2021학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가(수학)

4점 문제 해설집(集)

※ 본문을 읽기 전에, 먼저 읽어주세요!

1) 본 문서에 들어 있는 문제들에 대한 저작권은 **한국교육과정평가원**에 있습니다.

2) 본문의 해설은 필자가 단독으로 다른 해설을 참고하지 않고 만들어낸 것이므로 다소 매끄럽지 않은 부분이 있을 수도 있습니다.

3) 본문의 구성은 문제에 대한 주석과 해설, 해당 문제와 비슷한 유형의 연습 문제 몇 가지로 구성되어 있습니다.
(관련 교과 내용: 교과서의 내용 요소 기준 / 난이도: 필자가 주관적인 기준으로 판단)

4) 해당 저작물은 수험생들의 학습을 돕기 위해 만들어진 것으로, 영리적 목적(문제를 편집, 수정하여 판매하는 행위 등)이 아닌 이상 학생들의 학습을 위한 용도로 단순 배포하고 이용하는 것엔 제한이 없습니다.

5) 이 문서를 통해 많은 분들이 도움을 받으셨으면 좋겠습니다.

■ 제작자: 그린란드(이재종)
(http://blog.naver.com/wowhd93)

■ 최종 수정일자: 2020/09/17 04:00

‘가’ 형

Problem #14

14. 어느 지역 신생아의 출생 시 몸무게 X가 정규분포를 따르고

$$\mathrm{P}(X \ge 3.4) = \frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(X \le 3.9) + \mathrm{P}(Z \le -1) = 1$$

이다. 이 지역 신생아 중에서 임의추출한 25명의 출생 시 몸무게의 표본평균을 $\overline{X}$ 라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X} \ge 3.55)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 몸무게의 단위는 kg이고, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668
④ 0.1587 ⑤ 0.3413

commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 정규분포, 표본평균
(난이도) 2/5

“정규분포를 따르는 확률변수의 확률밀도함수의 성질(대칭성)과 표본평균의 성질을 이해하고 있으면 어렵지 않게 해결할 수 있습니다.”

Solution

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma)$를 따른다고 하면

$\mathrm{P}(X \ge 3.4) = \frac{1}{2}$ 에서 $m = 3.4$

$$\mathrm{P}(X \le 3.9) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{3.9-3.4}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{0.5}{\sigma}\right)$$

이고, 정규분포의 성질에서
$\mathrm{P}(Z \le -1) = \mathrm{P}(Z \ge 1)$ 이므로 주어진 조건에서

$$\frac{0.5}{\sigma} = 1 \;\Rightarrow\; \sigma = 0.5$$

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$ 즉,

정규분포 $\mathrm{N}(3.4, 0.1^2)$을 따르므로

$$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X} \ge 3.55) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{3.55-3.4}{0.1}\right) = \mathrm{P}(Z \ge 1.5) = 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5) = 0.0668$$

정답: ③

Supplementary Problem

1. [2010년 7월 가33]
확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 실수 a, b에 대하여 $\mathrm{P}(X < a-3) = \mathrm{P}(X > b+2)$가 성립한다.
$Y = \frac{1}{3}X + 1$일 때, 확률변수 Y의 평균은 51, 분산은 $\frac{4}{9}$이다.
이때, $a+b+\sigma$의 값은? [3점]

① 299 ② 300 ③ 301 ④ 302 ⑤ 303

(정답) ⑤

2. [2016학년도 수능 가18]
정규분포 $\mathrm{N}(50, 8^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $\mathrm{N}(75, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$ 라 하자.
$\mathrm{P}(\overline{X} \le 53) + \mathrm{P}(\overline{Y} \le 69) = 1$일 때, $\mathrm{P}(\overline{Y} \ge 71)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

① 0.8413 ② 0.8644 ③ 0.8849
④ 0.9192 ⑤ 0.9452

(정답) ①

3. [2017년 경남10월 가28나29]
서로 다른 두 실수 m_1, m_2에 대하여 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_1, 6^2\right)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_2, 6^2\right)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다.
$f(44)=g(44)$이고,
$\mathrm{P}(41 \le Y \le 61)=\mathrm{P}(m_1 \le X \le m_1+17)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$
일 때, $2m_1+m_2$의 값을 구하시오. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점]

(정답) 118

Problem #15

15. 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\ln\left(\frac{\sec x+\tan x}{a}\right)$$

의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{g(x)}{x+2}=b$일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $a>0$) [4점]

① $\frac{e^2}{4}$ ② $\frac{e^2}{2}$ ③ e^2 ④ $2e^2$ ⑤ $4e^2$

commentary

(관련 교과 내용)
[미적분] 역함수의 미분법
(난이도) $2/5$

"미분계수의 정의를 이용하여 역함수의 함숫값과 미분계수를 구하는 기초적인 문제입니다."

Solution

$a>0$이고 $\sec x+\tan x=\sec x(1+\sin x)$이므로

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\sec x+\tan x>0$입니다.

따라서 함수 $f(x)$는 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 미분가능합니다.

또한, $f'(x)=\sec x\neq 0$이므로
함수 $g(x)$도 정의역 내에서 미분가능합니다. 따라서

$\lim\limits_{x\to-2}\frac{g(x)}{x+2}=b$에서

$\lim\limits_{x\to-2}g(x)=g(-2)=0 \Rightarrow f(0)=-2$

$f(0)=-\ln a=-2$에서 $a=e^2$

한편, 역함수의 미분법에 의하여

$\lim\limits_{x\to-2}\frac{g(x)}{x+2}=g'(-2)=\frac{1}{f'(0)}$

$f'(0)=\sec 0=1 \Rightarrow g'(-2)=1 \quad \therefore b=1$

$\therefore ab=e^2$

정답: ③

Supplementary Problem

1. [2018년 대구11월 가11]
열린구간 $(0,1)$에서 정의된 함수 $f(x)$와 $f(x)$의 역함수 $g(x)$는 미분가능한 함수이다. $0<t<\frac{\pi}{2}$인 실수 t에 대하여 $f(\cos t)=\tan t$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{5}}{4}$

(정답) ②

2. [2016년 경남10월 가26]
실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2}{x-1}=\frac{3}{4}$$

이다. $f'(2)=a$일 때, $60a$의 값을 구하시오. [4점]

(정답) 80

3. [2016년 7월 가17]
미분가능한 함수 $f(x)$와 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가
$g\left(3f(x)-\frac{2}{e^x+e^{2x}}\right)=x$를 만족시킬 때,

다음은 $g'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하는 과정이다.

$g\left(3f(x)-\frac{2}{e^x+e^{2x}}\right)=x$에서

$3f(x)-\frac{2}{e^x+e^{2x}}=g^{-1}(x)$이므로

$$f(x)=\frac{1}{\boxed{(가)}}$$

이다.
$f(x)$의 도함수를 구하면

$$f'(x)=\frac{-e^x-2e^{2x}}{\left(\boxed{(가)}\right)^2}$$

이다. $f(0)=\frac{1}{2}$이므로 $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$이다.

그러므로 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\boxed{(나)}$

이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $h(x)$, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $p\times h(\ln 2)$의 값은? [4점]

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

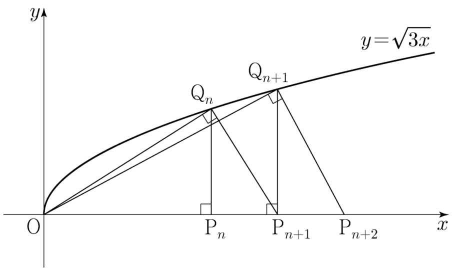
(정답) ①

Problem #16

16. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

- 선분 OP_n과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$이 서로 수직이다.
- 선분 OQ_n과 선분 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1, 0)$일 때, 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하자.
$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OP}_n}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $(a_n, \sqrt{3a_n})$이므로

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\boxed{(가)}$$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\times\left(\boxed{(나)}\right)\times\sqrt{9n-6}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은? [4점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

commentary

(관련 교과 내용)
[(중)수학-2] 닮음
[수학I] 등차수열

(난이도) 2/5

"등차수열을 이용한 문제의 해결 과정을 따라가기만 하면 어렵지 않게 해결할 수 있습니다."

Solution

(가): $\overline{\mathrm{OP}_n}=a_n$, $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\sqrt{3a_n}$이므로

$\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$에서

$a_n : \sqrt{3a_n} = \sqrt{3a_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

$\Rightarrow a_n\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=3a_n$

$a_n>0$이므로 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=3$

$\therefore p=3$

(나): $a_{n+1}-a_n=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=3$이고, $a_1=1$이므로

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 공차가 3인 등차수열입니다.

$\therefore a_n=3n-2$

$\Rightarrow \mathrm{P}_n(3n-2, 0)$, $\mathrm{Q}_n(\sqrt{9n-6})$

$$\therefore A_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$$
$$=\frac{1}{2}\times(3n+1)\times\sqrt{9n-6}$$

$\therefore f(n)=3n+1$

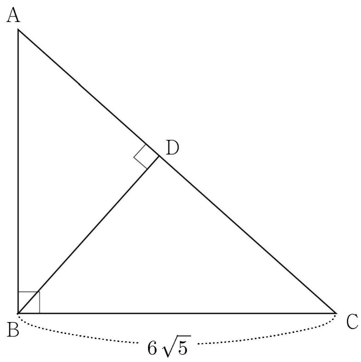
$\therefore p+f(8)=3+25=28$

정답: ⑤

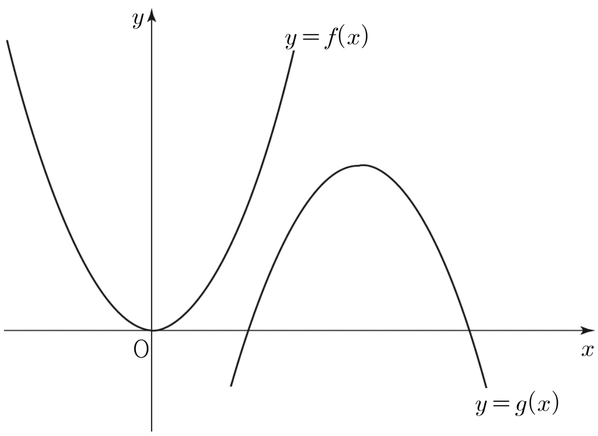
Supplementary Problem

1. [2010년 4월 가나25]
그림과 같이 $\angle \mathrm{B}=90^\circ$이고 선분 BC의 길이가 $6\sqrt{5}$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 빗변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 세 선분 AD, CD, AB의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 선분 AC의 길이를 구하시오. [4점]

(정답) 18



2. [2015년 7월 나13]
두 함수 $f(x)=x^2$과 $g(x)=-(x-3)^2+k$ $(k>0)$에 대하여 직선 $y=k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 두 점을 A, B라 하고, 함수 $y=g(x)$의 꼭짓점을 C라 하자.
세 점 A, B, C의 x좌표가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 k의 값은? (단, A는 제2사분면 위의 점이다.) [3점]



① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

(정답) ①

Problem #17

17. 어느 고등학교에는 5개의 과학 동아리와 2개의 수학 동아리 A, B가 있다. 동아리 학술 발표회에서 이 7개 동아리가 모두 발표하도록 발표 순서를 임의로 정할 때, 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하는 순서로 정해지거나 두 수학 동아리의 발표 사이에는 2개의 과학 동아리만이 발표하는 순서로 정해질 확률은? (단, 발표는 한 동아리씩 하고, 각 동아리는 1회만 발표한다.) [4점]

① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{25}{42}$ ④ $\frac{17}{28}$ ⑤ $\frac{13}{21}$

commentary

(관련 교과 내용)
[(고1)수학] 순열과 조합
[확률과 통계] 여러 가지 순열, 확률
(난이도) 3/5

“확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 계산하는 문제입니다.
합사건의 확률을 계산할 때 필요한 계산이 복잡하지 않으므로, 기초적인 교과 내용을 이용하면 해결할 수 있습니다.”

Solution

사건 A를 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하는 순서로 정해지는 사건이라 하고,
사건 B를 두 수학 동아리의 발표 사이에 2개의 과학 동아리만이 발표하는 순서로 정해지는 사건이라 합시다.
구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이므로
$\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A\cap B)$를 각각 구하면 됩니다.

