1. 포함 배제의 원리

포함 배제의 원리에 대해 알아보자.
뭔가 새로운 것을 갈망하는 친구들에게 반가운 단원일지 모르겠다.
하지만 전혀 새로운 내용이 아니며, 우리가 이미 배웠던 내용들임을 강조하고 싶다.

먼저 고등학교 1학년 수학에서 배운 집합으로 경우의 수를 표현해보자.

Note. 유한집합 U 에 대하여 주어진 조건 p_n (n은 자연수) 의 진리집합을 A_n이라 하자.

문제의 조건에서 p_1과 p_2를 **동시에** 만족시키는 경우의 수는 $n(A_1 \cap A_2)$ 이다.
문제의 조건에서 p_1과 p_2중 **하나 이상을** 만족시키는 경우의 수는 $n(A_1 \cup A_2)$ 이다.
문제의 조건에서 p_1과 p_2중 **오직 하나만** 만족시키는 경우의 수는 $n(A_1 \cup A_2) - n(A_1 \cap A_2)$ 이다.

$n(A_1 \cup A_2)$는 계산하기 어렵다.
두 조건 p_1과 p_2을 둘 다 만족시킬 필요가 없는 특성상 둘 중 하나만 만족시켜도 되고, 혹은 둘 다 만족시켜도 된다.
즉, 문제를 구경하기 전부터 가능한 케이스의 수가 벌써 3개 (p_1만 만족/p_2만 만족/p_1, p_2 모두 만족).
매우 불편한 부분이다.

그나마 조건이 두 개 (p_1, p_2)이라서 다행이었다. 조건을 세 개 (p_1, p_2, p_3)로 늘렸을 때는?
이 중 하나 이상 만족시키는 경우의 수를 구하라는 문제를 받아들였을 때, 벌써 고려해야하는 케이스의 수가 7개이다.
케이스 별로 경우의 수가 있을 거고.. 우린 7개의 케이스의 경우의 수를 다 더해야 하고... 생각만 해도 불편하다.

반면 $n(A_1 \cap A_2)$는 두 조건 p_1과 p_2을 둘 다 만족시켜야 하므로 케이스의 수는 1개이다.
그냥 모든 조건이 성립한다고 생각하고 풀면 된다. 즉, 쉽다고 느낄 수 있다.

하지만 이런 문제가 있다고 하자.

예제 1)
같은 연필 4개, 같은 지우개 5개를 세 학생 K, B, S 에게 남김없이 나눠주려고 한다. 세 학생 중 학용품을 받지 못한 학생이 없도록 하는 경우의 수를 구하시오.

불편함을 넘어서서, 너무 어렵다. 왜? 세 학생이 각각 몇 개의 학용품을 받을지 모르기 때문이다.
설령 몇 개씩 받을지 정해져있더라도 연필 몇 개와 지우개 몇 개로 구성되어있을지 모르기 때문에, 또 앞 사람이 연필을 너무 많이 받아버리면 뒷 사람은 연필을 받을 수 없는 것까지 고려해야하기 때문에 어렵다.

이 문제가 어려울 수 밖에 없는 이유를 집합의 측면에서 바라봐보자.
집합을 이용해서 이 문제의 정답을 바로 구하기 어려운 이유에 대해서 알아보는 거다.
조건 p_1 : '학생 K가 학용품을 받는다.'의 진리집합을 A_1,
조건 p_2 : '학생 B가 학용품을 받는다.'의 진리집합을 A_2,
조건 p_3 : '학생 S가 학용품을 받는다.'의 진리집합을 A_3 라 하면
문제에서 요구하는 경우의 수는 $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$이다.

분명 합집합보단 교집합일 때 쉽다고 했는데 왜 어려울까?

생각해보면, $n(A_1), n(A_2), n(A_3)$ 모두 세기 힘든 반면에 A_1, A_2, A_3의 세 여집합은 매우 세기 쉽다는 것이 눈에 들어올 것이다. 왜냐하면 ${A_1}^C, {A_2}^C, {A_3}^C$는 각각 학생 $\mathrm{K}, \mathrm{B}, \mathrm{S}$의 학생들이 학용품을 받지 않는 경우에 해당하므로, 이 경우 특정 학생을 학용품 배부에서 배제하고 생각할 수 있다는 강점이 있기 때문이다.

