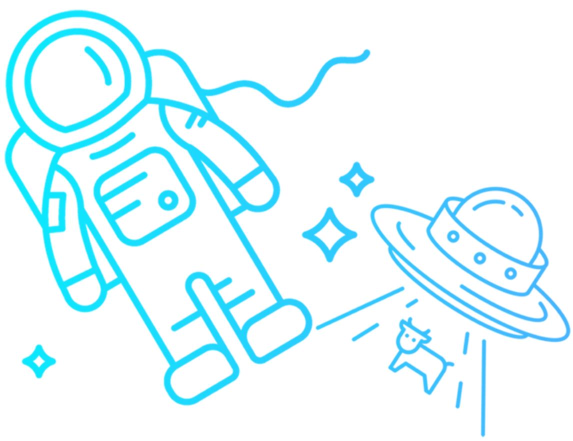
2021 우주설 파이널 0주차
9월 모의평가 경향예측 (미적분&확률과 통계)

걱정 마라.
절망이야말로 가장 순수하고
치열한 열정이다.
사람들이 불행해지는 것은
진실하게 절망하지 않기 때문이다.

이문열, 젊은 날의 초상

우주설

2021 수능대비
수학 워크북

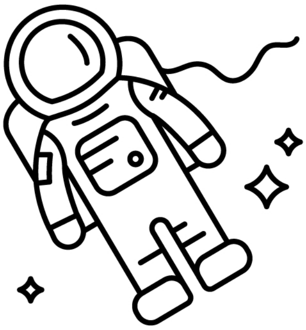


2021 수능대비

우주설 Final 0주차

(1) 9월 모평대비 중요도 - 미적분

(2) 9월 모평대비 중요도 - 확통



(1) 9월 모의평가 경향예측 (미적분)

6월 모의평가의 여집합을 예상

올해 수험생들의 미적분 성취정도를 평가하는 시험지를 예상합니다. 6월 모의평가에서 평가하지 못했던 부분을 출제할 것입니다.

1. 6평 범위에는 없던 도함수의 활용추가

(중요도 ★★★★★)

우리는 도함수의 활용의 대표예시를 학습했습니다. 부등식에 활용 및 최댓값과 최솟값입니다. '열린구간에서 최대, 최솟값을 갖는다면, 그것은 극값이어야 한다.' 최대 최소의 따름정리를 기억합시다.

EX01

대표 EBS 연계 문항

[수능특강 82page, Level3]

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ (1) 에서 정의된 함수

$$f(x) = a\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

가 극값을 갖지 않을 때, (2) 실수 a의 최댓값은?

EX01

$0<x<\frac{\pi}{2}$ (1)에서 정의된 함수

$$f(x)=a\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$$

가 극값을 갖지 않을 때,(2) 실수 a의 최댓값은?

(1). $0<x<\frac{\pi}{2}$

열린구간을 제시하였다. 구간이 가진 의미를 먼저 파악하면
$\sin x, \cos x>0$를 알 수 있다.

(2). 극값을 갖지 않는다.

$f'(x)\neq 0$이거나 $f'(x)=0$ 인 순간에서 부호 변화가 없다.

$\Rightarrow$ '$f'(x)\geq 0$ 또는 $f'(x)\leq 0$' 이다. 로 해석하면 용이하다.

$f'(x)=2a\sin x\cos x-\sqrt{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$

$x=0.00001$을 대입해보면 $f'(x)<0$이므로 $f'(x)\geq 0$가 아닌

$f'(x)\leq 0$으로 해석할 수 있다. $2a\sin x\cos x-\sqrt{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\leq 0$

$\Rightarrow\ 2a\sin x\cos x\leq\sqrt{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$

$\Rightarrow\ 2a\leq\frac{\sqrt{2}}{\sin x}+\frac{1}{2\cos x}$, $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sin x}+\frac{1}{2\cos x}$이라 하면,

$\Rightarrow\ 2a\leq g(x)$의 최솟값 을 만족시키면 성립한다.

(교과서 개념: 도함수의 활용 부등식에서의 활용)

(1)에서 열린구간에 의해 $g(x)$의 최솟값은 $g(x)$의 극값임을 알 수 있다.

$g'(x)=\frac{-\sqrt{2}\cos x}{\sin^2 x}+\frac{\sin x}{2\cos^2 x}=0$을 만족시키는 x값을 찾자.

$g'(x)=\frac{\sin^3 x-2\sqrt{2}\cos^3 x}{2\sin^2 x\cos^2 x}=0\ \Rightarrow\sin^3 x-2\sqrt{2}\cos^3 x=0$

$\Rightarrow(\sin x-\sqrt{2}\cos x)(\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x\cos x+\cos^2 x)=0$

$\Rightarrow\sin x-\sqrt{2}\cos x=0,\quad x=t$에서 $\sin t-\sqrt{2}\cos t=0,\ g'(t)=0$이면

$\cos t=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sin t=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이고,

$g(x)$의 극값이자 최솟값 $g(t)=\frac{\sqrt{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}+\frac{1}{2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$2a\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로, a의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$이다.

<MEMO>

cf)

$\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x\cos x+\cos^2 x>0$
이므로 양변에 나눠줘도 무관

답: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

2. 6평: 접선의 기울기까지, 9평/수능: 접선의 방정식 포함

(중요도 ★★★★★)

단순 공식대입 및 계산위주의 접선의 기울기를 묻는 문제가 아닌 그래프를 그린 뒤 접선의 상황을 관찰하는 문제가 출제될 것입니다. 그러나 이 유형은 대표적인 'N수생들이 현역들보다 잘하는 유형'으로 고난이도 및 한쪽으로 치우친 킬러출제는 어렵다고 생각됩니다. 실근의 개수유형이 제일 무난하다고 봅니다.

