제 2 교시

2021학년도 OIS (With 주예지T) 9월 모의평가 문제지

수학 영역(가 형)

홀수형

성명		수험번호					–				

○ 자신이 선택한 유형('가' 형/'나' 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

전설의 시작, 살아있었구나

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역(가 형)

홀수형

5지선다형

1. $\log_4 8$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

2. $\lim_{x \to 0} (x \cot 2x)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

3. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)$를 따르고 $\mathrm{V}(3X) = 40$일 때, n의 값은? [2점]

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

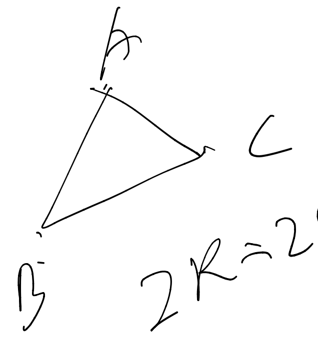
$n \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 9$

4. 삼각형 ABC에서

$$\overline{\mathrm{AC}} = 24 \sin B, \quad \sin A = \frac{7}{8}$$

일 때, 선분 BC의 길이는? [3점]

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21



$2R = 24$

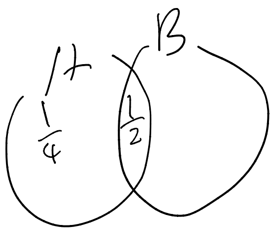
$\frac{\mathrm{BC}}{\frac{7}{8}} = 24$

5. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A^C \cup B) = \frac{3}{4}$$

일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$



$p(A\cap B) = \frac{1}{4}$

$\frac{p(A\cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$

6. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n = 2n-1$일 때, $\sum_{k=1}^{5} (a_k)^2$의 값은? [3점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

$a_1 = 1$ $1 + 4\times4$

$a_n = 2$

7. 매개변수 t $(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x = \sqrt{t}+2, \quad y = \frac{1}{t}+t-1$$

에서 $t=4$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\frac{15}{4}$ ② 4 ③ $\frac{17}{4}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{19}{4}$

$\frac{1}{2\sqrt{t}}$ $-\frac{1}{t^2}+1$

$\frac{1}{4}$ $\frac{15}{16}$

8. 곡선 $y=x(x-1)^4$의 변곡점의 x좌표는? [3점]

① $\frac{7}{20}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{9}{20}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{11}{20}$

$(x-1)^4+4x(x-1)^3$

$4(x-1)^3+4(x-1)^3+12x(x-1)^2$

$(x-1)^2(4(x-1)+4(x-1)+12x)$

$(8x-8+12x)$

$20x-8$

$x=\frac{2}{5}$

9. 3 이상의 자연수 n에 대하여 다항식 $(x+2)^n$의 전개식에서 x의 계수가 x^3의 계수의 2배일 때, n의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

${}_nC_k \times x^k \times 2^{n-k}$

$n\times 2^{n-1} = 2\times {}_nC_3 \times 2^{n-3}$

$2n=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

$12=(n-1)(n-2)$ $n=5$

4 3

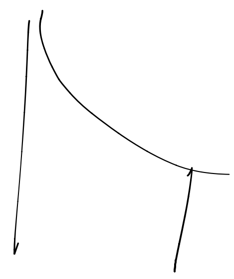
10. 함수

$$f(x)=k+(\log_3 2)^{x-1}$$

가 닫힌 구간 [0, 2]에서 최솟값 $\log_3 6$, 최댓값 M을 갖는다. $k+M$의 값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① $\log_3 18$ ② $\log_3 24$ ③ 3
④ $\log_2 9$ ⑤ $\log_2 12$

<1



$k+\log_3 2=\log_3 6$

$k=1$

$1+\log_2 3$

$\log_2 6$ +

$\log_2 12$

11. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=\frac{1}{4}$이고

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{3n-2a_n}=0 \quad (n\ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n이

$$a_n=\frac{n}{3^n+1} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=a_1=\frac{1}{4}$, (우변)$=\frac{1}{3^1+1}=\frac{1}{4}$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$a_k=\frac{k}{3^k+1}$이므로

$$\frac{a_{k+1}}{k+1}=\frac{a_k}{3k-2a_k}$$
$$=\frac{k}{\boxed{(가)}-2k}$$
$$=\boxed{(나)}$$

이다. 따라서 $a_{k+1}=\frac{k+1}{3^{k+1}+1}$이므로

$n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=\frac{n}{3^n+1}$이다.

