기출의 파급효과 수학

https://atom.ac/books/7241
기출의 파급효과 수학 시리즈

https://cafe.naver.com/spreadeffect
파급의 기출효과 NAVER 카페

기출의 파급효과 수학은 기출로부터 얻을 수 있는 도구와 태도를 정리하고 체화하여 일관적으로 준킬러 이상 기출을 뚫어가는 교재입니다. 교재 내에 평가원분만 아니라 교육청, 사관학교, 경찰대 주요 기출 선별이 모두 되어 있습니다.

학습하시다 질문이 생기신다면 '파급의 기출효과' 카페에서 질문을 할 수 있습니다.
교재 인증을 하시면 질문 게시판을 이용하실 수 있습니다.

파급효과, 법사 님, 출기능수 님, 백건아 님 등등 **오르비 저자분들이 올리시는 학습자료를 받아보실 수 있습니다.**
위 저자 분들의 컨텐츠 질문 답변도 교재 인증 시 가능합니다.

이외에도 **검증된 우수한 컨설팅 팀 TWCG가 정리한 과거부터 현재까지 정시, 수시 입결을 확인할 수 있습니다.**
입시에 대한 질문은 가입하시기만 하면 TWCG 팀장 및 팀원분들께 하실 수 있습니다.

더 궁금하시다면 https://cafe.naver.com/spreadeffect/15에서 확인하시면 됩니다.

14:10 - 15:20 (70M)

제 2 교시

수학 영역(가 형)

5지선다형

1. $\sqrt[3]{2}\times 2^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

$2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2$

2. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

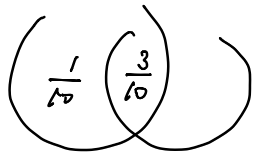
$\lim_{n\to\infty}\dfrac{8n+2}{2n+5}$

3. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5},\quad \mathrm{P}(B)=\frac{4}{5},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{9}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(B\,|\,A)$의 값은? [2점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$



4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$1-\cancel{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\cdots$

5. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 8$이고, X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

$$3\underbrace{\mathrm{P}(2 \le X \le 4)}_{4A} = 4\underbrace{\mathrm{P}(6 \le X \le 8)}_{3A}$$

일 때, $\mathrm{P}(2 \le X \le 6)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

$P(2 \le x \le 4) = P(4 \le X \le 6) = 4A$

$P(0 \le X \le 2) = P(6 \le x \le 8) = 3A$

$\therefore 14A = 1,\quad A = \frac{1}{14}$

$8A = \frac{4}{7}$

6. $\int_1^2 (x-1)e^{-x}\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e}-\frac{2}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}$ ③ $\frac{1}{e}$

④ $\frac{2}{e}-\frac{2}{e^2}$ ⑤ $\frac{2}{e}-\frac{1}{e^2}$

$\left[-xe^{-x}\right]_1^2 = \frac{1}{e} - \frac{2}{e^2}$

7. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 함수

$$x = \ln t + t, \quad y = -t^3 + 3t$$

에 대하여 $\frac{dy}{dx}$가 $t=a$에서 최댓값을 가질 때, a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{-3t^2+3}{\frac{1}{t}+1}\right)' = \left(\frac{-3t\cancel{(t+1)}(t-1)}{\cancel{(t+1)}}\right)'$$

$= -6t+3$

8. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n}=6$일 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은? [3점]

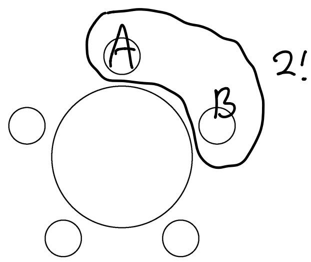
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$a_n = \frac{1}{6}\cdot 3^n$

$\therefore \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3$

9. 다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 180 ② 200 ③ 220 ④ 240 ⑤ 260



$_6C_3 \times 3! \times 2!$

$= 20 \cdot 12 = 240$

10. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=12$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1}\times n$$

을 만족시킨다. $a_k > a_1$인 자연수 k의 최솟값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$a_2 = -(12-1)$ $12 + a_2 = 1$