(1) 두 수학 동아리가 발표하는 순서는 다른 동아리의 발표 순서와 관계없이 A가 먼저 발표하거나 B가 먼저 발표하는 것뿐이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$ 입니다.

(2) 모든 동아리의 발표 순서를 정하는 방법의 수는 $7!$이고,
두 수학 동아리의 발표 사이에 발표하는 두 과학 동아리를 선택하여 발표 순서를 정하는 방법의 수는

$${}_5\mathrm{P}_2=20$$

남은 3개의 과학 동아리는 두 수학 동아리보다 먼저 발표하거나 나중에 발표해야 하므로
남은 3개의 과학 동아리의 발표 순서를 정하는 방법의 수는

$${}_2\mathrm{H}_3\times 3!=24$$

두 수학 동아리의 발표 순서를 정하는 방법의 수는

$2! = 2$

따라서 $\mathrm{P}(B) = \dfrac{20 \times 24 \times 2}{7!} = \dfrac{4}{21}$

(3) 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하고, 두 수학 동아리 사이에 두 개의 과학 동아리만 발표하는 경우의 수는 (2)에서 두 수학 동아리의 발표 순서만 고정된 경우의 수이므로

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(B) = \frac{2}{21}$$

(1)~(3)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup B) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{21} - \frac{2}{21} = \frac{25}{42}\end{aligned}$$

정답: ③

Supplementary Problem

1. [2018학년도 수능 가28]
방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$ 중에서 임의로 한 개를 선택한다. 선택한 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$가 $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$ 을 만족시킬 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(정답) 19

2. [2020년 6월 가19]
두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$에 대하여 A에서 B로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

$f(1) \geq 2$이거나 함수 f의 치역은 B이다.

① $\dfrac{16}{27}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{20}{27}$ ④ $\dfrac{22}{27}$ ⑤ $\dfrac{8}{9}$

(정답) ④

Problem #18

18. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x > 0) \end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_0^x f(t)f(1-t)\,dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x \leq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) = 0$이다.

ㄴ. $g(1) = 2g\left(\dfrac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a) \geq 1$인 실수 a가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

commentary

(관련 교과 내용)
[미적분] 함수의 그래프, 정적분, 치환적분법
(난이도) $4/5$

"함수 $g(x)$의 값을 실제로 구하지 않고, 함수의 그래프와 정적분의 연산, 적분과 미분의 관계를 이용하여 문제를 해결하는 까다로운 문제입니다."

Solution

ㄱ) $x \leq 0$일 때 $f(x) = 0$이므로 $x \leq 0$이면

$$g(x) = \int_0^x f(t)f(1-t)\,dt = \int_0^x 0\,dt = 0$$ (참)

ㄴ) $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)\,dt$에서

$1-t = u$라 하면 $\dfrac{dt}{du} = -1$이고

$t=0 \Rightarrow u=1,\ t=\dfrac{1}{2} \Rightarrow u=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)\,dt &= -\int_1^{\frac{1}{2}} f(u)f(1-u)\,du\\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(u)f(1-u)\,du\end{aligned}$$

따라서

$$2g\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\frac{1}{2}}f(t)f(1-t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}f(t)f(1-t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(t)f(1-t)dt$$
$$=\int_0^{1}f(t)f(1-t)dt=g(1)$$

(참)

ㄷ) 적분과 미분의 관계에서

$g'(x)=f(x)f(1-x)$

이고, 함수 $f(x)$의 정의에서

$x\le 0$일 때와 $x\ge 1$일 때 $g(x)$는 상수함수이고,

$0\le x\le 1$일 때, $f(x)\ge 0$이고 $f(1-x)\ge 0$이므로

$f(x)f(1-x)\ge 0$입니다.

따라서 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$에서는 증가하고 열린구간 $(-\infty,0)$과 $(1,\infty)$에서는 각각 상수함수입니다.
즉, 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(1)$입니다. ⋯ (*)

ㄱ에서 $x<0$일 때 $g(x)=0$이고,

$f'(x)=\dfrac{30x^3\{\ln(1+x^4)\}^9}{1+x^4}$ 이므로

함수 $f(x)$는 열린구간 $(0,1)$에서 증가합니다.

$f(0)=0,\ f(1)=(\ln 2)^{10}<1$이므로

닫힌구간 $[0,1]$에서

$0\le f(x)<1$ 이고, $0\le f(1-x)<1$입니다.

따라서 $0\le f(x)f(1-x)<1$입니다.

$$g(1)=\int_0^1 f(t)f(1-t)dt<\int_0^1 1dt=1$$

이고, (*)에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x)<1$입니다.

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ입니다.

정답: ②

Supplementary Problem

1. [2019년 6월 가20]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)>0$

(나) $\ln f(x)+2\int_0^x (x-t)f(t)dt=0$

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $x>0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

ㄷ. 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 할 때, $f(1)+\{F(1)\}^2=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(정답) ⑤

2. [2019년 3월 가21]

함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=xe^{-x^2}$이다. 모든 실수 x에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

(가) $g(x)=\int_1^x f'(t)(x+1-t)dt$

(나) $f(x)=g'(x)-f'(x)$

〈보 기〉

ㄱ. $g'(1)=\frac{1}{e}$

ㄴ. $f(1)=g(1)$

ㄷ. 어떤 양수 x에 대하여 $g(x)<f(x)$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(정답) ②

Problem #19

19. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합 15개 중에서 임의로 서로 다른 세 부분집합을 뽑아 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 A, B, C라 할 때, $A\subset B\subset C$일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{91}$　② $\frac{2}{91}$　③ $\frac{3}{91}$　④ $\frac{4}{91}$　⑤ $\frac{5}{91}$

commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 여러 가지 순열, 확률
(난이도) $4/5$

“부분집합을 조건을 만족시키도록 구성하는 아이디어와 방법을 요구하는 문제입니다. 경우를 나누어 꼼꼼히 계산하는 6월 모의평가와 다른 양상이라 할 수 있겠습니다.”

Solution

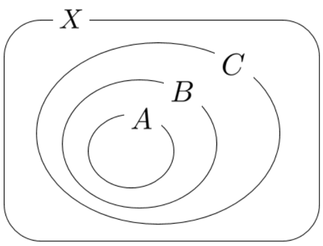
집합 X의 15개의 부분집합 중 서로 다른 세 집합을 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수는

$${}_{15}\mathrm{P}_3=15\times 14\times 13$$

입니다. 이때 세 집합 A, B, C는 서로 다른 집합이므로 $A\subset B\subset C$인 경우의 수는 그림과 같이 세 집합

$$A,\ B-A,\ C-B$$

가 각각 공집합이 되지 않도록 집합 X의 네 원소를 위의 세 집합에 넣는 방법의 수와 같습니다.



집합 X의 네 원소를 세 집합 A, $B-A$, $C-B$에 나누어 넣을 때, 세 집합에 들어가는 원소의 개수는 $1, 1, 1$ 또는 $1, 1, 2$만 가능합니다.

(1) 세 집합에 들어가는 원소의 개수가 각각 $1, 1, 1$인 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$${}_4\mathrm{P}_3=24$$

(2) 세 집합에 들어가는 원소의 개수가 각각 $1, 1, 2$인 경우의 수는 2개의 원소가 들어가는 집합을 선택하고, 네 개의 원소를 1개, 1개, 2개로 나누는 방법의 수와 같으므로

$$\frac{{}_4\mathrm{P}_3}{2!}\times 3 = 36$$

(1), (2)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 함수 f의 개수는

$$24+36=60$$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{60}{15\times 14\times 13}=\dfrac{2}{91}$

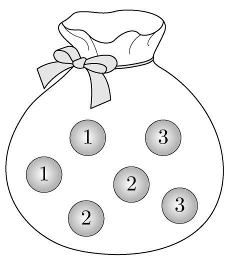
정답: ②

Supplementary Problem

1. [2019년 6월 가27]
숫자 $1, 1, 2, 2, 3, 3$이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 6번 반복할 때, $k\,(1 \le k \le 6)$번째 꺼낸 공에 적힌 수를 a_k라 하자. 두 자연수 m, n을

$$m = a_1 \times 100 + a_2 \times 10 + a_3,$$
$$n = a_4 \times 100 + a_5 \times 10 + a_6$$

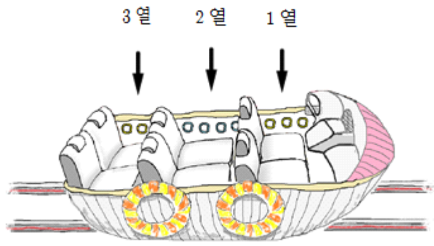
이라 할 때, $m > n$일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



(정답) 22

2. [2019년 사관학교 나29]
그림과 같이 1열, 2열, 3열에 각각 2개씩 모두 6개의 좌석이 있는 놀이기구가 있다. 이 놀이기구의 6개의 좌석에 6명의 학생 A, B, C, D, E, F가 각각 한 명씩 임의로 앉을 때, 다음 조건을 만족시키도록 앉을 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) 두 학생 A, B는 같은 열에 앉는다.
(나) 두 학생 C, D는 서로 다른 열에 앉는다.
(다) 학생 E는 1열에 앉지 않는다.



(정답) 49

3. [2020학년도 수능 가20]
한 개의 동전을 7번 던질 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

(가) 앞면이 3번 이상 나온다.
(나) 앞면이 연속해서 나오는 경우가 있다.

① $\dfrac{11}{16}$ ② $\dfrac{23}{32}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ $\dfrac{25}{32}$ ⑤ $\dfrac{13}{16}$

(정답) ①

Problem #20

20. 함수 $f(x)=\sin(\pi\sqrt{x})$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt \quad (x\ge 0)$$

이 $x=a$에서 극대인 모든 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$k^2 < a_6 < (k+1)^2$인 자연수 k의 값은? [4점]

① 11　② 14　③ 17　④ 20　⑤ 23

commentary

(관련 교과 내용)
[미적분] 함수의 그래프, 여러 가지 적분법, 정적분의 활용
(난이도) $4/5$

"함수의 극대와 극소의 정의를 알아야 하고, 함수의 그래프를 이용하여 정적분으로 정의된 함수의 함숫값을 추론하는 종합적인 사고력을 요구하는 문제입니다."

Solution

$g(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$에서

$x-t=u$라 하면 $t=x-u$이고

$\frac{dt}{du}=-1$이고,

$t=0$일 때 $u=x$, $t=x$일 때 $u=0$이므로

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x tf(x-t)dt \\ &= -\int_x^0 (x-u)f(u)du = \int_0^x (x-u)f(u)du \\ &= x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du \end{aligned}$$

입니다. 따라서

$$g'(x)=\int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)du$$

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극대이려면
$g'(x)$의 값의 부호가 $x=a$의 좌우에서 양에서 음으로 바뀌어야 합니다.

한편 정수 n에 대하여

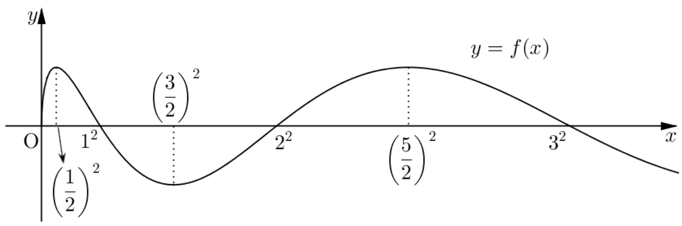
$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi$$

이므로

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=n^2$$

이고, $f'(x)=\frac{\pi\cos(\pi\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ 이므로

함수 $f(x)$는 $\cos(\pi\sqrt{x})=0$인 점$\left(x=\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\right)$에서만 극값을 갖습니다.
이를 이용하여 곡선 $y=f(x)$를 그리면 다음과 같습니다.