$\frac{k}{3^k+1}$

$3k-2\frac{k}{3^k+1}$

$\rightarrow 3k\times(3^k+1)$

$\frac{1}{3^{k+1}+1}$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(4)\times g(3)$의 값은? [3점]

① $\frac{28}{3}$ ② 10 ③ $\frac{32}{3}$ ④ $\frac{34}{3}$ ⑤ 12

$12\times 82\times\frac{1}{82}$

12. $0\le x\le\pi$일 때, 방정식

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$\frac{7}{6}\pi$

을 만족시키는 모든 x의 값의 합을 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? [3점]

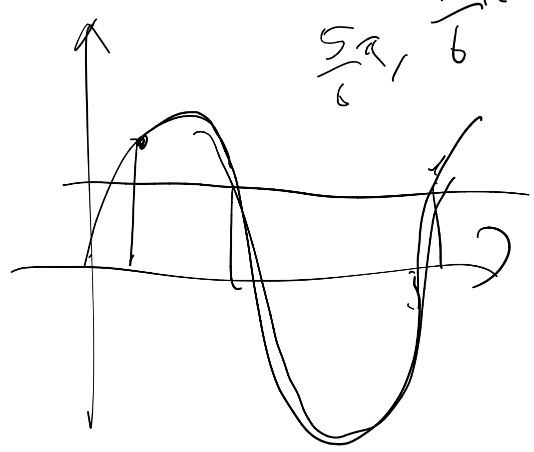
① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{3}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le 2\pi+\frac{\pi}{3}$

$\frac{13}{6}\pi=2\pi+\frac{\pi}{3}$

$\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$

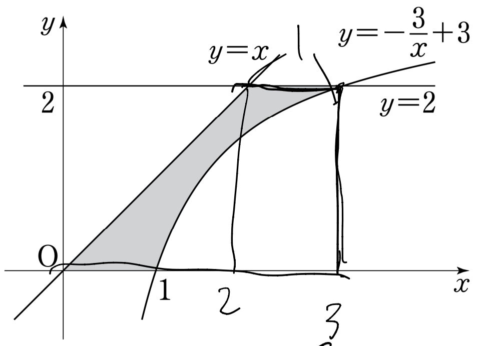
$\frac{3}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$



$\frac{7}{6}\quad \frac{14}{12}\pi$

13. 곡선 $y=-\frac{3}{x}+3$과 x축 및 두 직선 $y=x$, $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $4\ln 2-2$ ② $3\ln 2-1$ ③ $2\ln 3-1$
④ $3\ln 3-2$ ⑤ $4\ln 3-3$



$\left[-3\ln x+3x\right]_1^3$

$\cancel{\frac{1+3}{2}\times 2}$

$-3\ln 3+9-3$

$-3\ln 3+6$

4 $3\ln 3-2$

14. 두 집합

$$X=\{1,\ 2,\ 3\},\quad Y=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

에 대하여 X에서 Y로의 함수 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가

$$f(1)\times f(2)\times f(3)\geq 0$$

을 만족시킬 확률은? [4점]

$f(1)\times f(2)\times f(3)<0$

① $\frac{77}{108}$ ② $\frac{83}{108}$ ③ $\frac{89}{108}$ ④ $\frac{95}{108}$ ⑤ $\frac{101}{108}$