$a_3 = (11-2)$ $-11 + a_3 = -2$

$a_4 = -(9-3)$ $9 + a_4 = 3$

$a_5 = (6-4)$ $-6 + a_5 = -4$

$a_6 = -(2-5)$ $2 + a_6 = 5$

$a_7 = (-3-6) = -9$

$a_8 = (-9-7) = 16$

11. 1보다 큰 세 실수 a, b, c가

$$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{4} \quad = k$$

를 만족시킬 때, $\log_a b + \log_b c + \log_c a$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

$$\log_a b = \log_b c^{\frac{1}{2}} = \log_c a^{\frac{1}{4}} = k$$

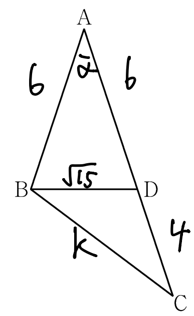
$$b = a^k, \quad c = b^{2k}, \quad a = c^{4k}$$

$$a = b^{\frac{1}{k}} = c^{4k}, \quad b = c^{4k^2} = c^{\frac{1}{2k}}$$

$$8k^3 = 1, \quad \boxed{k = \frac{1}{2}}, \quad 7k = \frac{7}{2}$$

12. $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB} = \overline{AD}$가 되도록 잡는다. $\overline{BD} = \sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이는? [3점]

① $\sqrt{37}$ ② $\sqrt{38}$ ③ $\sqrt{39}$ ④ $2\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{41}$

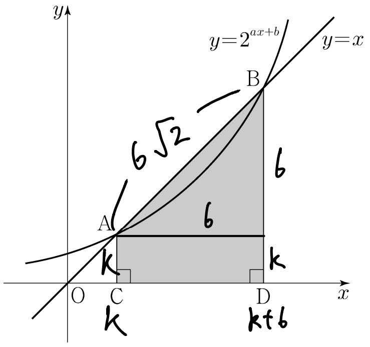


$$\cos\alpha = \frac{36+36-15}{2\cdot 6\cdot 6} = \frac{57}{72} = \frac{19}{24}$$

$$\therefore k^2 = 36 + 100 - 120\cdot\frac{19}{24} = 136 - 5\cdot 19 = 136 - 95 = 41$$

13. 곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



$6\cdot(k+3)=30$

$k+3=5,\ k=2$

$2a+b=1$ $a=b=\frac{1}{3}$

$2a+b+6a=3.$

14. 어느 지역 신생아의 출생 시 몸무게 X가 정규분포를 따르고

$$\mathrm{P}(X\geq 3.4)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(X\leq 3.9)+\mathrm{P}(Z\leq -1)=1$$

이다. 이 지역 신생아 중에서 임의추출한 25명의 출생 시 몸무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}\geq 3.55)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 몸무게의 단위는 kg이고, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668 ④ 0.1587 ⑤ 0.3413

$\frac{3.9-m}{\sigma}=1$

$\frac{3.4-m}{\sigma}=0$

$\boxed{m=3.4 \quad \sigma=\frac{1}{2}}$

$\frac{3.55-3.4}{\frac{1}{10}}=1.5$

15. 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sec x + \tan x}{a}\right)$$

의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\lim_{x \to -2} \frac{g(x)}{x+2} = b$일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $a > 0$) [4점]

① $\frac{e^2}{4}$ ② $\frac{e^2}{2}$ ③ e^2 ④ $2e^2$ ⑤ $4e^2$

$g(-2) = 0$. $f(0) = \ln\frac{1}{a} = -2$

$g'(-2) = \frac{1}{f'(0)} = b$

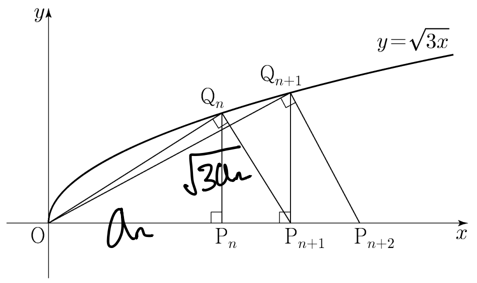
$a = e^2$

$f'(x) = \sec x$, $f'(0) = 1$, $b = 1$

16. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y = \sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