따라서, 쉬운 문제 풀이를 위해
① 여사건이 편리한 조건은 여사건 활용하는 능력과 ② 합집합이 있다면 교집합으로 돌려풀 수 있는 능력이 필요하다는 것을 알 수 있다. (참고로, 이 두 능력 중 우선시되어야 하는 능력은 '문제'가 결정한다. 뒤의 예시들에서 구경할 예정이다.)

더 자세한 얘기는 **예제 1)**의 스포일러가 되므로, 이를 위한 개념공부를 뒤에서 한 뒤 다시 예제 1)로 돌아가 문제를 풀어보도록 하겠다.

다음을 공부하기 전 주의사항)
조건이 2개인 경우엔 총 여섯 개의 케이스로 나눌 수 있다.

$i)$ **바로 쓰기 좋은 두 조건 p_1, p_2를 동시에 만족시키는 경우의 수**
$ii)$ **바로 쓰기 좋은 두 조건 p_1, p_2 중 하나 이상을 만족시키는 경우의 수**

$iii)$ **바로 쓰기 쉬운 조건 p_1와 바로 쓰기 어려운 조건 p_2를 동시에 만족시키는 경우의 수**
$iv)$ **바로 쓰기 쉬운 조건 p_1와 바로 쓰기 어려운 조건 p_2 중 하나를 만족시키는 경우의 수**

$v)$ **바로 쓰기 어려운 두 조건 p_1, p_2를 동시에 만족시키는 경우의 수**
$vi)$ **바로 쓰기 어려운 두 조건 p_1, p_2 중 하나를 만족시키는 경우의 수**

케이스가 많아서 '잘 이해가 안되네. 외워버려야지.' 하는 순간, 헛공부 하는 셈이 된다.
절대 그러지 말자. '이해'에 포커싱을 두고 공부해야 약이 된다.

i) **바로 쓰기 좋은 두 조건 p_1, p_2를 동시에 만족시키는 경우의 수**

=> $n(A_1 \cap A_2)$를 바로 계산하면 된다. 대부분 쉬운 문제가 여기에 해당한다.

예제 2) 어느 행사장에는 현수막을 1개씩 설치할 수 있는 장소가 5곳이 있다. 현수막은 A, B, C 세 종류가 있고, A는 1개, B는 4개, C는 2개가 있다. 다음 조건을 만족시키도록 현수막 5개를 택하여 5곳을 설치할 때, 그 결과로 나타날 수 있는 경우의 수는? (단, 같은 종류의 현수막끼리는 구분하지 않는다.) [3점] [11학년도 수능 가나 6번]

[보 기]

(가) A는 반드시 설치한다.
(나) B는 2곳 이상 설치한다.

① 55 ② 65 ③ 75 ④ 85 ⑤ 95

정답) ①

해설)
두 조건 (가), (나)는 쉽게 적용할 수 있으므로 별다른 작업을 거치지 않아도 된다.

사용하는 B의 개수에 따라 분류하자.

ⅰ) B가 2개 쓰일 때

A, B, B, C, C를 설치 $\rightarrow \dfrac{5!}{2!2!} = 30$

ⅱ) B가 3개 쓰일 때

A, B, B, B, C를 설치 $\rightarrow \dfrac{5!}{3!} = 20$

ⅲ) B가 4개 쓰일 때

A, B, B, B, B를 설치 $\rightarrow \dfrac{5!}{4!} = 5$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여 $30 + 20 + 5 = 55$가지 이다.

$ii)$ **바로 쓰기 좋은 두 조건 p_1, p_2 중 하나 이상을 만족시키는 경우의 수**

=> $n(A_1 \cup A_2)$을 계산하면 된다. 이 때, 합집합은 계산하기 힘드므로 집합의 성질

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$$

로 계산하자.

조건이 하나씩만 걸려져 있는 $n(A_1), n(A_2)$와 교집합으로 연결돼있는 $n(A_1 \cap A_2)$. 각각 구하기 쉬우므로 이렇게 접근하는게 맞다.