Theory [실근의 개수와 경계이론]

1. 실근의 개수가 변하는 경계를 찾으려는 태도
2. 대표적인 경계는 접선, 점근선, 불연속점등이 있다. (이 외에 기울기의 직선의 기울기가 변하는 순간도 출제소재)
3. 움직일 수 있는 경계인지 고정되어 있는 경계인지 체크한다.
4. 경계끼리 겹쳐졌을 때, 경계가 하나로 줄어드는지 두 경계가 만나 아예 사라지는지 체크한다.

EX02

[수능완성 실전모의 5회 30번]

대표 EBS 연계 문항 (표현방식 수정)

두 실수 m, k $(k>-e^2)$과 함수 $f(x)=m(x-4)$에 대하여 방정식 $f(x)=\ln(x-4)$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(m)$이라 하고, x에 대한 방정식 $f(x)=e^{|x|-2}+k$의 실근 중 4보다 작은 서로 다른 실근의 개수를 $h(m)$이라 하자. 함수 $g(m)+h(m)$이 $m=a$에서 불연속인 a의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱이 $\frac{t}{e^s}$일 때, $s\times t$의 값을 구하시오.

3. 교육과정변화에 따른 유형변화 다변수 적분

(중요도 ★★★★★)

x, y외에 t를 사용한 복잡한 수식을 처리하는 매개변수 미분이 교육과정변화에 따라 이동하여 (기하와 벡터→미적분) 연계교재에 많이 추가된 유형이 있다. 다 변수 적분이다. 작년과 제 작년 연계교재에는 단 한문제도 없었다. 심지어 대표기출도 3월 교육청과 사관학교 기출이다.. (둘 다 30번으로 출제) 그런데 올해는 2문항 정도가 관찰되었다. 대표문항을 다뤄보자.

EX03

대표 EBS 연계 문항 (표현방식 수정)

$0 \le x \le \pi$일 때, 함수

$$f(x) = \int_0^{\pi} |\sin(t-x) - \sin 2t|\, dt$$

의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은?

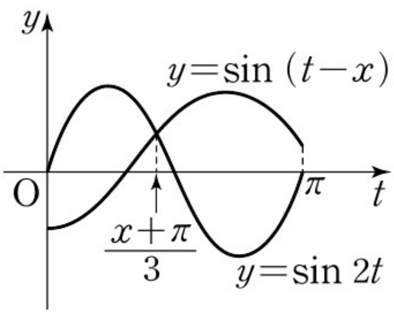
EX03

$0 \le x \le \pi$일 때, 함수

$$f(x)=\int_0^{\pi}|\sin(t-x)-\sin 2t|\,dt$$

의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은?

dt를 통해 피적분함수의 변수가 t임을 파악 t축에 대하여 각각의 그래프를 교점에 유의하여 그린다.



($t=\dfrac{x+\pi}{x}$에서 교점을 갖는 것을 발견)

그러므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\pi}|\sin(t-x)-\sin t 2t|\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\{\sin 2t-\sin(t-x)\}dt+\int_{\frac{x+\pi}{3}}^{\pi}\{\sin(t-x)-\sin 2t\}dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2t+\cos(t-x)\right]_0^{\frac{x+\pi}{3}}+\left[-\cos(t-x)+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{x+\pi}{3}}^{\pi} \\ &= 3\cos\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+1 \end{aligned}$$

최댓값은 $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{\pi}{3}=0$일 때, 즉 $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $M=4$, 최솟값은 $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$일 때, 즉 $x=0$ 또는 $x=\pi$일 때 $m=\dfrac{5}{2}$

이다. 따라서 $M+m=\dfrac{13}{2}$

<MEMO>

EX03+

[연습용 심화문항]

함수 $f(x)=x^2e^x$에 대하여 $x \geq 0$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^1 |f(t)-tx|\,dt$$

는 $x=a$에서 극값을 갖는다. $a=k\times e^k$일 때, $16k^2$의 값을 구하시오.

4. 기하적인 상황에서 함수를 정의

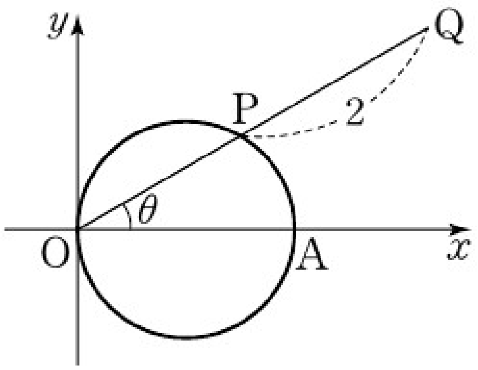
(중요도 ★★★★)

3번과 마찬가지로 교육과정변화에 따른 단원이동으로 출제가능성이 높아진 소재입니다. 기하적인 상황으로 함수를 정의하게 한 뒤, 음함수의 미분법이나 매개변수의 미분법을 사용하게 합니다

EX04

[수능특강 75Page]

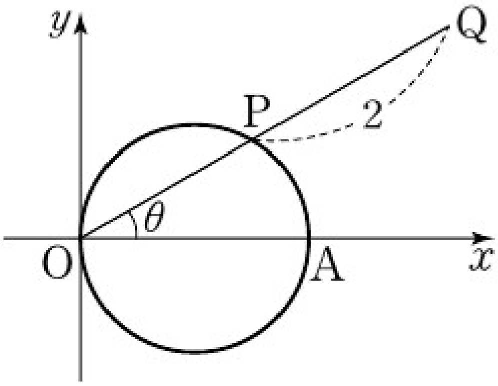
그림과 같이 두 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(2,0)$을 지름의 양 끝으로 하는 원 위의 점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자. 반직선 OP위의 점 Q가 $\overline{\mathrm{PQ}}=2$를 만족시킨다. $\angle \mathrm{POA}=\theta$일 때, 점 Q의 y좌표를 $f(\theta)$라 하자. $f(\theta)$의 최댓값은?