- 선분 OP_n과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$이 서로 수직이다.
- 선분 OQ_n과 선분 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1, 0)$일 때, 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하자.
$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}} = \overline{\mathrm{OP}_n} + \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$$a_{n+1} = a_n + \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $(a_n, \sqrt{3a_n})$이므로

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \boxed{(가)}$$ 3

$a_n : \sqrt{3a_n} = \sqrt{3a_n} : 3$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

$$A_n = \frac{1}{2} \times \left(\boxed{(나)}\right) \times \sqrt{9n-6}$$

$a_n = 3n-2$

이다. $a_{n+1} = 3n+1$ $\sqrt{3a_n} = \sqrt{9n-6}$

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p + f(8)$의 값은? [4점]

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

$\boxed{3+25}$

17. 어느 고등학교에는 5개의 과학 동아리와 2개의 수학 동아리 A, B가 있다. 동아리 학술 발표회에서 이 7개 동아리가 모두 발표하도록 발표 순서를 임의로 정할 때, 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하는 순서로 정해지거나 두 수학 동아리의 발표 사이에는 2개의 과학 동아리만이 발표하는 순서로 정해질 확률은? (단, 발표는 한 동아리씩 하고, 각 동아리는 1회만 발표한다.) [4점]

① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{25}{42}$ ④ $\frac{17}{28}$ ⑤ $\frac{13}{21}$

i) $\frac{1}{2}$

ii) B ○○ A

$_5P_2$

0 3
1 2
2 1
3 0

$4 \times 3!$

$$\frac{1}{2} + \frac{5\times4\times4!}{7!} = \frac{1}{2} + \frac{4\cdot5!}{7\cdot6\cdot5!} = \frac{1}{2} + \frac{2}{21}$$

$$= \frac{21+4}{42} = \frac{25}{42}$$

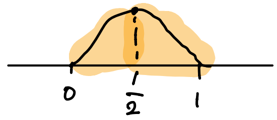
18. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x > 0) \end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_0^x f(t)f(1-t)\,dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



$x=\frac{1}{2}$ 대칭

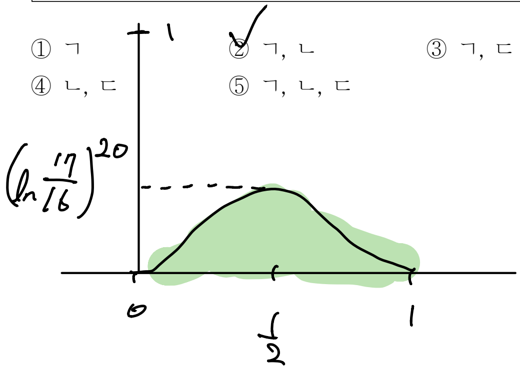
<보 기>

ㄱ. $x \le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이다.

ㄴ. $g(1) = 2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a) \ge 1$인 실수 a가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



19. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합 15개 중에서 임의로 서로 다른 세 부분집합을 뽑아 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 A, B, C라 할 때, $A\subset B\subset C$일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{91}$ ② $\frac{2}{91}$ ③ $\frac{3}{91}$ ④ $\frac{4}{91}$ ⑤ $\frac{5}{91}$

	$n(A)$	$n(B)$	$n(C)$
i)	2	3	4
ii)	1	3	4
iii)	1	2	4
iv)	1	2	3

$\dfrac{\cancel{60}\,\cancel{4}\,2}{\cancel{15}\cdot\cancel{14}\cdot 13}$ 7

$1\times {}_4C_3\times {}_3C_2=12$

$1\times {}_4C_3\times {}_3C_1=12$

$1\times {}_4C_2\times {}_2C_1=12$

${}_4C_3\times {}_3C_2\times {}_2C_1=24$

20. 함수 $f(x)=\sin(\pi\sqrt{x})$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt \quad (x\geq 0)$$

↳ $x-t=u$, $t=(x-u)$, $dt=-du$

이 $x=a$에서 극대인 모든 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$k^2<a_6<(k+1)^2$인 자연수 k의 값은? [4점]