치환적분법과 부분적분법에 의하여
자연수 m에 대하여

$$\begin{aligned} &\int_{(m-1)^2}^{m^2} f(x)dx \\ &= \int_{(m-1)^2}^{m^2} \sin(\pi\sqrt{x})dx \\ &\overset{\pi\sqrt{x}=u}{=} \int_{(m-1)\pi}^{m\pi} \frac{2u}{\pi^2}\sin u\,du \\ &= \frac{2}{\pi^2}\int_{(m-1)\pi}^{m\pi} u\sin u\,du \\ &= \frac{2}{\pi^2}\Big[u\cos u\Big]_{(m-1)\pi}^{m\pi} - \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{(m-1)\pi}^{m\pi}\cos u\,du}_{=0} \\ &= \frac{(-1)^m\times 2}{\pi}(2m-1) \end{aligned}$$

이므로

$$\left|\int_{(m-1)^2}^{m^2} f(x)dx\right| = \frac{2}{\pi}\times(2m-1)$$

입니다. 즉, 닫힌구간 $[m-1, m]$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이보다 닫힌구간 $[m, m+1]$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 더 큽니다.
따라서 곡선 $y=f(x)$의 그래프의 개형에서

$$\int_{0^2}^{1^2} f(x)dx > 0$$

$$\int_{1^2}^{2^2} f(x)dx = \int_{0^2}^{1^2} f(x)dx + \int_{1^2}^{2^2} f(x)dx < 0$$

이므로 $1^2 < a_1 < 2^2$입니다.
비슷한 방법으로 $3^2 < a_2 < 4^2$

$\cdots,$

$(2m-1)^2 < a_m < (2m)^2$

$\therefore\ 11^2 < a_6 < 12^2,\ k=11$

(참고) 정수 n에 대하여 $y=\sin x$는 $(n\pi, 0)$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=|\sin x|$는 직선 $x=n\pi$에 대하여 대칭입니다.
따라서 $n\pi \le x \le (n+1)\pi$일 때
$|x\sin x| < |(x+\pi)\sin x| = |(x+\pi)\sin(x+\pi)|$
이므로

$$\int_{(m-1)\pi}^{m\pi} |u\sin u|\,du < \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} |u\sin u|\,du$$

이다. 즉, 부분적분법을 이용하여 구체적으로 정적분의 값을 계산하지 않아도 문제를 해결할 수 있습니다.

정답: ①

Supplementary Problem

1. [2017학년도 수능 가20]

함수 $f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)\,dt$ 에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$

ㄴ. $f'(a)>0$을 만족시키는 a가 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(정답) ⑤

2. [2015년 9월 가21]

함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\frac{7}{2}\pi \le x \le 0\right) \\ \sin x-|\sin x| & \left(0 \le x \le \frac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$$

라 하자. 닫힌구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)\,dt \ge 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, $-\frac{7}{2}\pi \le a \le \frac{7}{2}\pi$) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{5}{2}\pi$ ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ $\frac{9}{2}\pi$

(정답) ①

3. [2015년 10월 가21]

함수 $f(x)=\sin \pi x$와 이차함수 $g(x)=x(x+1)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\int_{g(x)}^{g(x+1)} f(t)\,dt$$

라 할 때, 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

(정답) ⑤

Problem #21

21. 닫힌구간 $[-2\pi, 2\pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\sin kx+2,\quad g(x)=3\cos 12x$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는? [4점]

> 실수 a가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표이면
>
> $\{x\,|\,f(x)=a\}\subset\{x\,|\,g(x)=a\}$
>
> 이다.

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

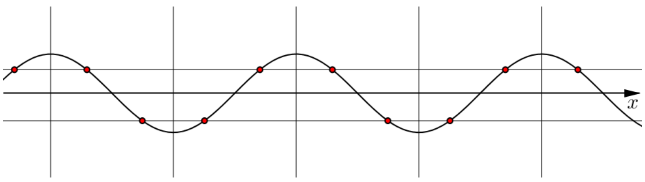
commentary

(관련 교과 내용)
[수학Ⅰ] 삼각함수의 그래프
(난이도) $5/5$

"삼각함수의 그래프의 대칭성과 주기성에 대해 깊게 이해하고 있어야 하고, 상당한 수준의 추론 능력을 요구하는 문제입니다."

Solution

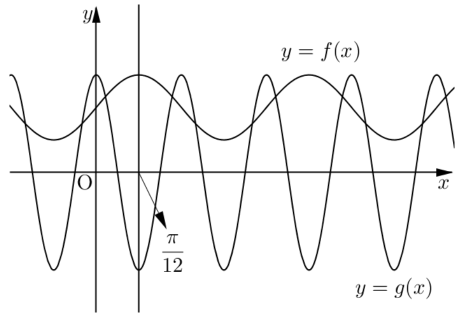
사인함수와 코사인함수의 그래프는 최댓값과 최솟값을 갖는 점을 기준으로 선대칭입니다.
따라서 그림과 같이 사인함수와 코사인함수의 그래프와 직선 $y=a$와의 교점 또한 항상 선대칭으로 발생합니다.



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 모든 교점이
곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=a$의 교점이 되려면
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 대칭축이 일치해야 합니다.

함수 $f(x)$는 $x>0$일 때, $x=\dfrac{\pi}{2k}$에서 가장 처음으로 최댓값을 가지므로 직선 $x=\dfrac{\pi}{2k}$는 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 x좌표가 가장 작은 대칭축입니다.
또한, $f(0)<g(0)$이고 $f\left(\dfrac{\pi}{2k}\right)>g\left(\dfrac{\pi}{2k}\right)$이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{2k}\right)$에서 한 개의 교점을 갖습니다. 따라서 직선 $x=\dfrac{\pi}{2k}$를 기준으로 생각합니다.

함수 $g(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{12}$에서 최솟값을 가지므로 직선 $x=\dfrac{\pi}{12}$는 함수 $g(x)$의 대칭축입니다.
즉, $\dfrac{\pi}{2k}=\dfrac{\pi}{12}$일 때, 다음 그림과 같이 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 문제의 조건을 만족시킵니다. 이때 $k=6$입니다.



곡선 $y=g(x)$의 대칭축의 x좌표는 공차가 $\dfrac{\pi}{12}$인 등차수열을 이룬다는 것을 알 수 있습니다.
따라서 같은 방법으로
함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $x=\dfrac{\pi}{6}$에 대하여 대칭이므로
$\dfrac{\pi}{2k}=\dfrac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ k=3$
함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $x=\dfrac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로
$\dfrac{\pi}{2k}=\dfrac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ k=2$
함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로
$\dfrac{\pi}{2k}=\dfrac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ k=1$
따라서 문제의 조건을 만족시키는 자연수 k는 $1, 2, 3, 6$이고
그 개수는 4입니다.

정답: ②

Supplementary Problem

1. [2016년 4월 가26]
x에 대한 방정식 $\left|\cos x+\dfrac{1}{4}\right|=k$가 서로 다른 3개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값을 α라 할 때, 40α의 값을 구하시오. (단, $0\le x<2\pi$) [4점]

(정답) 30

2. [2019년 3월 가26]
$0 \le x \le \pi$일 때, 2 이상의 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y = \sin x$와 $y = \sin(nx)$의 교점의 개수를 a_n이라 하자. $a_3 + a_5$의 값을 구하시오. [4점]

(정답) 9

3. [2020년 3월 가28]
$0 < a < \frac{4}{7}$인 실수 a와 유리수 b에 대하여 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$에서 정의된 함수 $f(x) = 2\sin(ax) + b$가 있다. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7\pi}{2}, 0\right)$을 지날 때, $30(a+b)$의 값을 구하시오.

(정답) 40

Problem #26

26. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	d	1

Y	11	21	31	41	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	c	d	1

$\mathrm{E}(X) = 2$, $\mathrm{E}(X^2) = 5$일 때, $\mathrm{E}(Y) + \mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 이산확률변수의 확률분포
(난이도) $2/5$

"이산확률변수의 성질을 이용하여 쉽게 해결할 수 있는 문제입니다."

Solution

주어진 확률분포표로부터 $Y = 10X + 1$임을 알 수 있습니다.
$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 = 5 - 4 = 1$
이므로 확률변수의 성질에 의하여

$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(10X+1) = 10\mathrm{E}(X) + 1 = 21$
$\mathrm{V}(Y) = \mathrm{V}(10X+1) = 10^2\mathrm{V}(X) = 100$
$\therefore\ \mathrm{E}(Y) + \mathrm{V}(Y) = 21 + 100 = 121$

정답: 121

Supplementary Problem

1. [2015년 10월 나08]
확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	k	$2k$	$3k$	1

$\mathrm{E}(6X+1)$의 값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

(정답) ⑤

2. [2018학년도 수능 나17]
확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0.121	0.221	0.321	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$\frac{2}{3}$	1

다음은 $\mathrm{E}(X)=0.271$일 때, $\mathrm{V}(X)$를 구하는 과정이다.

> $Y=10X-2.21$이라 하자.
>
> 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.
>
> | Y | -1 | 0 | 1 | 합계 |
> |---|---|---|---|---|
> | $\mathrm{P}(Y=y)$ | a | b | $\frac{2}{3}$ | 1 |
>
> $\mathrm{E}(Y)=10\mathrm{E}(X)-2.21=0.5$이므로
>
> $a=\boxed{\text{(가)}}$, $b=\boxed{\text{(나)}}$
>
> 이고 $\mathrm{V}(Y)=\frac{7}{12}$이다.
>
> 한편, $Y=10X-2.21$이므로 $\mathrm{V(Y)}=\boxed{\text{(다)}}\times\mathrm{V(X)}$
> 이다.
>
> 따라서 $\mathrm{V}(X)=\dfrac{1}{\boxed{\text{(다)}}}\times\dfrac{7}{12}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, pqr의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{13}{9}$ ② $\frac{16}{9}$ ③ $\frac{19}{9}$ ④ $\frac{22}{9}$ ⑤ $\frac{25}{9}$

(정답) ⑤

Problem #27

27. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+3}-S_n=13\times3^{n-1}$$

일 때, a_4의 값을 구하시오. [4점]

commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 등비수열, 수열의 합과 일반항 사이의 관계
(난이도) $2/5$

"수열의 합과 일반항 사이의 관계와 등비수열의 성질(정의)를 이용하는 기초적인 교과 문제입니다."

Solution

$S_{n+3}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$
에서
$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13\times3^{n-1}$
$a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}=13\times3^{n}$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$\frac{a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}}{a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}}=r=\frac{13\times3^n}{13\times3^{n-1}}=3$$

따라서

$$\begin{aligned}a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}&=a_{n+1}+3a_{n+1}+9a_{n+1}\\&=13\times a_{n+1}=13\times3^{n-1}\end{aligned}$$

$\therefore\ a_{n+1}=3^{n-1},\ a_4=3^{3-1}=9$

정답: 9

Supplementary Problem

1. [2014년 10월 가26]
수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 양수이고 공비가 1보다 큰 등비수열이다. $a_3a_5=a_1$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}a_k$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. [4점]

(정답) 13

2. [2009년 9월 가나14]
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 k에 대하여

$$b_{2k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{a_1+a_3+\ \dots\ +a_{2k-1}}$$

$$b_{2k} = 2^{a_2+a_4+\ \dots\ +a_{2k}}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고,

$$b_1 \times b_2 \times b_3 \times \cdots \times b_{10} = 8$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$의 공차는? [4점]

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

(정답) ③

3. [2014년 10월 가26]
수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 양수이고 공비가 1보다 큰 등비수열이다. $a_3a_5 = a_1$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n}a_k$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. [4점]

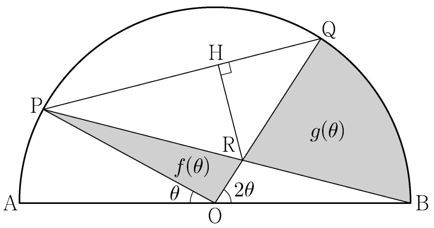
(정답) 13

Problem #28

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle\mathrm{POA} = \theta$, $\angle\mathrm{QOB} = 2\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 PB, OQ의 교점을 R라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POR의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 삼각함수의 활용
[미적분] 삼각함수의 극한
(난이도) $4/5$

"사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 각 선분의 길이를 일일이 구하여 계산해야 하는 문제입니다. 기존에 주변 도형을 이용하여 용이하게 계산했던 문제들과 달리 이 문제는 직접 모두 계산해야 하는 약간의 계산력을 요구하는 문제입니다."

