

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5 지선 다형

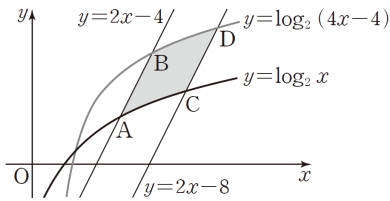
1. 1보다 큰 세 실수
- a, b, c
- 가

$$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{3}$$

를 만족시킬 때, $\log_a b \div \log_a c$ 의 값은?

- ① $\frac{\sqrt[3]{6}}{3}$ ② $\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$ ③ $\sqrt[3]{6}$ ④ $2\sqrt[3]{6}$ ⑤ $3\sqrt[3]{6}$

2. 그림과 같이 제 1 사분면에서 직선 $y=2x-4$ 가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(4x-4)$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=2x-8$ 이 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(4x-4)$ 와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 두 선분 AB, CD와 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(4x-4)$ 로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는?



- ① $2\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

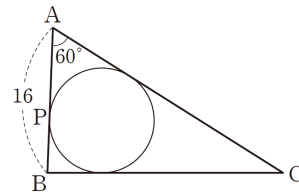
3. $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$ 에서 함수 $y = \tan 2x$ 의 그래프와 직선

$$y = m\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (m > 0)$$

이 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < \beta$)라 할 때,

$\beta - \alpha = \frac{3}{4}\pi$ 이다. $3\pi m$ 의 값을 구하시오.

4. 그림과 같이 $\overline{AB} = 16$ 이고, $\angle BAC = 60^\circ$ 인 삼각형 ABC에 내접하는 원이 선분 AB와 만나는 점을 P라 하자. 점 P가 선분 AB를 5:3으로 내분하는 점일 때, 선분 BC의 길이는?



- ① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$a_5 = 46, a_{10} = 21$$

일 때, S_n 의 최댓값은?

- ① 454 ② 459 ③ 464 ④ 469 ⑤ 474

6. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{S_{k+1}}{S_k} = 20$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} \frac{a_{k+1}}{S_k}$ 의 값은?

- ① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

7. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = (a_n)^3 \times (-1)^n$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{15} a_k$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

8. 6 개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3 을 일렬로 나열하여 여섯 자리의 자연수를 만들 때, 숫자 2 가 서로 이웃하지 않는 자연수의 개수는?

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

9. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 중 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는?

(가) 집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \geq f(x_2)$ 이다.
(나) 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 4 이하이다.

① 121 ② 122 ③ 123 ④ 124 ⑤ 125

10. 집합 $U = \{1, 2, 3\}$ 의 공집합이 아닌 모든 부분집합 중에서 임의로 서로 다른 두 부분집합 A, B 를 택할 때, $A \subset B$ 일 확률은?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

11. 좌표평면의 원점에 점 P 가 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하이면 점 P 를 x 축의 방향으로 1 만큼, 나온 눈의 수가 3 이상이면 점 P 를 y 축의 방향으로 1 만큼 이동시키기로 한다. 한 개의 주사위를 6 번 던져서 차례대로 점 P 를 이동시킬 때, 점 P 가 점 $(1, 2)$ 를 지나서 점 $(3, 3)$ 으로 이동될 확률은?

① $\frac{4}{81}$ ② $\frac{2}{27}$ ③ $\frac{8}{81}$ ④ $\frac{10}{81}$ ⑤ $\frac{4}{27}$

12. 1, 1, 1, 2, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다.
이 6장의 카드를 모두 임의로 일렬로 나열할 때, 양 끝에 나열된
두 카드에 적혀 있는 수의 합을 확률변수 X 라 하자. $E(X)$ 의
값은?