예제 3)
집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$ 의 개수를 구하시오.

(가) 함수 f의 역함수가 존재한다.
(나) $f(1) = 1$ 또는 $f(2) = 2$

정답) 42
해설)
(가)조건에 의하여 정의역의 각 원소는 서로 다른 함숫값들에 대응되어야 함을 쉽게 알 수 있다.
주목할 부분은 (나) 조건이다. (나) 조건이 '또는' 으로 연결되어 있다.
조건 $f(1) = 1$을 만족시키는 진리집합을 A_1,
조건 $f(2) = 2$을 만족시키는 진리집합을 A_2라 하면 구하는 경우의 수는 $n(A_1 \cup A_2)$ 이다.

이 때, 합집합이 등장했으므로 구하기 껄끄러우므로, $n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$를 적용시키자.
$n(A_1)$는 일대일대응이면서 $f(1) = 1$인 함수들의 개수를 구하면 되므로 $4!$이고, 이는 $n(A_2)$의 값과 동일하다.
$n(A_1 \cap A_2)$는 일대일대응이면서 $f(1) = 1, f(2) = 2$를 동시에 만족시키는 함수의 개수를 구하면 되므로 $3!$이다.

따라서 정답은 $4! + 4! - 3! = 42$ 임을 알 수 있다.

$iii)$ **바로 쓰기 쉬운 조건 p_1와 바로 쓰기 어려운 조건 p_2를 동시에 만족시키는 경우의 수**

=> $n(A_1 \cap A_2)$를 계산해야 한다. 그런데 p_2를 다루기 까다로울 때가 있다. 이 땐 조건 p_2의 여사건을 떠올린다.
즉, 우리가 계산하려는 식을 $n(A_1 \cap A_2) = n(A_1 \cap (A_2{}^C)^C) = n(A_1) - n(A_1 \cap A_2{}^C)$ 으로 조작하는 것이다.

이 때 주의해야하는 것은 두 번째 등식 $n(A_1 \cap (A_2{}^C)^C) = n(A_1) - n(A_1 \cap A_2{}^C)$이다.
원래 일반적인 집합의 성질에 의하면 $A_1 \cap (A_2{}^C)^C = A_1 - A_2{}^C$이기 때문에 $n(A_1 \cap (A_2{}^C)^C) = n(A_1) - n(A_2{}^C)$로 착각할 가능성이 높다.

$n(A_1 \cap A_2) = n(A_1) - n(A_1 \cap A_2{}^C)$ 잘 기억해두자. (이는 이미 이 책에서 '부분여사건'으로 소개되어있다.)

예제 4)
다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, u의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수를 구하시오. [4점] [16학년도 6월 평가원 가형 27번]

(가) $x+y+z+u=6$
(나) $x \neq u$

정답) 68
해설) (가) 조건은 바로 쓰기 좋은데 (나) 조건은 그대로 쓰는 것 보다 여사건, 즉 $x=u$를 쓰기가 편하다.
따라서 $n(A_{가} \cap A_{나}) = n(A_{가} \cap (A_{나}{}^C)^C) = n(A_{가}) - n(A_{가} \cap A_{나}{}^C)$을 사용하여 구해주자.

$x+y+z+u=6$ 을 만족하는 음이 아닌 정수해 개수는
${}_4\mathrm{H}_6 = {}_{4+6-1}\mathrm{C}_6 = {}_9\mathrm{C}_6 = 84$ 이므로 $n(A_{가}) = 84$.

① $x=u=0$ 일 때
(가)조건에 의하여 $y+z=6$이고, 이를 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는
${}_2\mathrm{H}_6 = {}_7\mathrm{C}_6 = 7$ 가지
② $x=u=1$
(가)조건에 의하여 $y+z=4$이고, 이를 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는
${}_2\mathrm{H}_4 = {}_5\mathrm{C}_4 = 5$ 가지
③ $x=u=2$
(가)조건에 의하여 $y+z=2$이고, 이를 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는
${}_2\mathrm{H}_2 = {}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 가지
④ $x=u=3$
(가)조건에 의하여 $y+z=0$이고, 이를 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는
$y=0$, $z=0$ 인 1 가지
따라서 $n(A_{가} \cap A_{나}{}^C) = 7+5+3+1 = 16$.

