kmo 한국수학올림피아드

제 30 회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

가형

2016년 5월 28일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 “7” 일 경우 “007” 이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1 ∼ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ∼ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 삼차 방정식 $x^3 - 6x^2 + (\sqrt{2}+8)x - 2\sqrt{2} = 0$ 의 세 실근을 α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ 라 할 때 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\gamma$ 의 값을 구하여라.

2. 다음 수가 정수가 되도록 하는 양의 정수 k 중 가장 큰 것을 구하여라.

$$\frac{1000^{2016} - 271^{2016}}{3^k}$$

3. 다음과 같이 좌표평면의 점으로 이루어진 집합 P, Q를 생각하자.

$$P = \{(1,1),(2,1),(4,1),(8,1),(16,1)\}$$
$$Q = \{(1,0),(2,0),(4,0),(8,0),(16,0)\}$$

P와 Q를 일대일대응 시키고, 대응된 두 점을 선분으로 모두 연결한다. 이 5개의 선분들의 교점의 개수가 정확히 3개가 되도록 하는 일대일대응의 개수를 구하여라.

4. 삼각형 ABC 의 세 변의 길이는 각각 $\overline{AB} = 5\sqrt{2}$, $\overline{BC} = 17$, $\overline{CA} = 13$ 이다. 변 BC 위에 점 D, E를 $\overline{BD} = 5$, $\overline{DE} = 5$, $\overline{EC} = 7$ 이 되도록 잡고 삼각형 ABE, ADC 의 내접원을 각각 O_1, O_2 라 하자. 원 O_1 과 O_2 의 교점 중 BC 에 가까운 점을 X, 직선 BC 가 원 O_1, O_2 와 접하는 점을 각각 Y, Z 라 하자. 삼각형 XYZ 의 외접원의 반지름이 R 일 때, $(R^2+10)^2$ 의 값을 구하여라.

5. 네 정수 a, b, c, d 가 다음 세 조건을 모두 만족할 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하여라.

(i) $10 \le a, b, c, d \le 20$

(ii) $ab - cd = 58$

(iii) $ad - bc = 110$

6. $n = 2^{2016} + 73$ 일 때, $2^n + 1$ 을 $16^{1025} + 1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

7. 50 개의 수

$$\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{2}{50}$$

중 짝수개 (2개 이상) 의 서로 다른 수를 선택하는 경우의 수를 N 이라 하자. 각 경우마다 선택한 수를 모두 곱한다. 이렇게 하여 얻은 N 개의 수를 모두 더한 값을 구하여라.

8. 각 A 의 크기가 30° 이고 변 BC 의 길이가 60 인 삼각형 ABC 의 변 BC 위에 $\overline{BP} = 10$, $\overline{BQ} = 11$ 인 점 P와 Q가 있다. 삼각형 ABC 의 외접원을 O 라 하고, 점 P를 지나고 B와 C에서 원 O에 각각 내접하는 두 원의 교점을 $P'(\neq P)$ 이라 하고, 점 Q를 지나고 B와 C에서 원 O에 각각 내접하는 두 원의 교점을 $Q'(\neq Q)$ 이라 하고, 직선 PP' 과 QQ' 의 교점을 T 라 하자. 삼각형 PQT 의 넓이가 x 일 때, x^2 의 값을 구하여라.

9. 양의 정수 n의 각 자리의 수의 합이

$$\frac{1}{22}\left(-n^2+123n-2016\right)$$

이다. n을 구하여라.

10. 다음을 만족하는 소수 p를 모두 더한 값을 구하여라.

p가 $181^{2p}+181^p+13$의 약수이다.

11. 집합 $X = \{1,2,\ldots,12\}$에서 정의된 일대일대응 $f: X \to X$ 중 다음 조건을 만족하는 것의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

$f(k)$와 k는 서로소이다. $(k=1,2,\ldots,12)$

12. 사각형 $ABCD$는 이 사각형의 외부에 있는 점 O를 중심으로 하는 원에 내접하고, $\angle AOB = 144°$, $\angle CBD = 27°$이다. 두 대각선 AC와 BD의 교점에서 점 O까지 거리가 20이고, AC의 중점과 BD의 중점 사이의 거리가 x일 때, x^2의 값을 구하여라.

13. 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}\cdot\overline{BC}$이고 $\angle ACB = 20°$이다. 꼭짓각 $\angle BAC$의 크기를 $x°$라 할 때, x를 구하여라.

14. 좌표평면에서 점 $P(x,y)$는

$$A(0,0),\ B(63,0),\ C(63,56),\ D(0,56)$$

를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 내부에 있다. 다음 조건을 만족하는 점 P에 대하여 $\overline{PA}$의 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

x, y는 모두 정수이고, $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$도 모두 정수이다.

15. 모든 k에 대하여, a_k는 $0 \le a_k \le 6$인 정수이다. 다음 식을 만족하는 순서쌍 $(a_0,\ldots,a_{100})$의 개수를 구하여라.

$$2016\times 5^{96} = a_0 + a_1 5 + a_2 5^2 + \cdots + a_{100}5^{100}$$

16. 정육각형 $ABCDEF$에 대하여 점 A를 중심으로 하고 점 B를 지나는 원을 O_1, 점 D를 중심으로 하고 점 B를 지나는 원을 O_2, 점 E를 중심으로 하고 AD와 BF의 교점을 지나는 원을 O_3라 하자. O_1과 O_3의 두 교점을 G, H라 하고 O_2와 O_3의 두 교점을 J, K라 하자. $\overline{GH}=10$일 때, $\overline{JK}^2$의 값을 구하여라.

17. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중 가장 큰 것을 구하여라.

$(x^2+3xy+9y^2)^n = 3^{400}(xy)^{398}$을 만족하는 양의 정수 x, y가 존재한다.

18. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 p 중 1000을 넘지 않는 가장 큰 것을 구하여라.

삼차방정식 $x^3-px^2+qx-(p^2-4q+4)=0$의 세 근이 모두 양의 정수가 되는 양의 정수 q가 존재한다.

19. 다음 두 조건을 모두 만족하는 집합의 순서쌍 $(S_1,S_2,\ldots,S_8)$의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(i) $S_k \subseteq \{1,2,\ldots,20\}$ $(k=1,2,\ldots,8)$

(ii) $S_k \cap S_{k+1} = \varnothing$ $(k=1,2,\ldots,7)$

20. 사각형 $ABCD$가 중심이 O인 원에 내접하고, 두 직선 AB와 CD가 점 E에서 만난다. 선분 CD의 중점을 M이라 하고, 삼각형 BEC의 외접원과 삼각형 OEM의 외접원이 점 $F(\neq E)$에서 만난다고 하자. $\angle OAE = 75°$, $\angle OFD = 25°$, $\angle FDA = 20°$이다. $\angle FEC = x°$, $\angle DAC = y°$라 할 때, $x-y$의 값을 구하여라.