- ① 3 ② $\frac{19}{6}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

13. 확률변수 X 는 정규분포 $N(20, \sigma^2)$ 을 따르고, 확률변수 Y 는
정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다. 두 확률변수 X 와 Y 의
확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$ 이고,

$$f(a) = f(28) = g(28)$$

이다. $P(a \leq X \leq 28) = 0.84$, $P(Y \geq b) = 0.08$ 일 때,
두 상수 a , b 에 대하여 $a+b$ 의 값은? (단, $m \neq 20$)

- ① 52 ② 54 ③ 56 ④ 58 ⑤ 60

14. 어느 공장에서 생산하는 제품 한 개의 무게는 모평균이 mg ,
모표준편차가 $3g$ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서
생산하는 제품 중 n 개를 임의추출하여 구한 제품의 무게의
표본평균의 값이 $\bar{x}g$ 이고, 이를 이용하여 구한 모평균 m 에 대한
신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 이다.
 $b-a=1.72$ 일 때, n 의 값을 구하시오. (단, Z 가 표준정규분포를
따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \leq 2.58) = 0.99$ 로 계산한다.)

<빠른 정답>

1 ~ 7 : ② ④ 8 ④ ④ ① ②

8 ~ 14 : ⑤ ⑤ ② ③ ③ ③ 81

1) 정답) ②

$$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{3} \text{에서 밑을 } a \text{로 나타내면}$$

$$\log_a b = \frac{\log_a c}{2 \log_a b} = \frac{1}{3 \log_a c}$$

이 식으로부터

$$2(\log_a b)^2 = \log_a c \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3(\log_a c)^2 = 2 \log_a b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①에서 $\log_a c = 2(\log_a b)^2$ 을 ②에 대입하면

$$3\{2(\log_a b)^2\}^2 = 2 \log_a b$$

$$6(\log_a b)^4 = \log_a b$$

이때 $\log_a b \neq 0$ 이므로

$$(\log_a b)^3 = \frac{1}{6}$$

$$\log_a b = 6^{-\frac{1}{3}}$$

이 값을 ①에 대입하면

$$\log_a c = 2(\log_a b)^2$$

$$= 2 \times (6^{-\frac{1}{3}})^2$$

$$= 2 \times 6^{-\frac{2}{3}}$$

따라서

$$\log_a b \div \log_a c$$

$$= 6^{-\frac{1}{3}} \div (2 \times 6^{-\frac{2}{3}})$$

$$= \frac{1}{2} \times 6^{-\frac{1}{3}} - (-\frac{2}{3})$$

$$= \frac{\sqrt[3]{6}}{2}$$

답 ②

2) 정답) ④

$$\log_2 (4x-4) = \log_2 4(x-1)$$

$$= \log_2 (x-1) + 2$$

따라서 곡선 $y = \log_2 x$ 위의 한 점을

x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한

점은 곡선 $y = \log_2 (x-1) + 2$ 위의 점이고, 이 두 점을

잇는 직선의 기울기는 2이다.

이때 두 점 A, B는 직선 $y = 2x - 4$ 위의 점이므로

직선 AB의 기울기는 2이다.

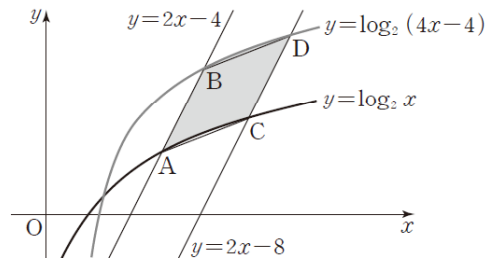
즉, 두 점 A, C를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 각각 B, D이다.

따라서 두 점 A, C를 잇는 곡선 $y = \log_2 x$ 의 일부분을

x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼

평행이동하면 두 점 B, D를 잇는 곡선 $y = \log_2 (4x-4)$ 의 일부분과 일치한다.

따라서 곡선 $y = \log_2 x$ 와 직선 AC로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y = \log_2 (4x-4)$ 와 직선 BD로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



그러므로 두 선분 AB, CD와 두 곡선 $y = \log_2 x$,

$y = \log_2 (4x-4)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

평행사변형 ACDB의 넓이와 같다.