1 2 3

−2 −1 0 1 2 3

+ + −

− − −

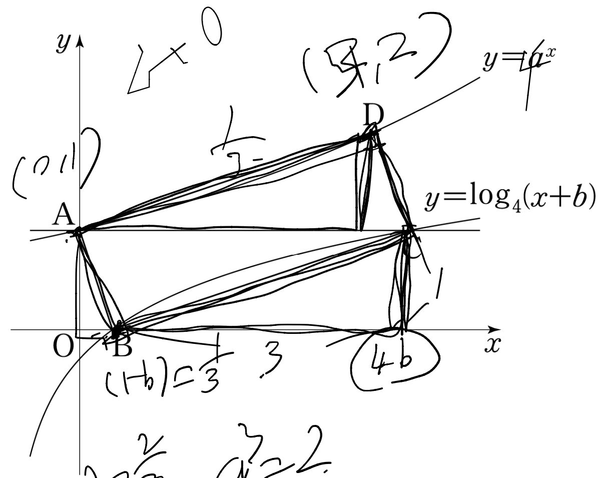
$\frac{62}{216}=\frac{31}{108}$

$2^3+3\times 2\times 3\times 3$

$8+54=62$

$\frac{77}{108}$

15. 그림과 같이 곡선 $y=a^x$ $(a>1)$이 y축과 만나는 점을 A, 곡선 $y=\log_4(x+b)$가 x축과 만나는 점을 B, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_4(x+b)$와 만나는 점을 C라 하자. 곡선 $y=a^x$ 위의 점 D에 대하여 사각형 ABCD가 직사각형일 때, $b\log_2 a$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]



① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{5}{18}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

16. $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{x}\frac{1}{\cos^3 t}\,dt$$

에 대하여 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\cos x\,dx$의 값은? [4점]

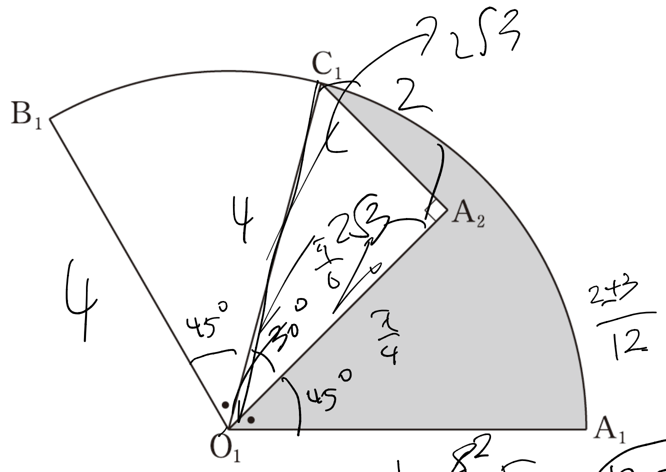
① -3 ② $-\frac{5}{2}$ ③ -2 ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -1

17. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 $\frac{2\pi}{3}$인 부채꼴 $O_1A_1B_1$이 있다. 호 A_1B_1 위의 점 C_1과 부채꼴 OA_1B_1의 내부의 점 A_2를 $\angle A_1O_1A_2 = \angle B_1O_1C_1$, $\angle O_1A_2C_1 = \frac{\pi}{2}$, $\overline{A_2O_1} : \overline{A_2C_1} = \sqrt{3} : 1$이 되도록 잡고, 호 A_1C_1과 세 선분 A_1O_1, O_1A_2, A_2C_1로 둘러싸인 부분인 ◸ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

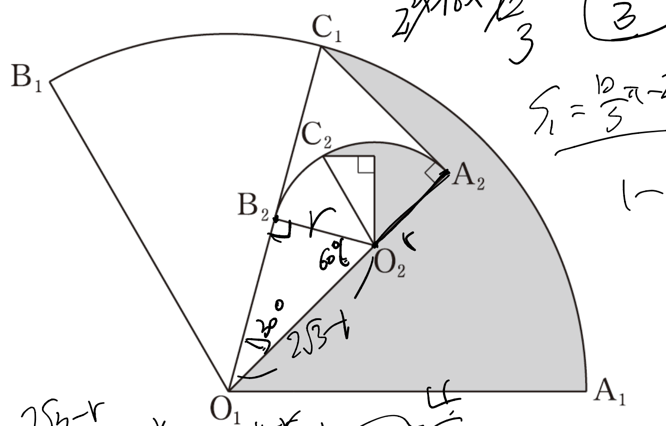
그림 R_1에 선분 O_1A_2 위의 점 O_2와 선분 O_1C_1 위의 점 B_2에 대하여 중심이 O_2, 중심각의 크기가 $\frac{2\pi}{3}$인 부채꼴 $O_2A_2B_2$를 그린다. 부채꼴 $O_2A_2B_2$에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 ◸ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{36\pi - 24\sqrt{3}}{11}$ ② $\frac{40\pi - 24\sqrt{3}}{11}$ ③ $\frac{42\pi - 24\sqrt{3}}{11}$

④ $\frac{38\pi - 24\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{40\pi - 24\sqrt{3}}{9}$