Solution

삼각형 OPR에서 $\angle\mathrm{POR} = \pi - 3\theta$이고,

$\angle\mathrm{OPB} = \angle\mathrm{OBP} = \frac{\theta}{2}$이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\sin(\angle\mathrm{POR})} = \frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin(\angle\mathrm{OPR})} \Rightarrow \overline{\mathrm{PR}} = \frac{\sin 3\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \times \overline{\mathrm{OR}} \ \cdots \ ①$$

같은 방법으로 삼각형 OBR에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BR}}}{\sin(\angle\mathrm{BOR})} = \frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin(\angle\mathrm{OBR})} \Rightarrow \overline{\mathrm{BR}} = \frac{\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \times \overline{\mathrm{OR}} \ \cdots \ ②$$

①, ②에서 $\overline{\mathrm{PR}} : \overline{\mathrm{BR}} = \sin 3\theta : \sin 2\theta \ \cdots$ ③

삼각형 OBP에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BP}^2=\overline{OB}^2+\overline{OP}^2-2\times\overline{OB}\times\overline{OP}\times\cos(\angle BOP)$$
$$=2-2\cos(\pi-\theta)$$
$$=2+2\cos\theta$$

이므로 $\overline{BP}=\sqrt{2+2\cos\theta}$ 이다.

③에서

$$\overline{PR}=\frac{\sin3\theta}{\sin3\theta+\sin2\theta}\times\overline{BP}=\frac{\sin3\theta}{\sin3\theta+\sin2\theta}\times\sqrt{2+2\cos\theta}$$

이므로

$$\therefore\ f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{PR}\times\sin(\angle OPR)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin3\theta}{\sin3\theta+\sin2\theta}\times\sqrt{2+2\cos\theta}\times\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\overline{BR}=\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta+\sin2\theta}\times\overline{BP}=\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta+\sin2\theta}\times\sqrt{2+2\cos\theta}$$

이므로

$$\triangle OBR=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{BR}\times\sin(\angle OBR)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta+\sin2\theta}\times\sqrt{2+2\cos\theta}\times\sin\frac{\theta}{2}$$

이고, 부채꼴 OBQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{OQ}\times\angle BOQ=\theta$$

이므로

$$\therefore\ g(\theta)=\triangledown OBQ-\triangle OBR$$
$$=\theta-\frac{1}{2}\times\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta+\sin2\theta}\times\sqrt{2+2\cos\theta}\times\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ f(\theta)+g(\theta)=\theta+\frac{1}{2}\times\frac{\sin3\theta-\sin2\theta}{\sin3\theta+\sin2\theta}\times\sqrt{2+2\cos\theta}\times\sin\frac{\theta}{2}$$

한편, 중심각과 원주각의 관계에서

$\angle RPQ=\frac{1}{2}\angle BOQ=\theta$ 이므로

$$\therefore\ \overline{RH}=\overline{PR}\sin(\angle RPQ)$$
$$=\frac{\sin3\theta}{\sin3\theta+\sin2\theta}\times\sqrt{2+2\cos\theta}\times\sin\theta$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{RH}}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta+\frac{1}{2}\times\frac{\sin3\theta-\sin2\theta}{\sin3\theta+\sin2\theta}\times\sqrt{2+2\cos\theta}\times\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\sin3\theta}{\sin3\theta+\sin2\theta}\times\sqrt{2+2\cos\theta}\times\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1+\frac{1}{2}\times\dfrac{\frac{\sin3\theta}{\theta}-\frac{\sin2\theta}{\theta}}{\frac{\sin3\theta}{\theta}+\frac{\sin2\theta}{\theta}}\times\sqrt{2+2\cos\theta}\times\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}}{\dfrac{\frac{\sin3\theta}{\theta}}{\frac{\sin3\theta}{\theta}+\frac{\sin2\theta}{\theta}}\times\sqrt{2+2\cos\theta}\times\dfrac{\sin\theta}{\theta}}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{2}\times\frac{3-2}{3+2}\times2\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{3+2}\times2\times1}=\frac{11}{12}$$

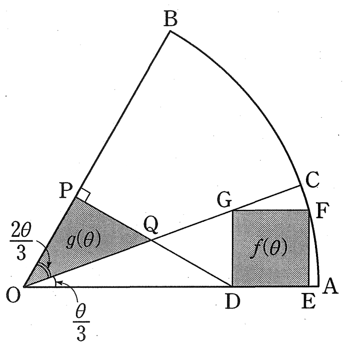
$$\therefore\ p+q=11+12=23$$

정답: 23

Supplementary Problem

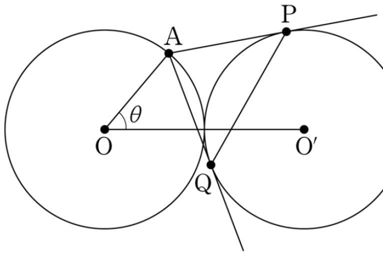
1. [2017년 6월 가28]

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 삼등분점 중 점 A에 가까운 점을 C라 하자. 변 DE가 선분 OA 위에 있고, 꼭짓점 G, F가 각각 선분 OC, 호 AC 위에 있는 정사각형 DEFG의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 점 D에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 P, 선분 DP와 선분 OC가 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OQP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}=k$일 때, $60k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고, $\overline{OD}<\overline{OE}$이다.) [4점]



(정답) 20

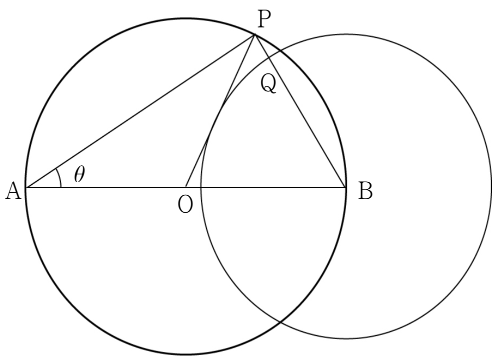
2. [2013년 6월 가21]
그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1인 두 원 O, O′이 외접하고 있다. 원 O위의 점 A에서 원 O′에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하자. $\angle AOO' = \theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{PQ}}{\theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



① 2 ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

(정답) ③

3. [2013년 7월 가21]
그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 점 O인 원 C_1이 있다. 원 C_1 위의 점 P에 대하여 $\angle PAB = \theta$라 하고, 선분 OP에 접하고 중심이 점 B인 원 C_2를 그린다. 원 C_2와 선분 BP의 교점을 점 Q라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{PQ}}{\theta^3}$의 값은? $\left(\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$ [4점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

(정답) ③

Problem #29

29. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 중복조합
(난이도) $4/5$

“효율적인 케이스 분류가 중요한 문제입니다. 이 또한 경우를 나누어 생각해야 하지만, 그보다는 케이스 분류에 대한 발상 자체가 포인트인 문제라고 할 수 있습니다.”

Solution

각 상자에 공이 2개 이상 들어가는 경우를, 흰 공이 각 상자에 들어가는 개수를 기준으로 나누어 생각합니다.

(1) 흰 공이 각 상자에 들어가는 개수가 $0, 0, 4$인 경우
흰 공을 각 상자에 넣는 방법의 수는 ${}_3C_1 = 3$
검은 공은 흰 공이 들어가지 않은 상자에 각각 2개 이상씩 들어가야 하므로 검은 공을 각 상자에 넣는 방법의 수는
$${}_3H_{6-4} = {}_4C_2 = 6$$
따라서 이때 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는
$$3 \times 6 = 18$$

(2) 흰 공이 각 상자에 들어가는 개수가 $0, 1, 3$인 경우
흰 공을 각 상자에 넣는 방법의 수는 $3! = 6$
검은 공은 흰 공이 들어가지 않은 상자에 2개 이상, 흰 공이 1개만 들어간 상자에 1개 이상 들어가야 하므로 검은 공을 각 상자에 넣는 방법의 수는
$${}_3H_{6-3} = {}_5C_2 = 10$$
따라서 이때 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는
$$6 \times 10 = 60$$

(3) 흰 공이 각 상자에 들어가는 개수가 $0, 2, 2$인 경우
흰 공을 각 상자에 넣는 방법의 수는 ${}_3C_1 = 3$
검은 공은 흰 공이 들어가지 않은 상자에 2개 이상 들어가야 하므로 검은 공을 각 상자에 넣는 방법의 수는
$${}_3H_{6-2} = {}_6C_2 = 15$$
따라서 이때 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는
$$3 \times 15 = 45$$

(4) 흰 공이 각 상자에 들어가는 개수가 $1, 1, 2$인 경우
흰 공을 각 상자에 넣는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$
검은 공은 흰 공이 1개 들어간 상자에 각각 1개 이상씩 들어가야 하므로 검은 공을 각 상자에 넣는 방법의 수는

$$ {}_3\mathrm{H}_{6-2} = {}_6\mathrm{C}_2 = 15 $$

따라서 이때 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$ 3 \times 15 = 45 $$

(1)~(2)에서 문제의 조건에 맞게 공을 상자에 넣는 방법의 수는 $18 + 60 + 45 + 45 = 168$

정답: 168

Supplementary Problem

1. [2020년 6월 가29]
검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 4자루, 빨간색 볼펜 4자루가 있다. 이 9자루의 볼펜 중에서 5자루를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

(정답) 114

2. [2018년 3월 가29]
사과, 배, 귤 세 종류의 과일이 각각 2개씩 있다. 이 6개의 과일 중 4개를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 과일은 서로 구별하지 않고, 과일을 한 개도 받지 못하는 학생은 없다.) [4점]

(정답) 51

3. [2014년 6월 가20]
다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? [4점]

(가) $a+b+c=6$
(나) 좌표평면에서 세 점 $(1, a)$, $(2, b)$, $(3, c)$가 한 직선 위에 있지 않다.

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

(정답) ⑤

Problem #30

30. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
>
> $$-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$$
>
> 이 성립한다.

$\left|M \times m^3\right| = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

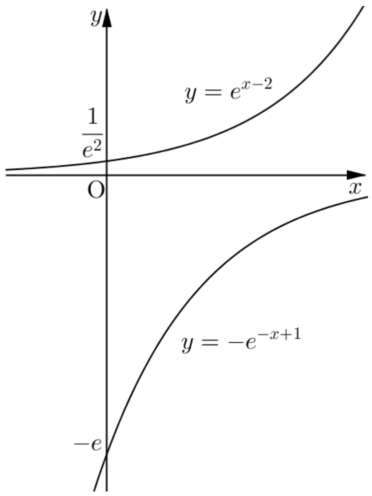
commentary

(관련 교과 내용)
[미적분] 도함수의 활용 - 접선의 방정식, 부등식
(난이도) $4/5$

"도함수를 부등식에 활용하는 전형적인 문제이나, 경우를 나누어 생각해야 하는 까다로움이 있습니다. 특히, ab의 값이 공통접선과 관련있음을 발견해야 합니다."

Solution

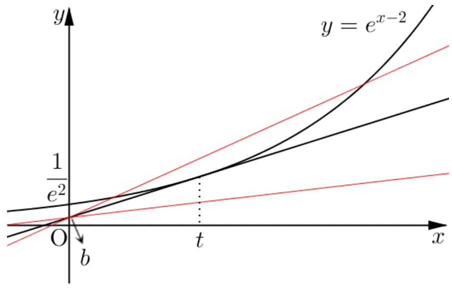
두 곡선 $y=-e^{-x+1}$, $y=e^{x-2}$를 좌표평면에 나타내면 그림과 같습니다.



즉, 자명히 $-e \le b \le \dfrac{1}{e^2}$임을 알 수 있습니다.

ab의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제이므로 $b>0$일 때와 $b<0$일 때로 나누어 생각합니다.

(1) $b>0$인 경우
이 경우 문제의 부등식을 만족시키려면 $a>0$이어야 하므로 b의 값을 고정하고, 그에 따라 문제의 조건을 만족시키는 a의 값이 가장 클 때 ab의 값이 가장 큽니다.
그러한 경우는 그림과 같이 직선 $y=ax+b$가 $y=e^{x-2}$에 접할 때입니다.