점 A의 좌표를 (a, b) (a, b 는 양의 실수)라 하면 점 B의

좌표는 $(a+1, b+2)$ 이므로

$$AB = \sqrt{1^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{5}$$

이때 평행사변형 ACDB의 높이는 직선 $y = 2x - 4$ 위의 점

$(2, 0)$ 과 직선 $y = 2x - 8$, 즉 $2x - y - 8 = 0$ 사이의 거리와

같으므로

$$\frac{|2 \times 2 - 0 - 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

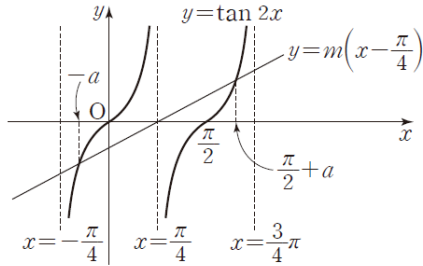
따라서 평행사변형 ACDB의 넓이는

$$\sqrt{5} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = 4$$

답 ④

3) 정답) 8

함수 $y = \tan 2x$ 의 그래프의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이고,
 직선 $y = m\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 는 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 을 지나는 직선이므로
 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$ 에서 그래프를 나타내면 그림과 같다.



이때 양수 a 에 대하여 $\beta = \frac{\pi}{2} + a$ 라 하면

함수 $y = \tan 2x$ 의 그래프는 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고,

점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 에 대하여 대칭이므로

$$a = -a$$

$$\text{그러므로 } \beta - a = \frac{3}{4}\pi \text{에서}$$

$$\left(\frac{\pi}{2} + a\right) - (-a) = \frac{3}{4}\pi$$

$$\frac{\pi}{2} + 2a = \frac{3}{4}\pi$$

$$a = \frac{\pi}{8}$$

그러므로 x 좌표가 a 인 점의 좌표는

$$\left(-\frac{\pi}{8}, \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\text{즉, } \left(-\frac{\pi}{8}, -1\right) \text{이므로}$$

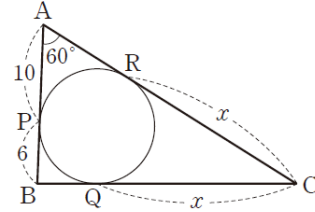
$$m = \frac{0 - (-1)}{\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{8}{3\pi}$$

$$\text{따라서 } 3\pi m = 8$$

답 8

4) 정답) ④

삼각형 ABC에 내접하는 원이 선분 BC와 만나는 점을 Q,
 선분 CA와 만나는 점을 R라 하자.



$$\overline{CQ} = \overline{CR} = x \text{라 하면}$$

$$\overline{AP} = 16 \times \frac{5}{8} = 10,$$

$$\overline{BP} = 16 \times \frac{3}{8} = 6$$

이므로

$$\overline{BC} = 6 + x, \overline{AC} = 10 + x$$

이때 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos 60^\circ$$

$$(6 + x)^2 = 16^2 + (10 + x)^2 - 2 \times 16 \times (10 + x) \times \frac{1}{2}$$

$$36 + 12x + x^2 = 256 + 100 + 20x + x^2 - 160 - 16x$$

$$8x = 160$$

따라서 $x = 20$ 이므로

$$\overline{BC} = 6 + 20$$

$$= 26$$

답 ④

5) 정답) ④

$$a_1=66$$

$$a_n=66+(n-1)\times(-5)$$

$$=-5n+71$$

$$a_n=-5n+71<0\text{에서}$$

$$n>\frac{71}{5}=14.2$$

즉, $a_{15}<0<a_{14}$ 이므로

$n=14$ 일 때, S_n 의 값이 최대이다.