EX04+

[변형문제]

그림과 같이 두 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(2,0)$을 지름의 양 끝으로 하는 원 위의 점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자. 반직선 OP위의 점 Q가 $\overline{\mathrm{PQ}}=2$를 만족시킨다. $\angle\mathrm{POA}=\theta$일 때, 선분 AQ의 길이를 $f(\theta)$라 하자. $y=f(\theta)$위의 점$\left(\alpha, \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$에서의 접선의 기울기는?



① $\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ④ $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

5. 역함수의 미분법 + 여러 가지 적분법

(중요도 ★★★★★)

앞서 말했듯 9월 모의평가는 미적분 위주의 출제를 예상합니다. 아직 물어보지 못하고 평가하지 못한 항목이 너무 많습니다. 그러나 3개의 과목(수I, 미적분, 확률과 통계)을 10문제씩 골고루 출제하는 규정은 준수해야 하므로 한 문제에 여러 가지 개념을 녹여 출제할 가능성이 높다고 생각합니다. (예시: 6평 20번)

역함수의 관계식 $f(g(x))=x$를 이용. 적분 식을 변형하는 문제는 지금까지 많이 접해보았을 것입니다. 제가 예상하는 문항은 이와 조금 다릅니다. 역함수의 관계식 $f(g(x))=x$뿐만 아니라 역함수의 미분법 $f'(g(x))\times g'(x)=1$를 이용한 적분 식을 변형문제를 예상합니다.

EX05

[수능완성 93Page]

열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan x$의 역함수를 $g(x)$라 하자.

$$\int_0^1 x\cos^2 g(x)\,dx$$

의 값은?

EX05

열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan x$의 역함수를 $g(x)$라 하자.

$$\int_0^1 x\cos^2 g(x)dx$$

의 값은?

<MEMO>

$f(g(x))=x$, $f'(g(x))\times g'(x)=1$을 풀이 시작 전에 적는 것을 습관화.
(익숙한 풀이알고리즘은 실수를 없애고 풀이시간을 줄여준다.)

$f'(g(x))=\dfrac{1}{\cos^2 g(x)}=\dfrac{1}{g'(x)}$이므로, $\cos^2 g(x)=g'(x)$

$\displaystyle\int_0^1 x\cos^2 g(x)dx=\int_0^1 x\,g'(x)dx$

$\displaystyle=[xg(x)]_0^1-\int_0^1 g(x)dx$ ($f(g(x))=x$를 언제 사용할 지 계속 생각한다.)

$x=f(t)$로 치환하자.

$\displaystyle=g(1)-\int_0^{\frac{\pi}{4}} tf'(t)dt$

$\displaystyle=\frac{\pi}{4}-[tf(t)]_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)dt$

$\displaystyle=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+[-\ln(\cos t)]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\dfrac{1}{2}\ln 2$

6. tan 덧셈정리 + 무한등비급수

(중요도 ★★)

기하적인 부분의 성취도를 파악할 수 있는 유형은

1. 무한등비급수	2. 삼각함수 덧셈정리
3. 삼각함수 극한 도형 활용	4. 사인법칙 코사인법칙
5. 기하적인 상황에서 함수를 정의	6. 기하 상황으로 정의된 수열

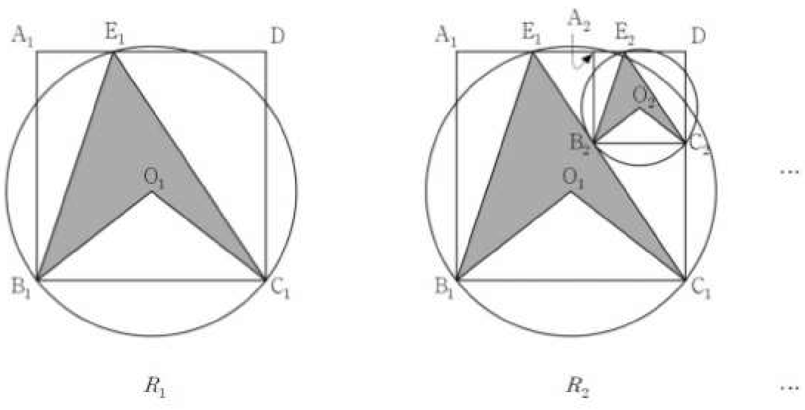
등이 있는데 이를 각각 모두 출제하여 5문제를 할당할 수는 없고 어느 쪽에 치우쳐서 물어볼 수 없으니, 한 문제에 복수의 유형을 녹여서 출제할 것이라고 4월부터 밀고 있다. 이 중에서도 출제가 잘 되지 않기로 유명한 삼각함수 덧셈정리는 무한등비급수와 같이 녹아들기 좋은 소재이다. 그렇기 때문에 직선도형으로 무한등비급수를 $\tan$법으로 풀도록 꾸준히 훈련했다. 이 때문에 탄젠트 덧셈정리가 녹아있어도 어려움 없이 풀 수 있다.