그림과 같이 직선 $y=ax+b$가 곡선 $y=e^{x-2}$에 접할 때,
그 접점의 x좌표를 t라고 하면
두 점 $(0,\,b)$와 $(t,\,e^{t-2})$를 이은 직선의 기울기가 점 $(t,\,e^{t-2})$에서 곡선 $y=e^{x-2}$에 그은 접선의 기울기와 같으므로

$$\frac{e^{t-2}-b}{t-0}=e^{t-2} \;\Rightarrow\; b=(1-t)e^{t-2}$$

이때 $a=e^{t-2}$이므로
$ab=(1-t)e^{t-2}\times e^{t-2}=(1-t)e^{2t-4}$

$g(t)=(1-t)e^{2t-4}$라 하면
$g'(t)=-e^{2t-4}+2(1-t)e^{2t-4}=(-2t+1)e^{2t-4}$
이므로 이를 이용하여 함수 $g(t)$의 증감표를 그리면 그림과 같습니다.

t	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e^{-3}$	$\searrow$

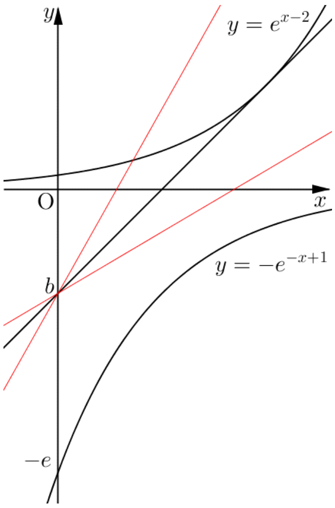
함수 $g(t)$는 $t=\dfrac{1}{2}$에서 극대이고, 이는 유일한 극점이므로

함수 $g(t)$는 $t=\dfrac{1}{2}$에서 최댓값을 갖습니다.

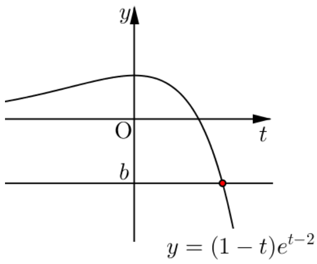
$$\therefore\; M=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-3}$$

(2) $b<0$인 경우
이 경우에도 문제의 부등식을 만족시키려면 $a>0$이어야 하고, b의 값을 고정하고, 그에 따라 문제의 조건을 만족시키는 a의 값이 가장 클 때 ab의 값이 작습니다.

그러한 경우는 그림과 같이 직선 $y=ax+b$가 $y=e^{x-2}$에 접할 때입니다.



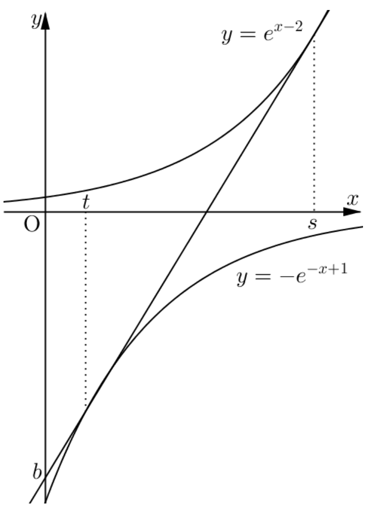
이때 (1)에서 $b=(1-t)e^{t-2}$이고, 오른쪽 그림에서 b의 값이 작을수록 t의 값이 커지므로 $ab=(1-t)e^{2t-4}$의 값 또한 작아집니다.



따라서 문제의 조건을 만족시키면서 b의 값이 가장 작을 때, ab의 값이 최솟값을 갖습니다.

이때 문제의 조건을 만족시키면서 b의 값이 가장 작은 경우는 직선 $y=ax+b$가 두 곡선 $y=-e^{-x+1}$, $y=e^{x-2}$에 동시에 접하거나 $b=-e$인 경우입니다.

따라서 직선 $y=ax+b$가 두 곡선 $y=-e^{-x+1}$, $y=e^{x-2}$에 동시에 접할 때, b의 값이 $-e$보다 큰지 작은지 확인하면 됩니다.



직선 $y=ax+b$가 두 곡선 $y=-e^{-x+1}$, $y=e^{x-2}$에 동시에 접할 때, 두 접점을 x좌표를 각각 t, s라고 하면,

$$\frac{e^{s-2}+e^{-t+1}}{s-t}=e^{-t+1}=e^{s-2}$$

이므로

$e^{-t+1}=e^{s-2} \Rightarrow -t+1=s-2 \Rightarrow s=-t+3$

$\frac{e^{s-2}+e^{-t+1}}{s-t}=e^{-t+1} \Rightarrow \frac{2e^{-t+1}}{-2t+3}=e^{-t+1}$

$\Rightarrow -2t+3=2,\ t=\frac{1}{2}$

이때 $t=\frac{1}{2}>0$이므로 $b>-e$임을 확인할 수 있습니다.

$\therefore\ a=e^{-t+1}=e^{\frac{1}{2}}$

(1)과 같은 방법으로

$\frac{-e^{-t+1}-b}{t-0}=e^{-t+1} \Rightarrow b=-(t+1)e^{-t+1}=-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$

$\therefore\ m=e^{\frac{1}{2}}\times\left(-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}\right)=-\frac{3}{2}e$

(1), (2)에서

$|M\times m^3|=\frac{1}{2}e^{-3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^3e^3=\frac{27}{16}$

$\therefore\ p+q=43$

정답: 43

Supplementary Problem

1. [2018년 대구11월 가21]

자연수 n에 대하여 함수 $f(x)=x^2e^{-x}$과 삼차함수 $g(x)=\frac{x^3-3x^2+4}{n+1}$가 있다. $x\geq n$에서 합성함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값을 a_n이라 할 때, $a_2+a_3+a_4$의 값은? [4점]

① $\frac{4e+12}{e^3}$ ② $\frac{8e^2+16}{e^4}$ ③ $\frac{8e+16}{e^3}$
④ $\frac{12e^2+16}{e^4}$ ⑤ $\frac{12e+16}{e^3}$

(정답) ②

2. [2016년 4월 가30]

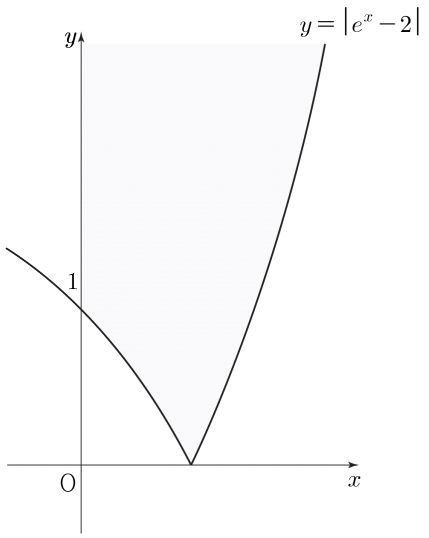
좌표평면에서 x, y에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq |e^x - 2| \end{cases}$$

가 나타내는 영역을 D라 하자. 양의 실수 t에 대하여 영역 D의 서로 다른 네 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 정사각형 A의 한 변의 길이는 t이다. (나) 정사각형 A의 한 변은 x축과 평행하다.

정사각형 A의 두 대각선의 교점의 y좌표의 최솟값을 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)+f'(\ln 5)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



(정답) 71

3. [2017년 경남10월 가21]

함수 $f(x)=a(\ln x)^3\ (a \neq 0)$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} |f(x)| & (x>0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$의 그래프에 기울기가 2인 서로 다른 접선을 3개만 그을 수 있을 때, $g(e)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{e^2}{12}$ ② $\dfrac{e^2}{6}$ ③ $\dfrac{e^2}{4}$ ④ $\dfrac{e^2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5e^2}{12}$

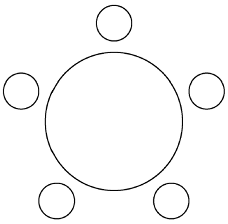
(정답) ②

‘나’ 형

Problem #14

14. 다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

① 180 ② 200 ③ 220 ④ 240 ⑤ 260



commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 원순열
(난이도) $1/5$

"‘원탁에 이웃하게 앉는 상황’을 이용한 전형적인 원순열 기본 문제입니다."

Solution

8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하는 방법의 수는 A, B를 제외한 6명 중에서 3명을 선택하는 방법의 수와 같으므로

$${}_6\mathrm{C}_3 = 20$$

5명의 학생 모두를 원탁에 둘러앉게 할 때, A, B가 이웃하게 되는 경우의 수는

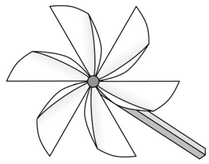
$$2! \times (4-1)! = 12$$

따라서 구하는 경우의 수는 $20 \times 12 = 240$

정답: ④

Supplementary Problem

1. [2012년 5월 가06]
빨간색과 파란색을 포함한 서로 다른 6가지의 색을 모두 사용하여, 날개가 6개인 바람개비의 각 날개에 색칠하려고 한다. 빨간색과 파란색을 서로 맞은 편의 날개에 칠하는 경우의 수는? (단, 각 날개에는 한 가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

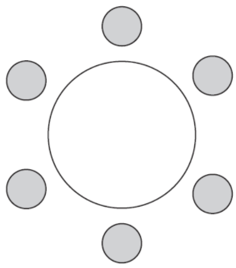


① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

(정답) ③

2. [2018년 전북5월 나15]
그림과 같이 일정한 간격으로 6개의 의자가 놓인 원탁에 남학생 4명과 여학생 2명이 둘러앉으려고 한다. 남학생 중 2명은 서로 마주보고 2명은 서로 마주보지 않게 앉는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

① 96 ② 108 ③ 120 ④ 132 ⑤ 144

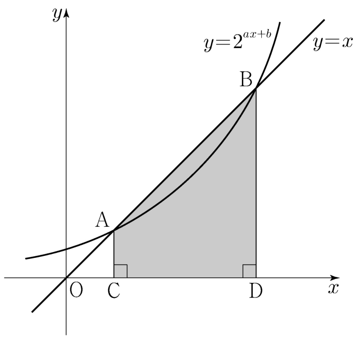


(정답) ①

Problem #15

15. 곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\text{AB}}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 지수함수의 그래프
(난이도) $2/5$

"문제에서 주어진 상황을 수식으로 잘 옮겨적을 수만 있다면 어렵지 않게 풀 수 있는 문제입니다."

Solution

$\text{C}(\alpha, 0)$, $\text{D}(\beta, 0)$이라 하면
직선 $y=x$는 기울기가 1인 직선이므로 문제의 조건에서
$\overline{\text{AB}}=\sqrt{2}\,\overline{\text{CD}} \Rightarrow \overline{\text{CD}}=6$
$\therefore\ \beta=\alpha+6$ ⋯ ①

두 점 A, B는 $y=x$ 위의 점이므로 ①에서
$\text{A}(\alpha, \alpha)$, $\text{B}(\alpha+6, \alpha+6)$
이고, 사각형 ACDB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{\text{AC}}+\overline{\text{BD}})\times\overline{\text{CD}}=\frac{1}{2}\times(2\alpha+6)\times6=6(\alpha+3)$

$6(\alpha+3)=30$에서 $\alpha=2$
①에서 $\beta=8$

두 점 A, B는 곡선 $y=2^{ax+b}$ 위의 점이므로
$2=2^{2a+b}$, $8=2^{8a+b}$

$\frac{2^{8a+b}}{2^{2a+b}}=2^{6a}=\frac{8}{2}=4$에서 $a=\frac{1}{3}$

$2^{2a+b}=2^{\frac{2}{3}+b}=2$에서 $b=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{2}{3}$

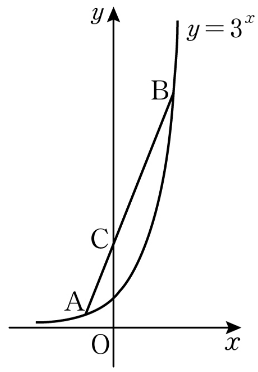
정답: ④

Supplementary Problem

1. [2015년 3월 나10]

지수함수 $y=3^x$의 그래프 위의 한 점 A의 y좌표가 $\frac{1}{3}$이다.
이 그래프 위의 한 점 B에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 C가 y축 위에 있을 때, 점 B의 y좌표는? [3점]

① 3 ② $3\sqrt[3]{3}$ ③ $3\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt[3]{9}$ ⑤ 9



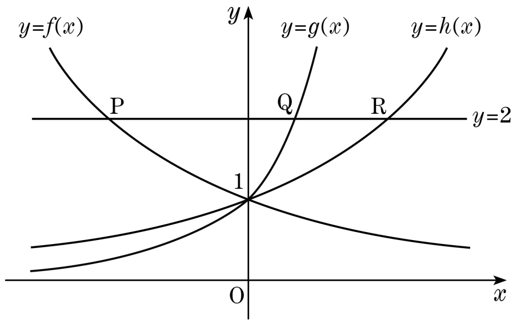
(정답) ⑤

2. [2014년 3월 나10]