따라서 구하는 최댓값은

$$S_{14}=\frac{14\{2\times 66+(14-1)\times(-5)\}}{2}$$

$$=469$$

답 ④

6) 정답) ①

$$\frac{S_{k+1}}{S_k}=\frac{S_k+a_{k+1}}{S_k}$$

$$=1+\frac{a_{k+1}}{S_k}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{S_{k+1}}{S_k}=\sum_{k=1}^{15} \left(1+\frac{a_{k+1}}{S_k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{15} 1+\sum_{k=1}^{15} \frac{a_{k+1}}{S_k}$$

$$=15+\sum_{k=1}^{15} \frac{a_{k+1}}{S_k}$$

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{S_{k+1}}{S_k}=20\text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{a_{k+1}}{S_k}=\sum_{k=1}^{15} \frac{S_{k+1}}{S_k}-15$$

$$=20-15$$

$$=5$$

답 ①

7) 정답) ②

$$a_1=1$$

$$a_2=a_1^3\times(-1)^1$$

$$=1\times(-1)=-1$$

$$a_3=a_2^3\times(-1)^2$$

$$=-1\times 1=-1$$

$$a_4=a_3^3\times(-1)^3$$

$$=-1\times(-1)=1$$

$$a_5=a_4^3\times(-1)^4$$

$$=1\times 1=1$$

$$a_6=a_5^3\times(-1)^5$$

$$=1\times(-1)=-1$$

$$a_7=a_6^3\times(-1)^6$$

$$=-1\times 1=-1$$

$$a_8=a_7^3\times(-1)^7$$

$$=-1\times(-1)=1$$

⋮

즉, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n=a_{n+4}$ 가 성립한다.

따라서

$$\sum_{k=1}^{15} a_k=(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)$$

$$+(a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12})+a_{13}+a_{14}+a_{15}$$

$$=0+0+0+a_1+a_2+a_3$$

$$=0+0+0+1+(-1)+(-1)$$

$$=-1$$

답 ②

8) 정답) ⑤

6개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!3!}=60$$

이 중에서 숫자 2가 서로 이웃하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!}=20$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$60-20=40$$

답) ⑤

다른 풀이

4개의 숫자 1, 3, 3, 3을 일렬로 나열한 후, 그 사이의 3개의 자리와 맨앞, 맨뒤를 포함한 5개의 자리 중 서로 다른 2개의 자리를 택하여 2를 넣으면 되므로 구하는 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{3!} \times {}_5C_2 = 4 \times 10 = 40$$

9) 정답) ⑤

함수 f 가 조건 (가)를 만족시키려면 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허락하여 5개를 택한 후 큰 수부터 크기순으로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 의 값으로 정하면 된다. 즉, 조건 (가)를 만족시키는 함수 f 의 개수는 서로 다른 5개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_5 = {}_{5+5-1}C_5 = {}_9C_5 = {}_9C_4 = 126$$

이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 함수는

$$f(1)=5, f(2)=4, f(3)=3, f(4)=2, f(5)=1$$

인 한 가지뿐이다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$$126-1=125$$

답) ⑤

10) 정답) ②

집합 $U=\{1, 2, 3\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는

$$2^3-1=7$$

이므로 서로 다른 두 부분집합 A, B 를 정하는 경우의 수는

$${}_7P_2=7 \times 6=42$$

공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 의 원소의 개수를 각각 a, b 라 하면 $A \subset B$ 이고 $A \neq B$ 이므로 $1 \leq a < b \leq 3$ 이어야 한다.

(i) $a=1, b=2$ 인 경우

집합 U 의 원소 1, 2, 3 중 1개를 택해 집합 A 의 원소로 하고 남은 2개의 원소 중 1개를 택해 집합 $B-A$ 의 원소로 하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_2C_1 = 6$$

(ii) $a=1, b=3$ 인 경우

집합 U 의 원소 1, 2, 3 중 1개를 택해 집합 A 의 원소로 하고 $B=U$ 로 하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times 1 = 3$$

(iii) $a=2, b=3$ 인 경우

집합 U 의 원소 1, 2, 3 중 2개를 택해 집합 A 의 원소로 하고 $B=U$ 로 하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times 1 = 3$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{6+3+3}{42} = \frac{2}{7}$$

답) ②

11) 정답) ③

점 P가 원점을 출발하여 점 (1, 2)를 지나기 위해서는 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 이동시켜야 하므로 세 번째까지 던져서 나온 주사위의 눈의 수가 2 이하가 한 번, 3 이상이 두 번 나와야 한다.