EX06

[2021학년도 사관학교]

그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 $A_1B_1C_1D$ 에서 선분 A_1D 를 $1:2$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 세 점 B_1, C_1, E_1을 지나는 원의 중심을 O_1이라 하자. 삼각형 $E_1B_1C_1$의 내부와 삼각형 $O_1B_1C_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

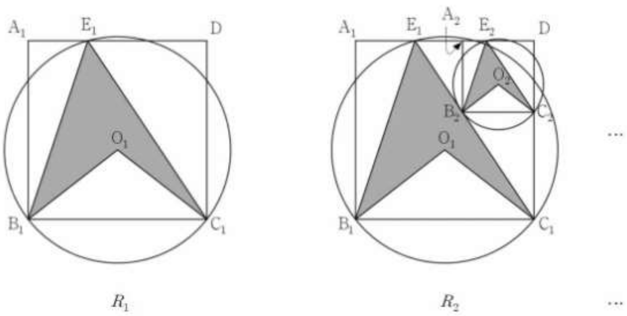
그림 R_1에서 선분 E_1D 위의 점 A_2, 선분 E_1C_1 위의 점 B_2, 선분 C_1D 위의 점 C_2와 점 D를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D$를 그린다. 정사각형 $A_2B_2C_2D$ 에서 선분 A_2D를 $1:2$로 내분하는 점을 E_2라 하고, 세 점 B_2, C_2, E_2를 지나는 원의 중심을 O_2라 하자. 삼각형 $E_2B_2C_2$의 내부와 삼각형 $O_2B_2C_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



EX06

그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 $A_1B_1C_1D$ 에서 선분 A_1D 를 $1:2$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 세 점 B_1, C_1, E_1을 지나는 원은 중심을 O_1이라 하자. 삼각형 $E_1B_1C_1$의 내부와 삼각형 $O_1B_1C_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 E_1D 위의 점 A_2, 선분 E_1C_1 위의 점 B_2, 선분 C_1D 위의 점 C_2와 점 D를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D$를 그린다. 정사각형 $A_2B_2C_2D$ 에서 선분 A_2D를 $1:2$로 내분하는 점을 E_2라 하고, 세 점 B_2, C_2, E_2를 지나는 원의 중심을 O_2라 하자. 삼각형 $E_2B_2C_2$의 내부와 삼각형 $O_2B_2C_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



<MEMO>

$\angle A_1B_1E_1=\alpha$, $\angle DC_1E_1=\beta$라 하면, $\angle B_1E_1C_1=\alpha+\beta$이고, 원주각을 이용하면 $\angle B_1O_1C_1$가 이등변 삼각형 $B_1O_1C_1$의 수직이등분선에 반으로 나눠지고 그것이 $\alpha+\beta$인 것을 알 수 있다.

$\tan\alpha=\frac{1}{3}$, $\tan\beta=\frac{2}{3}$에 의해

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=\frac{9}{7}\text{이다.}$$

이를 통해 이등변 삼각형 $B_1O_1C_1$에서 점 O_1과 선분 B_1C_1사이의 거리가 $\frac{7}{3}$이고, 이등변 삼각형 $B_1O_1C_1$의 넓이 7을 구해 초항을 구할 수 있다.

7. 사인법칙 + 삼각함수극한 도형 활용

(중요도 ★★★★)

6번과 같은 이유로 선정하였습니다. 사인법칙은 삼각함수극한 도형 활용에 녹이기 쉽습니다. 그러나 타 강사님들이 많이 언급하시는 '사인법칙에 의한 길이 비 관계'를 강조하고 싶은 것은 아닙니다.

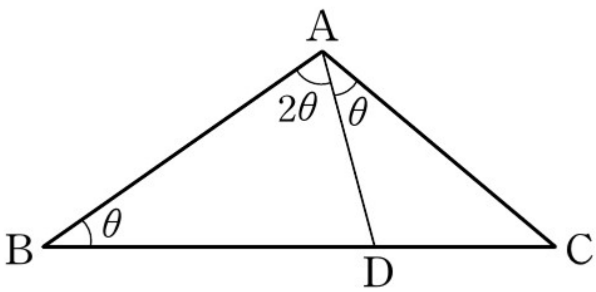
EX07

[수능완성 실전모의평가 3회 27번]

사인법칙에 의한 길이 비 관계 예시 : EBS 대표문항

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\angle\mathrm{CAB}=3\theta$, $\angle\mathrm{ABC}=\theta$인 삼각형 ABC가 있다. 선분BC위의 점 D를 $\angle\mathrm{DAB}=2\theta$, $\angle\mathrm{CAD}=\theta$가 되도록 잡고, 선분CD의 길이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}f(\theta)=k$일 때, $60k$의 값을 구하시오.

$\left(\text{단}, 0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$



*** 사인법칙에 의한 길이 비 관계**

사인법칙을 사용하면, $\lim_{\theta\to0+}$에서 수렴하는 길이 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{BD}}=1:2$이고, $\lim_{\theta\to0+}$에서 $\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AB}}$ 가 성립하므로 $\lim_{\theta\to0+}$에서 $\overline{\mathrm{AD}}=1$, $\overline{\mathrm{BD}}=2$로 수렴하는 것을 알 수 있습니다.

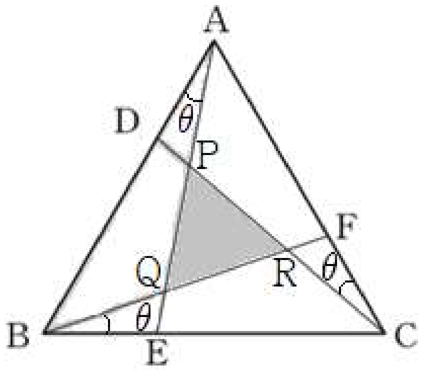
그러나 위 스킬은 너무 대중화 되어있고, 사인법칙보다는 극한에 치중되어 있는 내용이라 생각합니다. 그러므로 다음페이지에 준비되어있는 문항으로 연습해 봅시다. EBS 문항을 변형하여 만들었습니다.