세 지수함수

$$f(x)=a^{-x},\ g(x)=b^{x},\ h(x)=a^{x}\ \ (1<a<b)$$

에 대하여 직선 $y=2$가 세 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=2:1$이고 $h(2)=2$일 때, $g(4)$의 값은? [3점]

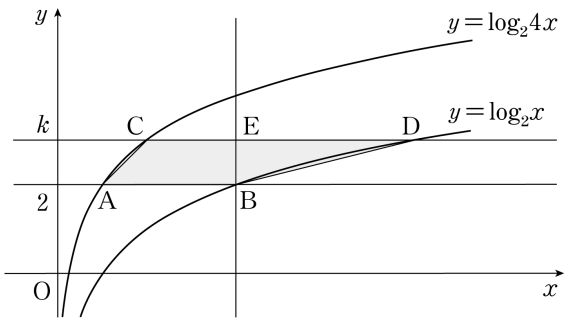


① 16 ② $16\sqrt{2}$ ③ 32 ④ $32\sqrt{2}$ ⑤ 64

(정답) ⑤

3. [2019년 3월 가27]

그림과 같이 직선 $y=2$가 두 곡선 $y=\log_2 4x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k\ (k>2)$가 두 곡선 $y=\log_2 4x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 점 B를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 CD와 만나는 점을 E라 하면 점 E는 선분 CD를 $1:2$로 내분한다. 사각형 ABDC의 넓이를 S라 할 때, $12S$의 값을 구하시오. [4점]



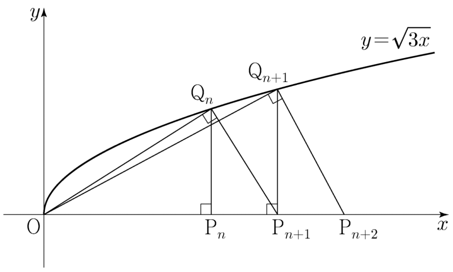
(정답) 54

Problem #16

16. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

- 선분 OP_n과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$이 서로 수직이다.
- 선분 OQ_n과 선분 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1, 0)$일 때, 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하자.
$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OP}_n}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{OP}_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $(a_n, \sqrt{3a_n})$이므로

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\boxed{(가)}$$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\times\left(\boxed{(나)}\right)\times\sqrt{9n-6}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은? [4점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

commentary

(관련 교과 내용)
[(중)수학-2] 닮음
[수학I] 등차수열

(난이도) $2/5$

"등차수열을 이용한 문제의 해결 과정을 따라가기만 하면 어렵지 않게 해결할 수 있습니다."

Solution

(가): $\overline{\mathrm{OP}_n}=a_n$, $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\sqrt{3a_n}$이므로

$\overline{\mathrm{OP}_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$에서

$a_n:\sqrt{3a_n}=\sqrt{3a_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

$\Rightarrow a_n\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=3a_n$

$a_n>0$이므로 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=3$

$\therefore p=3$

(나): $a_{n+1}-a_n=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=3$이고, $a_1=1$이므로
수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 공차가 3인 등차수열입니다.

$\therefore a_n=3n-2$

$\Rightarrow \mathrm{P}_n(3n-2, 0)$, $\mathrm{Q}_n(\sqrt{9n-6})$

$$\therefore A_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$$
$$=\frac{1}{2}\times(3n+1)\times\sqrt{9n-6}$$

$\therefore f(n)=3n+1$

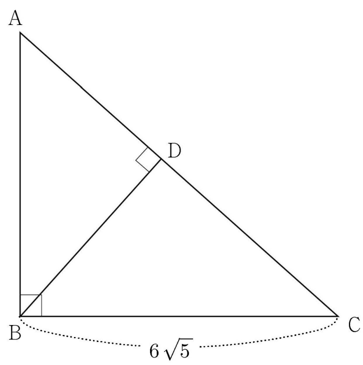
$\therefore p+f(8)=3+25=28$

정답: ⑤

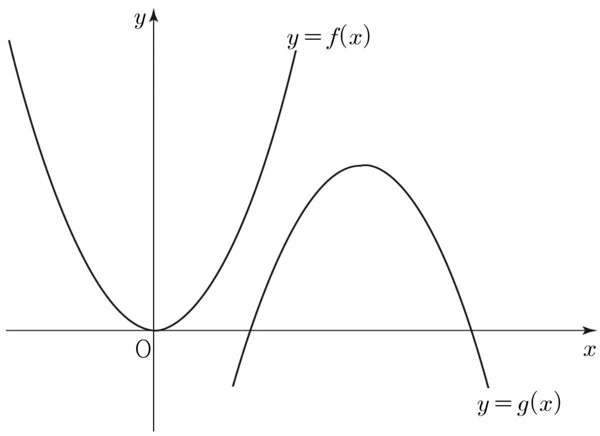
Supplementary Problem

1. [2010년 4월 가나25]
그림과 같이 $\angle\mathrm{B}=90^\circ$이고 선분 BC의 길이가 $6\sqrt{5}$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 빗변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 세 선분 AD, CD, AB의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 선분 AC의 길이를 구하시오. [4점]

(정답) 18



2. [2015년 7월 나13]
두 함수 $f(x)=x^2$과 $g(x)=-(x-3)^2+k$ $(k>0)$에 대하여 직선 $y=k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 두 점을 A, B라 하고, 함수 $y=g(x)$의 꼭짓점을 C라 하자.
세 점 A, B, C의 x좌표가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 k의 값은? (단, A는 제2사분면 위의 점이다.) [3점]



① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

(정답) ①

Problem #17

17. $\angle \mathrm{A}=90°$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\log_2 x$, $\overline{\mathrm{AC}}=\log_4 \frac{16}{x}$인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S(x)$가 $x=a$에서 최댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값은? (단, $1<x<16$) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 로그함수의 그래프
(난이도) $2/5$

"로그함수를 포함한 함수의 최대, 최소를 묻는 교과 내용 기반의 기본 문제입니다."

Solution

문제의 조건으로부터

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}} \\ &= \frac{1}{2}\times 2\log_2 x\times\log_4\frac{16}{x} \\ &= 2\log_4 x\times(2-\log_4 x) \\ &= -2(\log_4 x)^2+4\log_4 x = -2(\log_4 x-1)^2+2 \end{aligned}$$

이므로 이차함수의 성질에 의하여 함수 $S(x)$는 $\log_4 x=1$일 때 최댓값 2를 갖습니다.

$\therefore$ $a=4$, $M=2$, $a+M=6$

정답: ①

Supplementary Problem

1. [2006학년도 수능 나24]

정의역이 $\{x\,|\,1\le x\le 81\}$인 함수

$$y=(\log_3 x)(\log_{\frac{1}{3}} x)+2\log_3 x+10$$

의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. [4점]

(정답) 13

2. [2013년 3월 나18]
두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=x^2-6x+3,$$
$$g(x)=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$$

이라 하자. $1\le x\le 4$에서 함수 $(g\circ f)(x)$의 최댓값은 27, 최솟값은 m이다. m의 값은? [4점]

① $\frac{1}{27}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 3 ⑤ $3\sqrt{3}$

(정답) ④

3. [2019년 고2 6월 나27]
두 함수 $f(x)=\log_3 x+2$, $g(x)=3\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$가 있다.

$0\le x\le\frac{\pi}{6}$에서 정의된 합성함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. [4점]

(정답) 6

Problem #18

18. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$|f'(x)|\le 4x^2+5$$

를 만족시킨다. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$일 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

commentary

(관련 교과 내용)
[(고1)수학] 이차함수, 이차부등식
[수학II] 도함수의 활용
(난이도) $3/5$

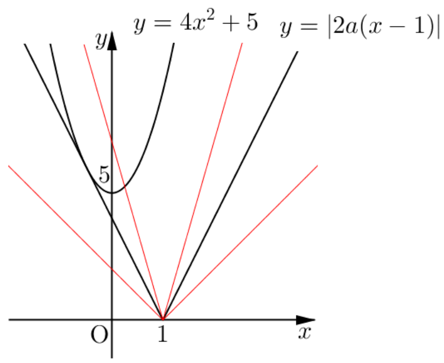
“도함수를 활용하여 부등식이 항상 성립할 조건을 구하는 문제로, 그래프를 그려 문제를 해결하는 것이 요구되는 문제입니다.”

Solution

함수 $y=f(x)$는 최고차항의 계수가 a이고, 그 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$이므로
$f(x)=a(x-1)^2+b$ (b는 상수)로 둘 수 있습니다.

따라서 $f'(x)=2a(x-1)$이고, 주어진 부등식은
$$|2a(x-1)|\le 4x^2+5$$
와 같습니다.

또한, 함수 $y=|2a(x-1)|$과 $y=4x^2+5$의 그래프를 각각 그리면 그림과 같고, a의 값이 최대가 되는 경우는 그림과 같이 꺾인 직선의 기울기가 가장 큰 경우이므로



함수 $y=|2a(x-1)|$의 그래프가 $y=4x^2+5$의 왼쪽 부분에 접하는 경우입니다.

즉, 방정식
$-2a(x-1)=4x^2+5$,
$4x^2+2ax-2a+5=0$
가 중근을 가져야 하므로 위 방정식을 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-4(-2a+5)=a^2+8a-20\leq 0$
$\Rightarrow$ $(a-2)(a+10)\leq 0$, $-10\leq a\leq 2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2입니다.

(참고) 미분을 이용하여 a의 최댓값을 구할 수도 있습니다.
방정식 $-2a(x-1)=4x^2+5$이 중근을 갖는 경우는
점 $(1,0)$에서 곡선 $y=4x^2+5$로 그은 접선의 기울기가
$-2a$인 경우입니다.

정답: ②

Supplementary Problem

1. [2017년 7월 나17]
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,4)$에서의 접선이 점 $(-1,1)$에서 이 곡선과 만날 때, $f'(3)$의 값은? [4점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

(정답) ①

2. [2012년 9월 나21]
좌표평면에서 두 함수

$$f(x)=6x^3-x, \quad g(x)=|x-a|$$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{11}{18}$ ② $-\frac{5}{9}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{7}{18}$

(정답) ④

3. [2017년 경남10월 나19]
자연수 n에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}(2-x)^3 & (x<1)\\ nx^2-nx+1 & (x\geq 1)\end{cases}$$

이라 하자. 정수 m과 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\geq m(x-1)+1$$

을 만족시키는 m의 개수를 $g(n)$이라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $f'(1)$의 값이 존재하지 않는다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극솟값이 존재한다.
ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} g(k)=105$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(정답) ③

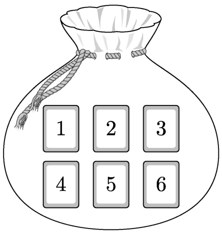
Problem #19

19. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 두 장의 카드를 동시에 꺼내어 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 두 번 반복한다. 첫 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 a_1, 큰 수를 a_2라 하고, 두 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 b_1, 큰 수를 b_2라 하자. 두 집합 A, B를

$$A=\{x \mid a_1 \le x \le a_2\},\quad B=\{x \mid b_1 \le x \le b_2\}$$

라 할 때, $A \cap B \ne \varnothing$일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{5}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{11}{15}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ $\frac{13}{15}$



commentary

(관련 교과 내용)
[(고1)수학] 순열과 조합
[확률과 통계] 확률
(난이도) $3/5$

“주어진 조건을 해석하고, 단순화시키는 것이 약간 까다로운 문제이고, 여사건을 이용해야 합니다. 해석만 잘 하면 그 다음은 단순한 편입니다만, 끝까지 긴장하지 않으면 실수할 포인트가 많은 문제입니다.”

Solution

구하는 사건에 대한 여사건은 $A \cap B = \varnothing$인 경우이고,
이러한 경우는 $a_2 < b_1$이거나 $a_1 > b_2$인 경우입니다.
이때 $a_2 < b_1$일 확률과 $a_1 > b_2$일 확률은 동일하므로
(집합 A, B를 바꿨다고 생각하면 됩니다.)
일반성을 잃지 않고, $a_2 < b_1$일 확률만 구하면 됩니다.