이 경우의 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

이 각각에 대하여 점 (1, 2)에서 점 (3, 3)으로 이동시키려면 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 이동시켜야 하므로 네 번째에서 여섯 번째까지 던져서 나온 주사위의 눈의 수가 2 이하가 두 번, 3 이상이 한 번 나와야 한다.

이 경우의 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{4}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{81}$$

답 ③

12) 정답) ③

6장의 카드를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!2!}=60\text{이고,}$$

확률변수 X 가 갖는 값은 2, 3, 4, 5이다.

(i) $X=2$ 일 때

양 끝에 1, 1을 나열하고 중간에 1, 2, 2, 3을 나열하는

경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$ 이므로

$$P(X=2)=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$

(ii) $X=3$ 일 때

양 끝에 1, 2를 나열하고 중간에 1, 1, 2, 3을 나열하는

경우의 수는 $2 \times \frac{4!}{2!}=24$ 이므로

$$P(X=3)=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$$

(iii) $X=4$ 일 때

양 끝에 1, 3을 나열하고 중간에 1, 1, 2, 2를 나열하는

경우의 수는 $2 \times \frac{4!}{2!2!}=12$

또 양 끝에 2, 2를 나열하고 중간에 1, 1, 1, 3을 나열하

는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$ 이므로

$$P(X=4)=\frac{12+4}{60}=\frac{4}{15}$$

(iv) $X=5$ 일 때

양 끝에 2, 3을 나열하고 중간에 1, 1, 1, 2를 나열하는

경우의 수는 $2 \times \frac{4!}{3!}=8$ 이므로

$$P(X=5)=\frac{8}{60}=\frac{2}{15}$$

(i)~(iv)에 의하여 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

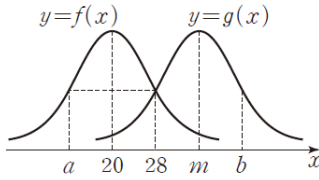
X	2	3	4	5	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

따라서

$$E(X)=2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{2}{15} = \frac{10}{3}$$

답 ③

13) 정답) ③



$$P(a \leq X \leq 28) = 0.84 > 0.5 \text{이므로}$$

$a < 20$ 이고,

$$f(a) = f(28) \text{이므로}$$

$$\frac{a+28}{2} = 20 \text{에서 } a = 12$$

두 확률변수 X, Y 의 표준편차가 같고, $m \neq 20$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 평행이동하면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=20$ 에 대하여 대칭이고, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이므로

$$f(28) = g(28) \text{에서}$$

$$\frac{20+m}{2} = 28, m = 36$$

$$P(a \leq X \leq 28) = P(12 \leq X \leq 28)$$

$$= 2P(20 \leq X \leq 28)$$

$$= 0.84$$

$$\text{이므로 } P(20 \leq X \leq 28) = 0.42$$

$$P(Y \geq b) = 0.08 \text{이고,}$$

$$P(X \geq 28) = 0.08 \text{이므로}$$

$$28 - 20 = b - 36 \text{에서}$$

$$b = 44$$

$$\text{따라서 } a + b = 12 + 44 = 56$$

답 ③

14) 정답) 81

표본평균이 $\bar{x}$, 모표준편차가 $\sigma = 3$, 표본의 크기가 n 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{3}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{3}{\sqrt{n}}$$

$$b - a = 2 \times 2.58 \times \frac{3}{\sqrt{n}} = 1.72 \text{이므로}$$

$$\sqrt{n} = \frac{2 \times 2.58 \times 3}{1.72} = 9$$

$$\text{따라서 } n = 81$$

답 81

실수하지 않습니다.
안 풀리면 일단 넘어갑니다.