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

$g(x)=\int_0^x (x-u)f(u)\,du$

$=x\int_0^x f(u)\,du-\int_0^x uf(u)\,du$

$g'(x)=\int_0^x f(u)\,du=\int_0^x \sin(\pi\sqrt{u})\,du$

$\pi\sqrt{u}=k$, $\dfrac{\pi}{2\sqrt{u}}du=\dfrac{\pi^2}{2k}du=dk$

$\therefore \dfrac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi\sqrt{x}} k\sin k\,dk$

$=\dfrac{2}{\pi^2}\Big[\sin k-k\cos k\Big]_0^{\pi\sqrt{x}}$

$=\dfrac{2}{\pi^2}\left[\sin(\pi\sqrt{x})-(\pi\sqrt{x})\cos(\pi\sqrt{x})\right]$

$\sin x-x\cos x$ 의 부호변화

→ $\cos x(\tan x-x)$

$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots$

$\pi<\pi\sqrt{a_1}<\frac{3}{2}\pi$

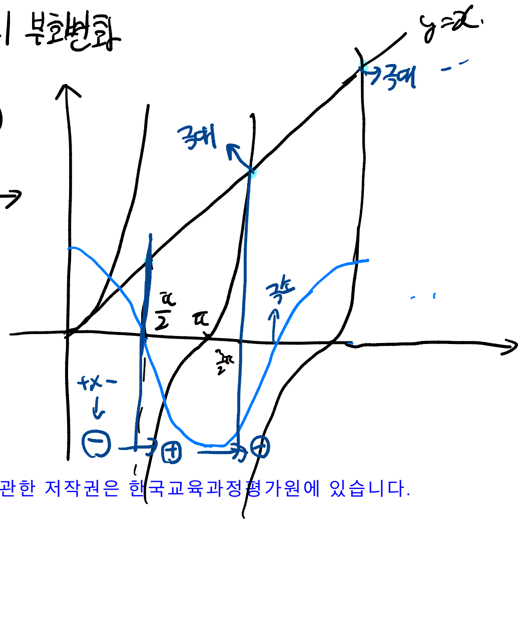
$\pi+2\pi<\pi\sqrt{a_2}<\frac{3}{2}\pi+2\pi$

$\vdots$

$11\pi<\pi\sqrt{a_6}<\frac{23}{2}\pi$

$11^2<a_6<\left(\frac{23}{2}\right)^2$

$\therefore k=11$



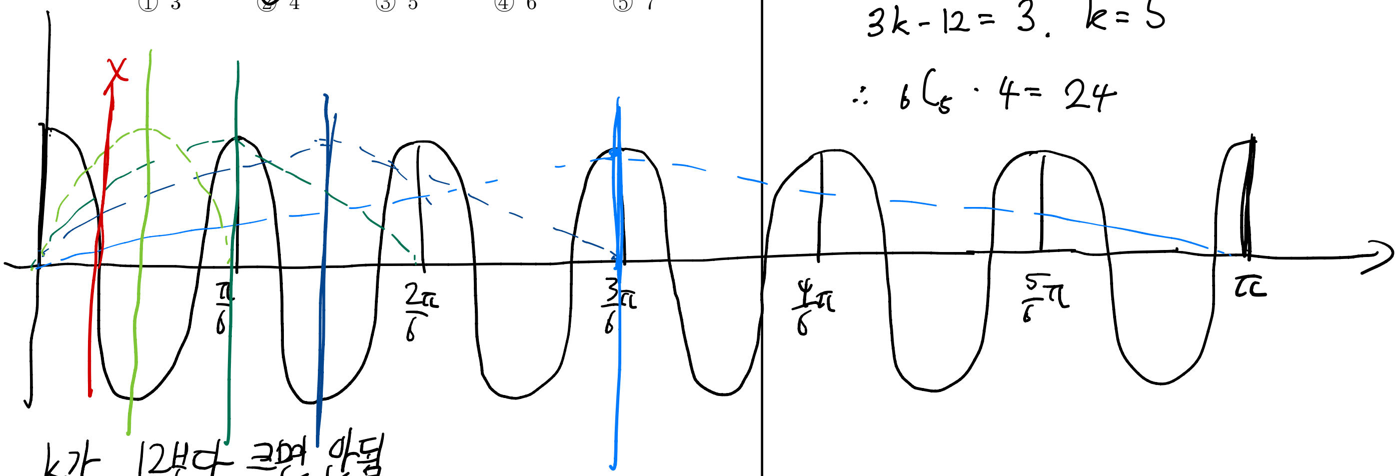
21. 닫힌구간 $[-2\pi, 2\pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\sin kx+2, \quad g(x)=3\cos 12x$$ 주기 $\frac{\pi}{6}$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는? [4점]

