

Get 독·설·해

65. [Performance 수학II 65번]

양수 a 와 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (|x| > a) \\ f(x) & (|x| \leq a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $|x+2| + |x-2| + g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a + f(6)$ 의 값을 구하시오.

< Solution >

1st Step 독해	[조건] ① 양수 a ② 이차함수 $f(x)$ ③ $g(x) = \begin{cases} 0 & (x > a) \\ f(x) & (x \leq a) \end{cases}$ ④ $x+2 + x-2 + g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능 [구하는 값] ⑤ $a + f(6)$ 의 값 : 함수 $g(x)$ 를 결정해야 함
2nd Step 설계	② 이차함수를 보면 대칭성은 항상 염두에 두어야 한다. ④ $h(x) = x+2 + x-2$ 라 하면 함수 $h(x)$ 는 $x =2$ 에서만 미분가능하지 않다. 함수 $g(x)$ 가 미분가능하지 않을 수 있는 x 의 값은 $x =a$ 이므로 $x =2$, $x =a$ 에서만 함수 $h(x) + g(x)$ 의 미분가능성을 확인해보면 된다.
3rd Step 해결	③ 함수 $g(x)$ 가 $x =a$ 에서 불연속이면 함수 $h(x) + g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 수 없다. 따라서 $f(a) = f(-a) = 0$ 이어야 한다. ④ 만약 $a \neq 2$ 이면 함수 $h(x) + g(x)$ 가 $x =a$ 에서 미분가능하므로 $\lim_{x \rightarrow a-} \frac{\{h(x) + g(x)\} - \{h(a) + g(a)\}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a-} \left\{ \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right\}$ $= h'(a) + f'(a)$ $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{\{h(x) + g(x)\} - \{h(a) + g(a)\}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+} \left\{ \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right\}$ $= h'(a) + 0$ 에서 $h'(a) + f'(a) = h'(a)$ 이 성립하고, 마찬가지로 $h'(-a) + f'(-a) = h'(-a)$ 이 성립한다. 따라서 $f'(a) = f'(-a) = 0$ 이다. 그런데 방정식 $f'(x) = 0$ 의 실근의 개수는 1 이므로 모순이다. 그러므로 $a = 2$ 이다. 함수 $h(x) + g(x)$ 가 $x =2$ 에서 미분가능하므로 $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{\{h(x) + g(x)\} - \{h(2) + g(2)\}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \left\{ \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} + \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \right\}$ $= 0 + f'(2)$ $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{\{h(x) + g(x)\} - \{h(2) + g(2)\}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \left\{ \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} + \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \right\}$ $= 2$ 에서 $f'(2) = 2$ 이고, 마찬가지로 $f'(-2) = -2$ 이다. ② 따라서 $f(2) = f(-2) = 0$, $f'(2) = 2$, $f'(-2) = -2$ 이므로 $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x+2) \text{ 이다. 즉, } a + f(6) = 2 + 16 = 18 \text{ 이다.}$