$a_2 < b_1$인 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있습니다.

(1) $a_2 = 2$인 경우
가능한 순서쌍 (a_1, a_2)의 개수는 1
가능한 순서쌍 (b_1, b_2)의 개수는 ${}_4C_2 = 6$
이고, 가능한 모든 경우의 수는 $({}_6C_2)^2 = 15^2$이므로
이 경우 $a_2 < b_1$일 확률은

$$\frac{1 \times 6}{15^2} = \frac{2}{75}$$

(2) $a_2 = 3$인 경우
가능한 순서쌍 (a_1, a_2)의 개수는 ${}_2C_1 = 2$
가능한 순서쌍 (b_1, b_2)의 개수는 ${}_3C_2 = 3$
이므로 이 경우 $a_2 < b_1$일 확률은

$$\frac{2 \times 3}{15^2} = \frac{2}{75}$$

(3) $a_3 = 4$인 경우
가능한 순서쌍 (a_1, a_2)의 개수는 ${}_3C_1 = 3$
가능한 순서쌍 (b_1, b_2)의 개수는 ${}_2C_2 = 1$
이므로 이 경우 $a_2 < b_1$일 확률은

$$\frac{3 \times 1}{15^2} = \frac{1}{75}$$

(1)~(3)에서 $a_2 < b_1$일 확률은

$$\frac{2}{75} + \frac{2}{75} + \frac{1}{75} = \frac{1}{15}$$

$a_2 < b_1$일 확률과 $a_1 > b_2$일 확률은 동일하므로

$a_1 > b_2$일 확률은 $\frac{1}{15}$

따라서 $A \cap B = \varnothing$일 확률은 $\frac{2}{15}$이고,

$A \cap B \ne \varnothing$일 확률은 $1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$

정답: ⑤

Supplementary Problem

1. [2019년 7월 가06]
한 개의 주사위를 5번 던져서 나오는 다섯 눈의 수의 곱이 짝수일 확률은? [3점]

① $\frac{23}{32}$　② $\frac{25}{32}$　③ $\frac{27}{32}$　④ $\frac{29}{32}$　⑤ $\frac{31}{32}$

(정답) ⑤

2. [2018년 경남10월 가28]

방정식 $a+b+c+d=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 (a, b, c, d)가

$$a \neq 2b \text{ 이고 } c \neq 2d$$

를 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(정답) 7

3. [2020년 6월 가19]

두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3\}$에 대하여 A에서 B로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

$f(1) \geq 2$이거나 함수 f의 치역은 B이다.

① $\frac{16}{27}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{20}{27}$ ④ $\frac{22}{27}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

(정답) ④

Problem #20

20. 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \geq g(x)$
(나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$
(다) $f(x)g(x)=(x^2+1)(3x-1)$

$\int_0^2 f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{23}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{29}{6}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

commentary

(관련 교과 내용)
[(고1)수학] 다항식
[수학II] 함수의 그래프, 정적분
(난이도) $4/5$

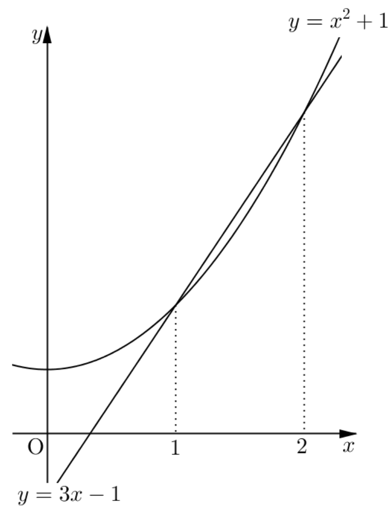
"해결하기 위해 상당한 수준의 직관이 요구되는 문제입니다. 합과 곱이 특수하게 주어진 두 연속함수를 보고, 한 함수의 식을 추론하는 낯선 형태의 문제입니다."

Solution

두 함수 $p(x)$, $q(x)$를 각각
$p(x)=x^2+1$, $q(x)=3x-1$이라고 하면 문제의 조건에서

$$f(x)+g(x)=p(x)+q(x),\ f(x)g(x)=p(x)q(x)$$

임을 알 수 있습니다. ⋯ (*)



또한,

$$p(x)=q(x) \iff (x-1)(x-2)=0$$

이므로 이를 이용해 두 함수 $p(x)$, $q(x)$의 그래프를 그리면 위의 그림과 같습니다.

즉, 닫힌구간 $[1, 2]$에서는 $q(x) \geq p(x)$이고,
구간 $(-\infty, 1]$과 $[2, \infty)$에서는 $p(x) \geq q(x)$입니다.

위의 사실과 (*), 그리고 문제의 조건 (가)에 착안하여 함수 $f(x)$, $g(x)$를 각각

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ 3x-1 & (1<x<2) \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 3x-1 & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ x^2+1 & (1<x<2) \end{cases}$$

로 두면 문제의 조건을 정확히 만족시킴을 알 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 (x^2+1)dx + \int_1^2 (3x-1)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 + \left[\frac{3}{2}x^2-x\right]_1^2 \\ &= \frac{4}{3}+4-\frac{1}{2}=\frac{29}{6}\end{aligned}$$

(다른 풀이) 위의 풀이가 출제 의도에 더 부합한 풀이라고 생각하지만, 문제의 조건을 만족시키는 연속함수가 반드시 저런 형태로 특정되는지는 설명되지 않습니다.

$f(x)+g(x)=x^2+3x$에서

$\{f(x)+g(x)\}^2=(x^2+3x)^2=x^4+6x^3+9x^2$

이므로

$$\begin{aligned}\{f(x)-g(x)\}^2 &= \{f(x)+g(x)\}^2-4f(x)g(x) \\ &= x^4+6x^3+9x^2-4(x^2+1)(3x-1) \\ &= x^4-6x^3+13x^2-12x+4 \\ &= (x-1)^2(x-2)^2\end{aligned}$$

조건 (가)에서

$f(x)-g(x) \geq 0$이므로

$f(x)-g(x)=|(x-1)(x-2)|$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \frac{1}{2}[\{f(x)+g(x)\}+\{f(x)-g(x)\}] \\ &= \frac{1}{2}(x^2+3x+|(x-1)(x-2)|)\end{aligned}$$

이는 실제로 본 풀이에서 구한 것과 동일합니다.

정답: ③

Supplementary Problem

1. [2020학년도 수능 나28]

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)\,dt=\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}\text{이다.}$$

(나) $\int_0^2 f(x)\,dx=5\int_{-1}^1 xf(x)\,dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(정답) 7

2. [2016년 7월 나20]

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=\int x\,g(x)dx, \quad \frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x^3+2x$$

를 만족시킬 때, $g(1)$의 값은? [4점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

(정답) ⑤

3. [2018년 9월 나21]

사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$ 에 대하여 $x \ge 0$ 에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$ 에서 $g(x)=c_1$ (c_1 은 상수)
(나) $1<x<5$ 에서 $g(x)$ 는 감소한다.
(다) $x>5$ 에서 $g(x)=c_2$ (c_2 는 상수)

$f(\sqrt{2})$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

(정답) ④

정답: ③

Problem #21

21. 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}2a_n+a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1})\\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1})\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 수열의 귀납적 정의
(난이도) $4/5$

“기준이 되는 항을 설정하고, 그 값에 따라 수열의 귀납적 정의에 올바르게 대입하여 값을 계산하는 문제입니다. 경우를 나누고 항을 설정하는 것이 까다로운 문제입니다.”

Solution

a_3 의 값과 a_6 의 값이 나와 있으므로 계산의 편의상 $a_2=p$ 라 두고 주어진 식에 대입하여 계산합니다.

(1) $p \le a_3=2$ 인 경우
주어진 수열의 귀납적 정의에서
$a_4=2a_2+a_3=2p+2$
여기서 a_3와 a_4의 대소는 p 의 값의 부호에 따라 달라집니다.

(i) $p<0$인 경우
$a_4<2=a_3$ 이므로
$a_5=a_3+a_4=2p+4$
$a_4<a_5$ 이므로
$a_6=2a_4+a_5=2(2p+2)+2p+4=6p+8$
즉, $6p+8=19$ 이므로 $p=\frac{11}{6}$
이는 가정에 모순입니다.

(ii) $p \ge 0$인 경우
$a_4 \ge 2=a_3$이므로
$a_5=2a_3+a_4=2p+6$
$a_4<a_5$ 이므로
$a_6=2a_4+a_5=2(2p+2)+2p+6=6p+10$

즉, $6p+10=19$이므로 $p=\frac{3}{2}$

$a_2=\frac{3}{2}$, $a_3=2$에서

$a_3=2a_1+a_2$라 하면

$2a_1=a_3-a_2=\frac{1}{2} \Rightarrow a_1=\frac{1}{4}$

이때 $a_1<a_2$이므로 주어진 귀납적 정의를 만족합니다.

$a_3=a_1+a_2$라 하면

$a_1=a_3-a_2=\frac{1}{2}$

이때 $a_1<a_2$이므로 주어진 귀납적 정의를 만족하지 않습니다.

따라서 $a_2\le 2$인 경우 $a_1=\frac{1}{4}$입니다.

(2) $p>a_3=2$인 경우

주어진 수열의 귀납적 정의에서

$a_4=a_2+a_3=p+2$

$p>2$이므로 $a_3<a_4$이고, 주어진 귀납적 정의에서

$a_5=2a_3+a_4=p+6$

$a_4<a_5$이므로

$a_6=2a_4+a_5=2(p+2)+p+6=3p+10$

즉, $3p+10=19$이므로 $p=3$

$a_2=3$, $a_3=2$에서

$a_3=2a_1+a_2$라 하면

$2a_1=a_3-a_2=-1 \Rightarrow a_1=-\frac{1}{2}$

이때 $a_1<a_2$이므로 주어진 귀납적 정의를 만족합니다.

$a_3=a_1+a_2$라 하면

$a_1=a_3-a_2=-1$

이때 $a_1<a_2$이므로 주어진 귀납적 정의를 만족하지 않습니다.

따라서 $a_2>2$인 경우 $a_1=-\frac{1}{2}$입니다.

(1), (2)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

정답: ②

Supplementary Problem

1. [2018년 3월 나26]

첫째항이 6인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2-a_n & (a_n\ge 0) \\ a_n+p & (a_n<0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_4=0$이 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 합을 구하시오. [4점]

(정답) 8

2. [2016년 6월 나20]

첫째항이 a인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+(-1)^n\times 2 & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n+1 & (n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15}=43$일 때, a의 값은? [4점]

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

(정답) ⑤

3. [2019년 10월 나29]

첫째항이 짝수인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (a_n \text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_5=5$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하시오. [4점]

(정답) 142

4. [2022수능 예비평가 15]

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

(가) $a_5=5$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-6 & (a_n \ge 0) \\ -2a_n+3 & (a_n<0) \end{cases}$$

이다.

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

(정답) ③

Problem #26

26. 방정식 $x^3-x^2-8x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때, 양수 k의 값을 구하시오. [4점]

commentary

(관련 교과 내용)
[수학II] 도함수의 활용 - 방정식
(난이도) $2/5$

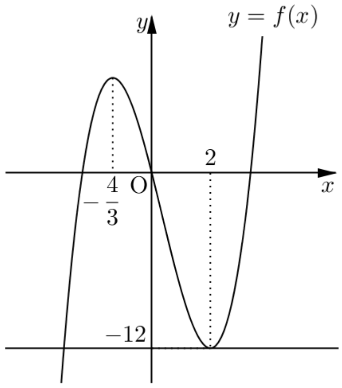
“도함수를 활용하여 방정식의 실근을 구하는 기본적인 교과 내용의 응용 문제입니다.”

Solution

주어진 방정식은 $x^3-x^2-8x=-k$와 같고, 이 방정식의 실근의 개수는 두 함수
$f(x)=x^3-x^2-8x$, $y=-k$의 그래프가 만나는 점의 개수와 같습니다.

$f'(x)=3x^2-2x-8=(3x+4)(x-2)$

에서 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{4}{3}$에서 극댓값을 갖고, $x=2$에서 극솟값 -12를 갖습니다.
이를 이용하여 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$를 나타내면 그림과 같습니다.



k는 양수이므로 두 함수 $f(x)=x^3-x^2-8x$, $y=-k$의 그래프가 두 점에서 만나는 경우는 위 그림과 같이 $-k=-12$인 경우입니다.