> 실수 a가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표이면
>
> $\{x \mid f(x)=a\} \subset \{x \mid g(x)=a\}$
>
> 이다.

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7



k가 12보다 크면 안됨

1부터 차례대로 넣어보기 (반주기만 그리기)

대칭축

① $k=1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

② $k=2 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

③ $k=3 \rightarrow \frac{\pi}{6}$

④ $k=4 \rightarrow \frac{\pi}{8}$

선대칭축이 $3\cos 12x$ 일치X

⑤ $k=5$ 〃

⑥ $k=6 \rightarrow \frac{\pi}{12}$

⑦ $k=7$
~
⑪ $k=11$ X

⑫ $k=12 \rightarrow \frac{\pi}{24}$

선대칭축X

$\therefore k=1,2,3,6$

단답형

22. $\left(x+\frac{4}{x^2}\right)^6$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오. [3점]

24

${}_6C_k \cdot x^k \cdot \left(\frac{4}{x^2}\right)^{6-k}$

$3k-12=3, \; k=5$

$\therefore {}_6C_5 \cdot 4 = 24$

23. 함수 $f(x)=x\ln(2x-1)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(x)=\ln(2x-1)+\frac{2x}{2x-1}$

$\boxed{2}$

24. 방정식

$$\log_2 x = 1 + \log_4 (2x-3)$$

을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱을 구하시오. [3점]

$x \geq \frac{3}{2}$

12

$\log_2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \log_2 (2x-3)$

$\therefore \frac{x}{2} = \sqrt{2x-3}$

$x^2 = 4(2x-3)$

$x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6) = 0$

25. $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n} \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^4 = a$일 때, $5a$의 값을 구하시오. [3점]

$1 + \frac{2k}{n} = x$, $\frac{2}{n} = dx$

242

$\int_1^3 x^4 dx = \frac{1}{5}(243 - 1)$

26. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	d	1

Y	11	21	31	41	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	c	d	1

$\mathrm{E}(X) = 2$, $\mathrm{E}(X^2) = 5$일 때, $\mathrm{E}(Y) + \mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

121

$Y = 10X + 1$, $V(X) = 5 - 2^2 = 1$

$E(Y) = 10E(X) + 1 = 21$

$V(Y) = 100V(X) = 100$

27. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+3}-S_n=13\times 3^{n-1}$$

일 때, a_4의 값을 구하시오. [4점]

9

$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$

$=13\cdot 3^{n-1}$

$=(1+3+9)\cdot 3^{n-1}$

$\therefore\ a_{n+1}=3^{n-1},\quad a_4=3^2=9$

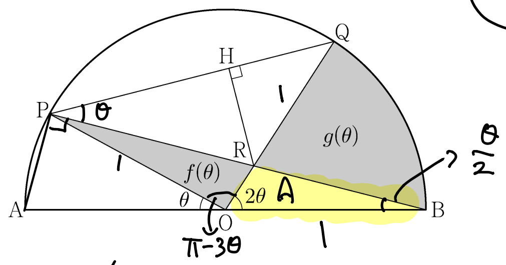
28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle\mathrm{POA}=\theta$, $\angle\mathrm{QOB}=2\theta$가 되도록 잡는다. 두 선분 PB, OQ의 교점을 R라 하고, 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 POR의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 RQ, RB와 호 QB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\overline{\mathrm{RH}}}=\frac{q}{p}$$