EX07+

[수능특강 24Page, Level2]

EBS 변형 - 무한등비급수 -> 삼각함수 극한 도형 활용

그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 정삼각형 ABC에서 AB, BC, CA 위의 점 D, E, F를 $\angle ACD = \angle BAE = \angle CBF = \theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AE, CD의 교점을 P, 두 선분 AE, BF의 교점을 Q, 두 선분 BF, CD의 교점을 R라 하자. 삼각형 PQR의 넓이가 $S(\theta)$일 때, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}-} \frac{S(\theta)}{\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)^2}$의 값은?



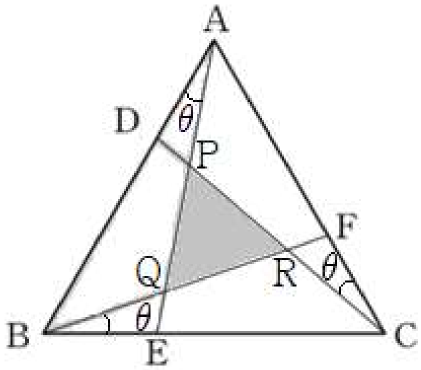
① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

EX07+

[수능특강 24Page, Level2]

EBS 변형 - 무한등비급수 -> 삼각함수 극한 도형 활용

그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 정삼각형 ABC에서 AB, BC, CA 위의 점 D, E, F를 $\angle ACD = \angle BAE = \angle CBF = \theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AE, CD의 교점을 P, 두 선분 AE, BF의 교점을 Q, 두 선분 BF, CD의 교점을 R라 하자. 삼각형 PQR의 넓이가 $S(\theta)$일 때, $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}-} \frac{S(\theta)}{\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)^2}$의 값은?



① 1　② $\sqrt{3}$　③ 3　④ $3\sqrt{3}$　⑤ 9

삼각형 ABQ에서 사인법칙을 사용하자.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin(\angle AQB)} = 2 = \frac{\overline{BQ}}{\sin\theta} = \frac{\overline{AQ}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}$$ 에서 $\overline{BQ} = 2\sin\theta$, $\overline{AQ} = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

이때, 삼각형들의 합동관계에 의해 $\overline{AQ} = \overline{BR}$이고, $\overline{QR} = \overline{BR} - \overline{BQ} = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) - 2\sin\theta$를 얻는다.

한편, $\overline{QR} = x(\theta)$라 하면, $S(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{4}\{x(\theta)\}^2$인데, 수렴하는 극한에서

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}-} \frac{S(\theta)}{\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}-} \frac{\{x(\theta)\}^2}{\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left\{\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}-} \frac{x(\theta)}{\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}\right\}^2$$ 이 일반적으로 성립하므로

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}-} \frac{x(\theta)}{\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)} = 2 \times \lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}-} \frac{\sin\theta - \sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)} = 2 \times \sqrt{3}$$

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}-} \frac{S(\theta)}{\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$$

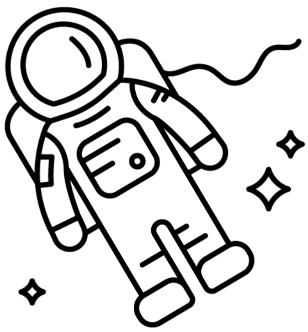
<MEMO>

2021 수능대비

우주설 Final 0주차

(2) 9월 모평대비 중요도 - 확통

(1) 9월 모평대비 중요도 - 미적분



(2) 9월 모의평가 경향예측 (확률과 통계)

1. 좌표평면상의 독립시행의 확률

(중요도 ★★★★★)

좌표평면위의 점 P가 움직이는 상황을 설정한 확률과 통계 문항은 수능특강에 3문항, 수능완성에 2문항 수록되어 있으며 19학년도 수능 및 20학년도 사관학교 기출에도 출제된 소재입니다. 절대 어려운 소재는 아니지만, 시험 전 까지 익숙해져야 하는 소재입니다. (단순히 주사위 및 동전에 관련된 확률을 묻는 문제보다 여러 가지 아이디어를 녹일 수 있어 활용가치가 높습니다.)

EX01

[수능특강 51page, 예제4번]

대표 EBS 연계 문항 - 다음의 상황설정을 통해 출제가 원하는 해석 아이디어는?

좌표평면 위의 두 점 P, Q에 대하여 다음 시행을 한다.

> 흰 공 3개, 검은 공 1개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내 흰 공이 나오면 점 P를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 1만큼 이동시키고, 검은 공이 나오면 점 Q를 x축 방향으로 -1만큼, y축 방향으로 2만큼 이동시킨다. 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣는다.

위의 시행을 5번 반복할 때, 점 $(1, 4)$에서 출발한 점 P와 점 $(6, 0)$에서 출발한 점 Q가 같은 점에 있을 확률은?

EX02

[수능완성, 129P]

대표 EBS 연계 문항 - 다음의 상황설정을 통해 출제가 원하는 해석 아이디어는?

좌표평면의 원점에 점 A가 있다. 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

동전을 한 번 던져 앞면이 나오면 점 A를 x축의 양의 방향으로 1만큼, 뒷면이 나오면 점 A를 y축의 양의 방향으로 2만큼 이동시킨다.

위의 시행을 6번 반복한 후 점 A의 좌표는 (x, y)라 할 때, 부등식 $1 \le y \le x$를 만족시킬 확률은?

① $\frac{21}{64}$ ② $\frac{11}{32}$ ③ $\frac{23}{64}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{25}{64}$

EX01

좌표평면 위의 두 점 P, Q에 대하여 다음 시행을 한다.