$S_1 = \frac{12}{3}\pi - 2\sqrt{3}$

$1 - \frac{1}{9}$

$1 - \frac{1}{12}$

$\frac{40\pi - 24\sqrt{3}}{11}$

18. 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여 부등식

$$P(X \le 28 - 9m) > P(X \ge m^2)$$

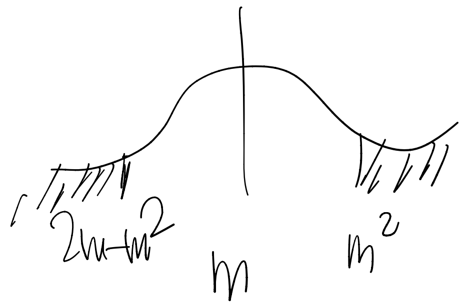
을 만족시키는 모든 자연수 m을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 m_1, m_2, m_3, m_4, $\cdots$라 하자. $m = m_3$일 때, $P(m_2 \le X \le m_4)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.2	0.0793
0.4	0.1554
0.6	0.2257
0.8	0.2881
1.0	0.3413

0.4206

① 0.3674 ② 0.4206 ③ 0.4435 ④ 0.4514 ⑤ 0.4967

$m^2 - m$ $(3, 5^2)$



$2 \le X \le 8$

$-0.2 \le Z \le 1$

$m - (m^2 - m) = 2m - m^2$

$2m - m^2 < 28 - 9m$

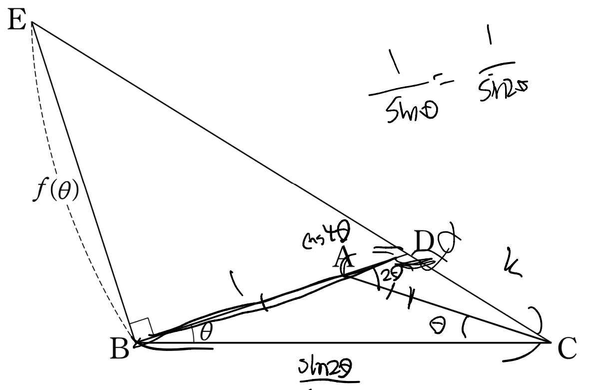
$m^2 - 11m + 28 > 0$

-4 -7

$m < 4,\ m > 7$

1 2 3 8 9 10 ..

19. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=1$, $\angle ABC=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 BA의 연장선 위에 $\overline{AD}=\cos 4\theta$인 점 D를 잡고, 선분 CD의 연장선 위에 $\angle ABE=\frac{\pi}{2}$인 점 E를 잡는다. 선분 BE의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+}\{\theta \times f(\theta)\}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이고, $\overline{BA}<\overline{BD}$이다.) [4점]



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

20. $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$에서 두 양수 m_1, m_2에 대하여 함수 $y=\tan 2x$의 그래프와 직선 $y=m_1\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y=\tan 2x$의 그래프와 직선 $y=m_2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$가 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.

$$\tan(\angle BAQ)=\tan(\angle PQA)=\frac{4}{\pi}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 두 점 A, P의 x좌표는 모두 $\frac{3\pi}{4}$보다 작다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $m_1=m_2=\frac{4}{\pi}$

ㄴ. 점 P의 x좌표를 p라 하면, $\frac{\pi}{3}<p<\frac{3\pi}{8}$이다.

ㄷ. 삼각형 BPQ의 넓이를 S라 하면, $\frac{3\pi}{4}<S<\frac{5\pi}{6}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 자연수 k에 대하여 구간 $[-k,\ \infty)$에서 정의된 함수