이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

23



$(f(\theta)+A)+(g(\theta)+A)-2A$

$\frac{1}{2}\sin\theta+\theta-\frac{\sin 2\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}\cdot\sin\frac{\theta}{2}$

$\frac{1}{\sin\frac{5}{2}\theta}=\frac{\overline{BR}}{\sin 2\theta},\quad \overline{BR}=\frac{\sin 2\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}$

$A=\frac{1}{2}\times\frac{\sin 2\theta}{\sin\frac{5}{2}\theta}\cdot\sin\frac{\theta}{2}$

$\overline{RH}=\left(2\cos\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)\cdot\sin\theta$

$\therefore\ \frac{q}{p}=\frac{\frac{1}{2}+1-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}}{2-\frac{4}{5}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{5}}{\frac{6}{5}}$

$=\frac{15-4}{12}=\frac{11}{12}$

29. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

168

여사건! 적어도 하나가 0 or 1

전체: ${}_3H_4 \times {}_3H_6 = 15\cdot 28 = 420$

① 0인 상자

2개: 3

1개 => $3\cdot({}_2H_4\cdot{}_2H_6 - 2) = 99$

∴ 102

② 1인 상자 (0인 경우 X)

2개: $3\times2\times2=12$

1개: $3\cdot({}_2H_3\cdot{}_2H_6-(2+4))$

$+3\cdot({}_2H_4\cdot{}_2H_5-(2+4))$

$=3\times46=138$

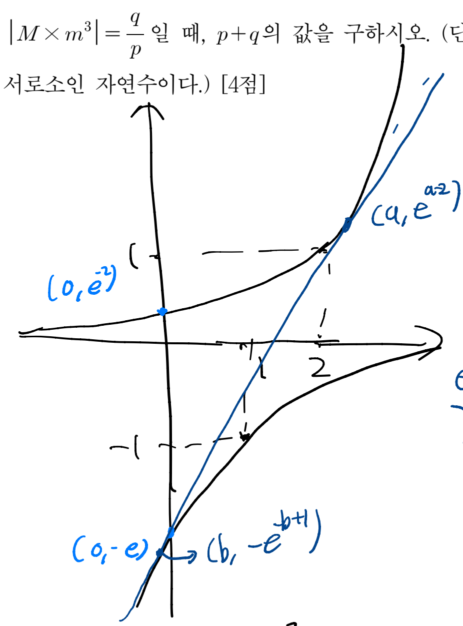
∴ 150

$420-102-150=168$

30. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
>
> $$-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$$
>
> 이 성립한다.

$|M\times m^3| = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



동시에 접하는 경우구하기

$e^{a-2}=e^{-b+1}$

$b=-a+3$

$\frac{e^{a-2}+e^{-b+1}}{a-b}=\frac{2e^{a-2}}{2a-3}=e^{a-2}$

$a=\frac52$, $b=\frac12$

$y=e^{\frac12}x-\frac32 e^{\frac12}$

$a>0$, $-e<b<e^{-2}$

① 최대 $a>0$, $b>0$ → $y=e^{x-2}$에 접할 때

접점 (t, e^{t-2})

$\frac{e^{t-2}-b}{t-0}=e^{t-2}=a$

$b=(1-t)e^{t-2}$, $a=e^{t-2}$

$ab=(1-t)e^{2t-4}$

$\frac{dab}{dt}=(1-2t)e^{2t-4}$ → $t=\frac12$, $ab=\frac12 e^{-3}$

② 최소 $a>0$, $b<0$

→ $-\frac32\sqrt e \le b<0$ → $ab=(1-t)e^{2t-4}$, $\frac{dab}{dt}=(1-2t)e^{2t-4}$

$-\frac32 e^1$

$-e<b<-\frac32\sqrt e$ → $y=-e^{-x+1}$에 접할때

$e^{-t+1}=\frac{-e^{-t+1}-b}{t-0}=a$, $ab=-(t+1)e^{-2t+2}$

$\frac{dab}{dt}=(-2t-1)e^{-2t+2}$ $t=-\frac12$

$ab=-\frac12 e^1$

$m=-\frac32 e^1$

∴ $\frac{27}{16}$ → $p+q=43$