$\therefore\ k=12$

정답: 12

Supplementary Problem

1. [2019년 9월 나27]

곡선 $y=x^3-3x^2+2x-3$과 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱을 구하시오. [4점]

(정답) 21

2. [2017년 10월 나26]

함수 $y=x^3+2$의 그래프와 직선 $y=kx$가 만나는 교점의 개수를 $f(k)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{6} f(k)$의 값을 구하시오. [4점]

(정답) 13

3. [2019년 5월 나18]

두 함수

$$f(x)=x^4+x^2-(k+1)x+k$$

$$g(x)=2x^3+x^2-5x+3$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 근이 실수가 되도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

(정답) ③

Problem #27

27. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	d	1

Y	11	21	31	41	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	c	d	1

$\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{E}(X^2)=5$일 때, $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 이산확률변수의 확률분포
(난이도) $2/5$

"이산확률변수의 성질을 이용하여 쉽게 해결할 수 있는 문제입니다."

Solution

주어진 확률분포표로부터 $Y=10X+1$임을 알 수 있습니다.
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=5-4=1$
이므로 확률변수의 성질에 의하여

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(10X+1)=10\mathrm{E}(X)+1=21$
$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(10X+1)=10^2\mathrm{V}(X)=100$
$\therefore\ \mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)=21+100=121$

정답: 121

Supplementary Problem

1. [2015년 10월 나08]
확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	k	$2k$	$3k$	1

$\mathrm{E}(6X+1)$의 값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

(정답) ⑤

2. [2018학년도 수능 나17]
확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0.121	0.221	0.321	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$\frac{2}{3}$	1

다음은 $\mathrm{E}(X)=0.271$일 때, $\mathrm{V}(X)$를 구하는 과정이다.

$Y=10X-2.21$이라 하자.
확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	$\frac{2}{3}$	1

$\mathrm{E}(Y)=10\mathrm{E}(X)-2.21=0.5$이므로
$a=\boxed{(가)}$, $b=\boxed{(나)}$
이고 $\mathrm{V}(Y)=\frac{7}{12}$이다.
한편, $Y=10X-2.21$이므로 $\mathrm{V}(\mathrm{Y})=\boxed{(다)}\times\mathrm{V}(\mathrm{X})$
이다.
따라서 $\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\boxed{(다)}}\times\frac{7}{12}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, pqr의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{13}{9}$ ② $\frac{16}{9}$ ③ $\frac{19}{9}$ ④ $\frac{22}{9}$ ⑤ $\frac{25}{9}$

(정답) ⑤

Problem #28

28. 함수 $f(x)=-x^2-4x+a$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

가 닫힌구간 $[0,1]$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

commentary

(관련 교과 내용)
[수학II] 정적분, 적분과 미분의 관계
(난이도) $3/5$

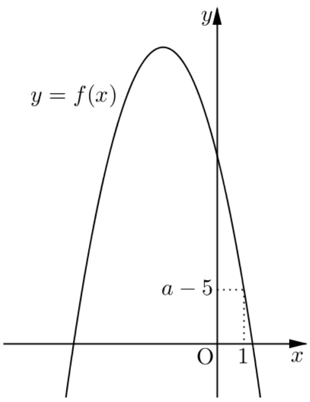
“정적분으로 정의된 함수를 적분과 미분의 관계를 이용하여 정확하게 해석할 수 있는지 묻는 문제입니다.”

Solution

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
적분과 미분의 관계에 의하여
함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고,
$g'(x)=f(x)$입니다.

함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0,1]$에서 증가하려면
닫힌구간 $[0,1]$에서 $g'(x)=f(x)\geq 0$이어야 합니다.

$f(x)=-(x+2)^2+a+4$에서
이차함수 $f(x)$의 그래프는 $x=-2$를 대칭축으로 가지고, 위로 볼록한 형태이므로 그림과 같이 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$에서 감소합니다.



따라서 닫힌구간 $[0,1]$에서 $f(x)\geq 0$이려면 그림과 같이 $f(1)=a-5\geq 0$이어야 합니다.
따라서 문제의 조건을 만족하는 실수 a의 최솟값은 5입니다.

정답: 5

Supplementary Problem

1. [2013학년도 수능 나21]
삼차함수 $f(x)=x^3-3x+a$에 대하여 함수 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수 a의 최솟값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

(정답) ②

2. [2016년 경남10월 나21]
최고차항의 계수가 양수이고, $f(1)=0$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_1^x f(t)\,dt$$

라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(2)=-6$
> (나) 방정식 $|g(x)|=-g(3)$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

$g(-1)$의 값은? [4점]

① -68 ② -66 ③ -64 ④ -62 ⑤ -60

(정답) ⑤

Problem #29

29. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 중복조합
(난이도) $4/5$

"효율적인 케이스 분류가 중요한 문제입니다. 이 또한 경우를 나누어 생각해야 하지만, 그보다는 케이스 분류에 대한 발상 자체가 포인트인 문제라고 할 수 있습니다."

Solution

각 상자에 공이 2개 이상 들어가는 경우를, 흰 공이 각 상자에 들어가는 개수를 기준으로 나누어 생각합니다.

(1) 흰 공이 각 상자에 들어가는 개수가 $0, 0, 4$인 경우
흰 공을 각 상자에 넣는 방법의 수는 ${}_3C_1 = 3$
검은 공은 흰 공이 들어가지 않은 상자에 각각 2개 이상씩 들어가야 하므로 검은 공을 각 상자에 넣는 방법의 수는
$${}_3H_{6-4} = {}_4C_2 = 6$$
따라서 이때 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는
$$3 \times 6 = 18$$

(2) 흰 공이 각 상자에 들어가는 개수가 $0, 1, 3$인 경우
흰 공을 각 상자에 넣는 방법의 수는 $3! = 6$
검은 공은 흰 공이 들어가지 않은 상자에 2개 이상, 흰 공이 1개만 들어간 상자에 1개 이상 들어가야 하므로 검은 공을 각 상자에 넣는 방법의 수는
$${}_3H_{6-3} = {}_5C_2 = 10$$
따라서 이때 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는
$$6 \times 10 = 60$$

(3) 흰 공이 각 상자에 들어가는 개수가 $0, 2, 2$인 경우
흰 공을 각 상자에 넣는 방법의 수는 ${}_3C_1 = 3$
검은 공은 흰 공이 들어가지 않은 상자에 2개 이상 들어가야 하므로 검은 공을 각 상자에 넣는 방법의 수는
$${}_3H_{6-2} = {}_6C_2 = 15$$
따라서 이때 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는
$$3 \times 15 = 45$$

(4) 흰 공이 각 상자에 들어가는 개수가 $1, 1, 2$인 경우
흰 공을 각 상자에 넣는 방법의 수는 ${}_3C_1 = 3$
검은 공은 흰 공이 1개 들어간 상자에 각각 1개 이상씩 들어가야 하므로 검은 공을 각 상자에 넣는 방법의 수는
$${}_3H_{6-2} = {}_6C_2 = 15$$
따라서 이때 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수는
$$3 \times 15 = 45$$

(1)~(2)에서 문제의 조건에 맞게 공을 상자에 넣는 방법의 수는 $18 + 60 + 45 + 45 = 168$

정답: 168

Supplementary Problem

1. [2020년 6월 가29]
검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 4자루, 빨간색 볼펜 4자루가 있다. 이 9자루의 볼펜 중에서 5자루를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

(정답) 114

2. [2018년 3월 가29]
사과, 배, 귤 세 종류의 과일이 각각 2개씩 있다. 이 6개의 과일 중 4개를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 과일은 서로 구별하지 않고, 과일을 한 개도 받지 못하는 학생은 없다.) [4점]

(정답) 51

3. [2014년 6월 가20]
다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수는? [4점]

(가) $a+b+c=6$
(나) 좌표평면에서 세 점 $(1,\ a)$, $(2,\ b)$, $(3,\ c)$ 가 한 직선 위에 있지 않다.

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

(정답) ⑤

Problem #30

30. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=f(3)=0$
(나) 집합 $\{x\,|\,x\geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점]

commentary

(관련 교과 내용)
[수학II] 미분계수, 도함수의 활용
(난이도) $4/5$

"절댓값 함수가 포함된 함수가 미분가능할 조건을 이해하고, 함수의 그래프를 작성하여 종합적으로 해결해야 하는 문제입니다. 이전의 30번 문항에 비해 쉽게 느껴지지만, 배울 점이 많은 문제이므로 다시 익히도록 합시다."

Solution

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여
함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 필요충분조건은
$f(a)=0$이고 $f'(a)\neq 0$인 것입니다. 이는

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq 0) \\ -f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$$

으로부터 어렵지 않게 얻어낼 수 있습니다.

한편, 조건 (가)에서
$f(1)=f(3)$이므로 롤의 정리에 의하여
$f'(c)=0$인 실수 c가 열린구간 $(1,3)$에 적어도 하나 존재합니다.
조건 (나)에서 위와 같은 c가 $x\geq 1$에서 유일하게 존재해야 하므로
$f(x)=p(x-1)(x-3)(x-q)$라 하면
$q<1$이어야 합니다. ⋯ ①

$f(x)=p(x-1)(x-3)(x-q)$에서
$f(a-x)=-p(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)$
이고, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면
$g(t)=0$인 모든 실수 t에 대하여 $g'(t)=0$이어야 하므로
다항식 $f(x)f(a-x)$는 $(x-t)^2$을 인수로 가져야 합니다.

따라서

$$\{q, 1, 3\} = \{a-q, a-1, a-3\}$$

이어야 합니다. 그런데
$q<1<3$이므로 $a-3<a-1<a-q$
이고, 이에 따라
$q=a-3,\ 1=a-1,\ 3=a-q$
이를 만족하는 $a,\ q$를 구하면 $a=2,\ q=-1$

$\therefore\ f(x)=p(x+1)(x-1)(x-3)$

$$\therefore\ \frac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)} = \frac{|f(4a)\times f(-3a)|}{3p\times f(4a)} = \frac{|315p\times 315p|}{3p\times 315p} = 105$$

정답: 105

Supplementary Problem

1. [2019년 6월 나18]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & (x<0) \\ f(x) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작을 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}$

ㄴ. $g(1)<\frac{3}{2}$

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0일 때, $g(2)=\frac{5}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

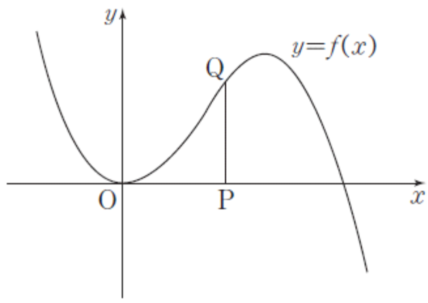
(정답) ⑤

2. [2017년 전북10월 나21]

양수 a에 대하여 점 $\mathrm{P}(a, 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 함수 $f(x)=-x^3+3x^2$의 그래프와 만나는 점을 Q라 할 때, $S(a)$를

$$S(a)=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PQ}}$$

로 정의하자.



〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, O는 원점이고, 두 점 P, Q가 일치하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=0$이다.)

[4점]

〈보 기〉

ㄱ. $S'(a)=1$을 만족시키는 a의 개수는 1이다.

ㄴ. 함수 $S(a)$가 극값을 갖는 a의 개수는 2이다.

ㄷ. 함수 $S(a)$는 $a=3$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(정답) ③

3. [2020학년도 수능 나20]

함수

$$f(x)=\begin{cases} -x & (x \le 0) \\ x-1 & (0 < x \le 2) \\ 2x-3 & (x > 2) \end{cases}$$

와 상수가 아닌 다항식 $p(x)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $p(0)=0$이다.

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(2)=0$이다.

ㄷ. 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어진다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(정답) ②

4. [2018년 대구11월 나29]

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x & (x < 3) \\ x^2-6x+10 & (x \ge 3) \end{cases}$$
$$g(x)=f(x-m)+n$$

이다. 함수 $f(x)g(x)$가 모든 실수에 대하여 미분가능할 때, 두 상수 m, n의 곱 mn의 값을 구하시오. (단, $m<0$)

[4점]

(정답) 30