주기 4k

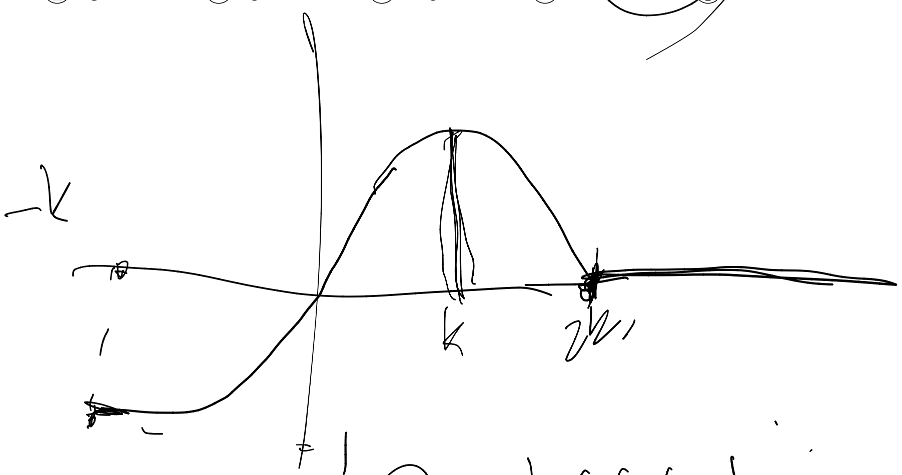
$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{\pi}{2k}x\right) & (-k\le x<2k)\\ 0 & (x\ge 2k)\end{cases}$$

가 있다. 다음 조건을 만족시키는 $-k$ 이상의 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수가 121일 때, k의 값은? [4점]

(가) $a+b+2c=4k$
(나) $\int_a^b f(x)\,dx=0$

① a=b ② a+b=0 ≤k ③ a,b ≥ 2k a 기준

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12



① $-k\le a\le -1$

$b=a$ $-k\le$ -1 2k까지

or $1\le$ $\le k$

② $a=0$ $b=0$ 1

③ $1\le a\le k$ $\le k$

$b=a$ or $-1\le b\le k$ 2k

④ $k+1\le a\le 2k$ $k-1$

⑤ $2k\le a$ $2k\le b$

$k^2+7k-120=0$

단답형

22. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{n^2+1}\right)\left(n+\dfrac{2}{n}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

3

23. 함수

$$f(x)=\frac{10x^2-1}{e^{x-1}}$$

에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(1)=9$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{20x}{10x^2-1}-1$

$\dfrac{f'(1)}{9}=\dfrac{20}{9}-1$

11

24. 부등식

$$\log_2 (x-2)^2 \le \log_2 x$$

을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

$x \neq 2,\ x > 0$

$(x-2)^2 \le x$

$x^2-5x+4 \le 0$

$1 \le x \le 4$

1 3 4

8

25. 첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_5 - S_3 = 12a_2$$

일 때, S_8의 값을 구하시오. [3점]

2^{n-1}

$a_4 + a_5 = 12a_2$

$r^3 + r^4 = 12r$

$r^3 + r^2 - 12 = 0$

$r = 2$

$2^8 - 1$

256

255

26. 어느 나라에서 작년에 운행된 버스의 하루 주행거리는 평균이 m, 표준편차가 12인 정규분포를 따른다고 한다. 이 나라에서 작년에 운행된 버스 중에서 임의추출한, 크기가 n인 표본을 조사하였더니 하루 주행거리의 표본평균의 값이 $\overline{x}$이었다. 이 결과를 이용하여, 이 나라에서 작년에 운행된 버스의 하루 주행거리의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하면 $250.08 \le m \le 257.92$이다. $n + \overline{x}$의 값을 구하시오.
(단, 주행거리의 단위는 km이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$로 계산한다.) [4점]

$\overline{x} = 254$

$7.84 = 2 \times 1.96 \times \frac{12}{\sqrt{n}}$

$n = 36$

290

27. 주머니 속에 1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 갑이 임의로 1개의 공을 꺼낸 후 을이 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다. 갑이 꺼낸 공에 적힌 자연수가 7 이상일 때, 갑과 을이 꺼낸 3개의 공에 적힌 자연수의 합이 홀수일 확률은 p이다. $140p$의 값을 구하시오.
(단, 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않는다.) [4점]

$\frac{2\times {}_4C_2}{9\times {}_8C_2} + \frac{2\times 9}{9\times {}_8C_2}$

$\frac{3}{9}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$\frac{12+27}{3\times {}_8C_2}$