> 흰 공 3개, 검은 공 1개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내 흰 공이 나오면 점 P를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 1만큼 이동시키고, 검은 공이 나오면 점 Q를 x축 방향으로 -1만큼, y축 방향으로 2만큼 이동시킨다. 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣는다.

위의 시행을 5번 반복할 때, 점 $(1,4)$에서 출발한 점 P와 점 $(6,0)$에서 출발한 점 Q가 같은 점에 있을 확률은?

=> 흰 공이 나올 확률 $\frac{3}{4}$, 검은 공이 나올 확률 $\frac{1}{4}$에 대하여 흰 공이 나오는 횟수를 k, 검은 공이 나오는 횟수를 $5-k$라 하면, 점 P의 좌표는 $(1+k, 4+k)$가 되고, Q의 좌표는 $(6-(5-k), 0+2(5-k)) = (k+1, 10-2k)$ 가 되는데 P와 점 Q의 좌표가 같아지기 위한 k의 값은 2이다. 결국 5번의 시행 중 흰 공을 2번 뽑을 확률을 묻는 것.

한 문자로 표현할 수 있는가?

$$ {}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{10\times 3^2}{4^5} = \frac{45}{512} $$

EX02

좌표평면의 원점에 점 A가 있다. 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전을 한 번 던져 앞면이 나오면 점 A를 x축의 양의 방향으로 1만큼, 뒷면이 나오면 점 A를 y축의 양의 방향으로 2만큼 이동시킨다.

위의 시행을 6번 반복한 후 점 A의 좌표는 (x, y)라 할 때, 부등식 $1 \le y \le x$를 만족시킬 확률은?

=> 위와 마찬가지로 앞면이 나오는 횟수 k에 대하여 k에 대한 부등식 $1 \le 2(6-k) \le k$ 를 풀면, $4 \le k \le \frac{11}{2}$를 얻는다.

결국 앞면이 4번 또는 5번 나올 확률을 구하는 것 - $\frac{{}_6\mathrm{C}_4 + {}_6\mathrm{C}_5}{2^6} = \frac{21}{64}$

단순 아이디어 형태가 아닌 제약조건을 추가한 형태가 더 어렵고 출제가능성도 높다. 이는 바로 뒤에서 다루자.

2. n번째에 / 처음으로

(중요도 ★★★★★)

이 역시 연계교재에 4문항 출제되어 있고, 2020학년도 9월 모의평가 가/나형 공통출제 2019학년도 9월 모의평가 나형 출제 2019학년도 수학능력시험 나형 출제 되었던 소재입니다. 대표적인 해석관점 2가지를 소개합니다.

EX03

[수능완성 실전모의 2회]

대표 EBS 연계 문항 (표현방식 수정)

좌표평면을 게임판으로 하여 다음 규칙에 따라 게임이 진행된다.

(1) 원점을 출발점으로 한다.
(2) 동전을 던져 앞면이 나오면 x축 양의방향으로 1만큼 이동하고 뒷면이 나오면 y축 양의 방향으로 1만큼 이동한다.
(3) 직선 $y=x+3$위의 점에 도달하면 더 이상 동전을 던지지 않고 게임을 끝내고, 그렇지 않으면 동전을 계속 던져서 게임을 진행한다.

동전을 9번 던져서 게임이 끝날 확률은 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

EX03

좌표평면을 게임판으로 하여 다음 규칙에 따라 게임이 진행된다.

(1) 원점을 출발점으로 한다.
(2) 동전을 던져 앞면이 나오면 x축 양의방향으로 1만큼 이동하고 뒷면이 나오면 y축 양의 방향으로 1만큼 이동한다.
(3) 직선 $y=x+3$위의 점에 도달하면 더 이상 동전을 던지지 않고 게임을 끝내고, 그렇지 않으면 동전을 계속 던져서 게임을 진행한다.

동전을 9번 던져서 게임이 끝날 확률은 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

＊ 해석관점 : 결론에서부터 역으로 관찰하기

n번째에 사건이 발생하기 위해서는 $(n-1)$번째까지 준비가 끝나거나 또는 $(n-1)$번째에는 특수한 사건이 발생해야한다는 성질을 이용한다.

좌표평면상에 상황을 표현하여 관찰하자. 9번의 시행 후 $(3,6)$에 도달하고 싶다. 그렇다면, 8번의 시행 후 점의 위치를 생각해보자. $(2,6)$ 또는 $(3,5)$인데 $(2,6)$이라면, 8번의 시행 이전에 직선 $y=x+3$에 도달하므로 불가하다.

8번의 시행 후 $(3,5)$에 도달해야 함을 알 수 있고, 마찬가지로 7번의 시행 후 $(3,4)$에 도달해야 함을 알 수 있다.

직선 $y=x+3$위의 점에 도달하지 않고,$_{(1)}$ 7번의 시행 후 $(3,4)$에 도달 할 확률을 p라고 한다면, 정답은 $p\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

p의 값을 구해보자. 밑줄 친 (1)을 고려하지 않고 구한확률 ${}_7C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{35}{128}$에서 $(0,3)$ 또는 $(1,4)$를 지나 $(3,4)$에 도달할 확률을 빼자. $(0,3)$을 지나 $(3,4)$에 도달할 확률 : $p_1={}_3C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{128}$,

$(1,4)$를 지나 $(3,4)$에 도달할 확률 : $p_2={}_5C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{128}$,

$(0,3)$과 $(1,4)$를 모두 지나 $(3,4)$에 도달할 확률 : $p_3={}_3C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2}{128}$에 대하여

$(0,3)$ 또는 $(1,4)$를 지나 $(3,4)$에 도달할 확률은 $p_1+p_2-p_3$이다.

