1}{2}$



∴ $t=\frac{1}{2}$ 최대. ⇒ $f(\frac{1}{2})=M$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

→ 다음페이지 ②

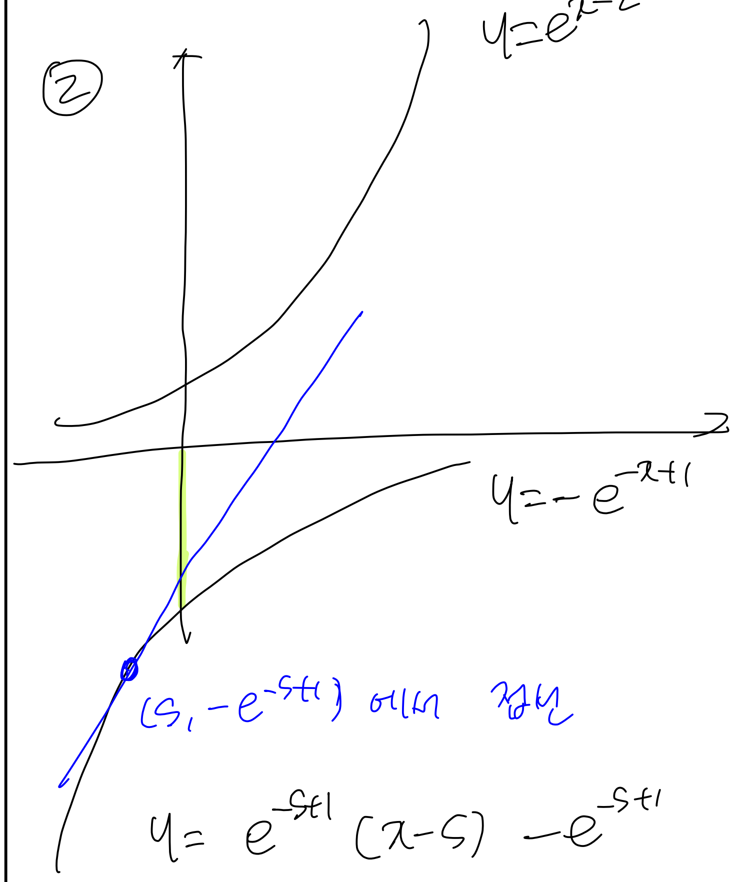
29. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

30. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
>
> $$-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$$
>
> 이 성립한다.

$|M \times m^3| = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

②



$(s, -e^{-s+1})$ 에서 접선

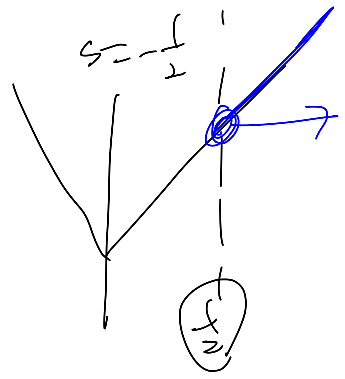
$y = e^{-s+1}(x-s) - e^{-s+1}$

$a = e^{-s+1}$, $b = (-1-s)e^{-s+1}$

$ab = g(s) = (-1-s)e^{2(-s+1)}$, $e^{-s+1} \le e^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \frac{1}{2} \le s$

$g'(s) = (+2+2s-1)e^{2(-s+1)}$



$\to g(\frac{1}{2})$ = 최댓값 M

$\therefore |f(\frac{1}{2}) \times (g(\frac{1}{2}))^3|$

$= |\frac{1}{2} \times e^{-3} \times (-\frac{3}{2})^3 \times e^3|$

$= \frac{27}{16}$

43

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.