홀 홀 홀

홀 짝 짝

① 갑이 홀

$2\times {}_4C_2 = 12$

② 갑이 짝

$1\times 5\times 3$ 15

$\frac{39\times 4}{3\times 8\times 7}$

$\frac{39}{12\times 7}$

$\frac{13}{28}\times 140$

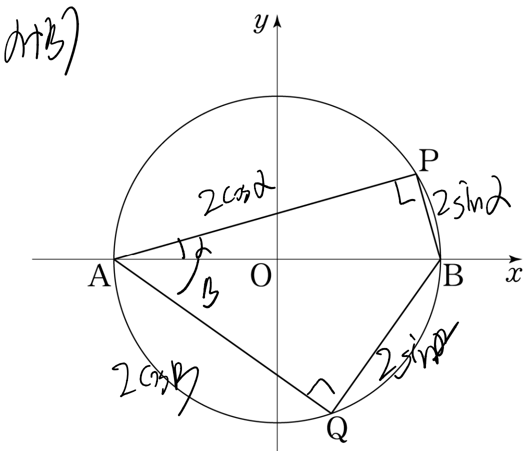
65

28. 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 두 점 P, Q가 각각 제1사분면, 제4사분면에 있다. 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$에 대하여

$$\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BQ}}=\frac{4\sqrt{3}}{9},\quad \overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{BP}}=\frac{4\sqrt{6}}{9}$$

일 때, $\sin(\angle\mathrm{PAQ})=k$이다. $9k$의 값을 구하시오. [4점]

$\sin(\alpha+\beta)$



$\cos\alpha - \sin\beta = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

$\cos\beta - \sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{9}$

$-2\sin\alpha\cos\beta = \frac{24}{81}$

$-2\cos\alpha\sin\beta = \frac{12}{81}$

$2-2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta) = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$

$\frac{14}{9} = $

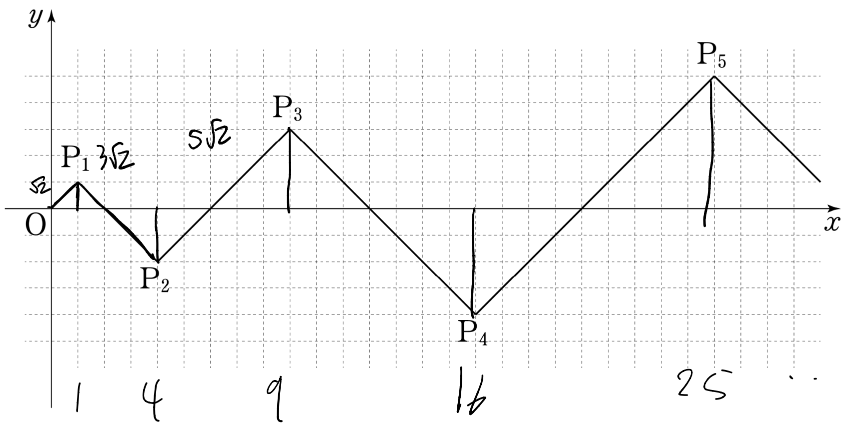
$\frac{7}{9} = \sin(\alpha+\beta)$

7

29. 좌표평면에서 원점 O와 점 $P_m(m^2,\ m\times(-1)^{m-1})$에 대하여 그림과 같이 점 O, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, $\cdots$ 를 이 순서대로 선분으로 연결한 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 Q의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

> (ⅰ) A_0은 원점이다.
> (ⅱ) n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서 점 Q가 경로를 따라 $\dfrac{\sqrt{2}n^3}{4}$ 만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 점 A_1과 A_2의 좌표는 각각 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{9}{4},\ -\frac{1}{4}\right)$이다.
점 A_n이 점 P_m과 일치하도록 하는 두 자연수 m, n의 순서쌍 $(m,\ n)$에 대하여 $m\le 3n$을 만족시키는 모든 m의 값의 합을 구하시오. [4점]



$n(n+1)=4m$

$m=\frac{n(n+1)}{4}\le 3n$

$n+1\le 12$

$n\le 11$

30. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{1}{3}$에 대하여 함수 $F(x)$를

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt-2$$

라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 어떤 양수 p와 모든 실수 x에 대하여

$$g(F(x))=pF(F(x))\times f(x)$$

를 만족시킨다. 두 곡선 $y=F(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 p의 값이 p_1 또는 p_2일 때,

$$\int_{p_1}^{p_2}\frac{f(x)}{\{F(x)+2\}^2}\,dx=c$$

이다. $98c$의 값을 구하시오. (단, $p_1<p_2$) [4점]

$p=3$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.