$\frac{4+5-2}{128}=\frac{7}{128}$, 따라서 $p=\frac{35}{128}-\frac{7}{128}=\frac{7}{32}$이고,

정답은 $\frac{7}{32}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{128}$이다.

이는 다음 페이지의 수능특강 54P Level 2에서 연습할 수 있었다.

EX04

[수능특강 54P Level2]

대표 EBS 연계 문항

좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 2 이하이면 점 P를 x축 방향으로 1만큼, 나온 눈의 수가 3 이상이면 점 P를 y축 방향으로 1만큼 이동시키기로 한다. 한 개의 주사위를 6번 던져서, 차례대로 점 P를 이동시킬 때, 점 P가 점 (1,2)를 지나서 점 (3,3)으로 이동될 확률은?

① $\frac{4}{81}$ ② $\frac{2}{27}$ ③ $\frac{8}{81}$ ④ $\frac{10}{81}$ ⑤ $\frac{4}{27}$

EX05

[2018년 9월 나형 20번]

대표 기출

상자 A 와 상자 B 에 각각 6 개의 공이 들어 있다. 동전 1 개를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전을 한 번 던져 앞면이 나오면 상자 A 에서 공 1 개를 꺼내어 상자 B 에 넣고,
> 뒷면이 나오면 상자 B 에서 공 1 개를 꺼내어 상자 A 에 넣는다.

위의 시행을 6 번 반복할 때, 상자 B 에 들어 있는 공의 개수가 6 번째 시행 후 처음으로 8 이 될 확률은?

① $\frac{1}{64}$ ② $\frac{3}{64}$ ③ $\frac{5}{64}$ ④ $\frac{7}{64}$ ⑤ $\frac{9}{64}$

[해설]

상자 A, 상자 B에 들어있는 공의 개수를 편의상 (a,b)꼴로 표현하자.

핵심: 6번째 시행 후 상자에 들어있는 공의 개수가 $(4,8)$가 되려면
5번째 시행 후 상자에 들어있는 공의 개수가 $(5,7)$이어야 하고,
4번째 시행 후 상자에 들어있는 공의 개수가 $(6,6)$이어야 한다.

3번째 시행 후에는 $(5,7)$, $(7,5)$가 모두 가능하다. 이렇게 케이스가 분류되면 역으로 관찰의 의미가 사라진다.

그러므로 케이스가 분류되지 않을 때 에만 역으로 접근한다는 기준을 확보할 수 있다.

4번째 시행 후 상자에 들어있는 공의 개수가 $(6,6)$일 확률 p에 대하여 정답은 $p\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$이다. p를 구하여 보자.

4번의 시행을 하는 도중에 공의 개수가 $(4,8)$이 되는 것을 고려하지 않고, 단순하게 구한 확률 ${}_4C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$에서

도중에 $(4,8)$이 되었다가 4번째 시행후 $(6,6)$이 되는 확률 ${}_2C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_2C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$을 빼주면, $p=\frac{3}{8}-\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$이다.

따라서 정답은 $\frac{5}{16}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{64}$

케이스가 분류된다. : 역으로 관찰의 메리트가 없다.
지금까지 강조했듯이 케이스가 분류되기 시작하면 역으로 관찰의 의미가 사라지므로 다른 관점으로 생각해야 한다.

EX06

[수능특강 13page Level2]

대표 EBS 연계 문항 (표현방식 수정)

좌표평면 위의 점 P는 한 번 이동할 때마다 다음 네 가지 중 한 가지 방법으로 이동한다.

- x축의 방향으로 1만큼 평행 이동한다.
- x축의 방향으로 -1만큼 평행 이동한다.
- y축의 방향으로 1만큼 평행 이동한다.
- y축의 방향으로 -1만큼 평행 이동한다.

원점 O에서 출발한 점 P가 5번 이동한 후에 처음으로 점 $(2, 1)$에 도착하는 경우의 수는?

[해설]
4번째 이동 후 갈수 있는 곳이 너무 많다. (케이스가 분류된다.) 그러므로 역으로 관찰하지 않는다. (물론 가능은 하다.)
5번 이동 후 $(2,1)$에 도착하는 경우의 수를 n_1
3번째에 $(2,1)$에 도착하였다가 5번째에 $(2,1)$에 도착하는 경우의 수를 n_2라 하면, n_1-n_2를 통해 원하는 경우의 수를 구할 수 있다.

n_1: 네 종류의 문자 $\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow$ 에 대하여

$\rightarrow$ 3개, $\leftarrow$ 1개, $\uparrow$ 1개를 나열하는 경우의 수 : $\dfrac{5!}{3!}=20$

$\rightarrow$ 2개, $\downarrow$ 1개, $\uparrow$ 2개를 나열하는 경우의 수 : $\dfrac{5!}{2!2!}=30$

$n_1=20+30=50$

n_2: 네 종류의 문자 $\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow$ 에 대하여

$\rightarrow$ 2개, $\uparrow$ 1개를 나열하는 경우의 수 : $\dfrac{3!}{2!}=3$

$\rightarrow$ 1개, $\leftarrow$ 1개를 나열하는 경우의 수 : $2!=2$

$\uparrow$ 1개, $\downarrow$ 1개를 나열하는 경우의 수 : $2!=2$

$n_2=3\times(2+2)=12$ -> $50-12=38$

3. 문장형태로 출제한 독립문항

(중요도 ★★★★★)

독립이 비 킬러 소재로 채택된다면 기존 3점 문항들처럼 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$등의 기호를 이용한 문항이 아닌 문장형태로 상황을 제시하는 문항이 출제될 가능성이 매우 높다. 출제확률이 매우 높은 소재 중 하나이다.

EX07

[수능완성 실전모의고사 1회]

침착하게 읽고 $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)$ 를 적용하자.

주머니에 크기와 모양이 같은 n개의 상자가 들어 있다. 그 중에서 m개는 흰색 상자이고 나머지는 검은색 상자이며 3개의 흰색 상자와 5개의 검은색 상자에는 당첨 제비가 각각 하나씩 들어있다. 주머니에서 임의로 한 개의 상자를 꺼낼 때 당첨 제비가 들어 있는 상자가 나오는 사건을 A, 흰색 상자가 나오는 사건을 B라 하자. 두 사건 A, B가 서로 독립이 되도록 하는 두 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. (단, $10 \le m < 100$이고, $n-m \ge 5$)

EX07+

연습문항

1부터 $3n$까지 자연수가 각각 한 개씩 적힌 공 $3n$개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 3의 배수가 나오는 사건을 A, 5의 배수가 나오는 사건을 B 라 하자. 두 사건 A, B 가 서로 독립이 되도록 하는 100이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. (단, $n > 5$)

4. 이산확률변수와 합의 기호 $\sum$

(중요도 ★★★★)

연계교재에 있는 확률과 통계 문항 중 의외로 많이 틀리는 문제입니다. 쉽다고 알려진 단원을 쉽게 공부하는 일반 수험생들의 특성상 출제되면 당황할 수 있다고 생각되어 채택하였습니다.

EX08

[수능특강 71page]

대표 EBS 연계문항

이산확률변수 X가 갖는 값은 $1, 2, 3, 4, 5$이고 이산확률변수 Y가 갖는 값은 $1, 3, 5, 7, 9$이다. 상수 a에 대하여 $\mathrm{P}(Y=2i-1)=a\times\mathrm{P}(X=i)+a\ (i=1, 2, 3, 4, 5)$이고, $\mathrm{E}(X)=\frac{10}{3}$일 때, $\mathrm{E}(9Y+5)$의 값은?

EX08+ (1)

[수능특강 71page]

이전 문항을 주제에 따라 2문항으로 분리하였다.

이산확률변수 X가 가지는 값이 0부터 4까지 정수이고 $\mathrm{P}(X=k)+a=\mathrm{P}(X=k+1)$ $(k=0,1,2,3)$ 일 때, $\mathrm{P}(X=2)$의 값은?

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

EX08+ (2)

[2017년 9월 가형, 나형]

연습문항

두 이산확률변수 X와 Y가 가지는 값이 각각 1부터 5까지 자연수이고

$$P(Y=k)=\frac{1}{2}P(X=k)+\frac{1}{10}\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

이다. $E(X)=4$일 때, $E(Y)=a$이다. $8a$의 값을 구하시오.

5. 분산과 정규분포의 그래프 Σ

(중요도 ★★)

주요내용이라기 보다는 연계교재에 있는 문항 중 가장 당황할만한 문제라 생각하여 마지막에 짧게 첨부합니다.

EX09

[수능완성 실전모의평가 2회]

대표 EBS 연계문항

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$를 따르는 확률변수가 X인 모집단에서 임의 추출한 크기가 n $(n \geq 2)$인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 실수 t에 대하여 함수 $F(t)$를

$$F(t) = \mathrm{P}(X \geq t) - \mathrm{P}(\overline{X} \geq t)$$

라 할 때, 함수 $y = F(t)$의 그래프가 직선 $y = k$와 한 점에서만 만나도록 하는 서로 다른 모든 실수 k의 개수는?

9월 모의평가를 앞두고의 조언

1. 방심하지 마라.

시험을 치는 도중에 조금도 방심하지 마라.
“19문제 풀었는데 70분이나 남았잖아?”
라고 방심하는 순간 그 시험은 이미 망했다.
출제자들은 바보가 아니다.
100분에 걸맞는 시험을 준비한다.
시간이 부족할 확률이 99%이다.

2. 시간부족에 의문을 갖지 마라.

비킬러들을 많이 출제한 빡빡한 시험지를 만나게 될 것입니다.
시간부족은 지극히 당연한 현상입니다. 100명중 99명이 부족합니다.
시간이 부족함에 의문을 갖지 말고, “그래. 예상했어.”라는 자세로 받아들이시길 바랍니다. 그렇다고 여유롭게 풀라는 뜻은 아니고
최선을 다하되 초조해 할 필요가 없다는 뜻입니다.
100점을 받으려고 하지 마시고 내가 받을 수 있는 최고점을
받기위해 노력합시다.
시간이 부족할 확률이 99%이다.

3. 구하는 것을 잘 읽으세요.

답을 구하려 하면 계산양이 많을 것이고
출제의도를 파악하려 한다면
계산양이 적당할 것입니다.
a와 b의 값을 각각 구할 수는 없지만,
a-b 나 ab는 구할 수 있는
평가원의 맞춤형 문제를 주의합시다.
작년부터 유독 많이 출제됩니다.

4. 자연수조건, 정수조건에 유의합시다.

핵심조건으로 작용할 수 있습니다. 잘 읽어봅시다.

5. 제발 넘어가세요.(씨..)

‘제발 넘어가세요.’ 라고 적었지만
본심은 ‘제’를 ‘시’로 수정해야합니다.
아니 요즘 누가 안 넘어간다고 저렇게 오버하냐?
생각할 수 있겠지만 그게 여러분일 수 있습니다.
막혔을 때, 몇 십분 뒤의 자신을 믿고
과감하게 넘어갈 수 있어야 1~4를 할 수 있습니다