따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수는 $84-16=68$ 가지이다.

예제 5)
다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는? [4점] [18학년도 9월 평가원 나형 16번]

(가) $x+y+z=10$
(나) $0<y+z<10$

① 39 ② 44 ③ 49 ④ 54 ⑤ 59

정답) ④

해설)
(가) 조건은 바로 쓰기 좋은데 (나) 조건은 (나)조건 그대로보다 여사건, 즉 $y+z=0$ or 10를 쓰기가 편하다.
$n(A_{가}\cap A_{나})=n(A_{가}\cap\left(A_{나}{}^{C}\right)^{C})=n(A_{가})-n\left(A_{가}\cap A_{나}{}^{C}\right)$

$x+y+z=10$ 에서 ${}_{3}\mathrm{H}_{10}=66$ 이므로 $n(A_{가})=66$

① $y+z=0$ 인 경우엔 $(0,0)$ 1가지
② $y+z=10$인 경우엔 ${}_{2}\mathrm{H}_{10}=11$가지

①, ②에 의하여 $n\left(A_{가}\cap A_{나}{}^{C}\right)=1+11=12$

따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 $66-12=54$ 가지이다.

$iv)$ **바로 쓰기 쉬운 조건 p_1와 바로 쓰기 어려운 조건 p_2 중 하나 이상을 만족시키는 경우의 수**

=> $n(A_1 \cup A_2)$를 계산해야 한다. 이 때, 합집합은 계산하기 힘드므로 집합의 성질

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$$

로 계산하자.

$iii)$에서와 마찬가지로 p_2가 다루기 어려울 땐 p_2의 여사건을 적극적으로 활용하기 위해서

$n(A_2) = n(S) - n(A_2{}^C)$ $\cdots$ ⓐ 로 계산하고

$n(A_1 \cap A_2) = n(A_1 \cap (A_2{}^C)^C) = n(A_1) - n(A_1 \cap A_2{}^C)$ $\cdots$ ⓑ 로 계산하여 위의 식에 적용시켜주자.

따라서

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + \{n(S) - n(A_2{}^C)\} - \{n(A_1) - n(A_1 \cap A_2{}^C)\} = n(S) - n(A_2{}^C) + n(A_1 \cap A_2{}^C) \ \cdots \ ⓒ$$

로 식을 정리 할 수 있다.

이 때 중요한 것은 '**ⓒ의 결과만 외우지 않는 것**'이 중요하다. 지금 같은 경우는 ⓐ, ⓑ를 첫 식에 모두 적용시켜줬지만, 문제의 상황에 따라서 ⓐ 혹은 ⓑ 중 하나만 적용시켜야 문제가 쉽게 풀리는 경우가 충분히 나올 수 있기 때문이다.

한가지 희소식이라면, 총 6가지의 경우로 나누어 생각하게 될텐데 그 중 제일 출제빈도가 적은 파트에 해당한다.

예제 6)

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$ 의 개수를 구하시오.

(가) 함수 f의 역함수가 존재한다.

(나) $f(1) = 1$ 또는 $f(2) \neq 2$

정답) 42

해설)

(가)조건에 의하여 정의역의 각 원소는 서로 다른 함숫값들에 대응되어야 함을 쉽게 알 수 있다.

또한 (나) 조건이 '또는' 으로 연결되어 있다.

조건 $f(1) = 1$을 만족시키는 진리집합을 A_1,

조건 $f(2) \neq 2$을 만족시키는 진리집합을 A_2라 하면 구하는 경우의 수는 $n(A_1 \cup A_2)$ 이다.

이 때, 합집합이 등장했으므로 구하기 껄끄러우므로, $n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$를 적용시키자.

$n(A_1)$는 일대일대응이면서 $f(1) = 1$인 함수들의 개수를 구하면 되므로 $4!$이고,

$n(A_2)$는 일대일대응 중 $f(2) = 2$인 경우를 빼주면 된다. 즉, 여사건을 쓰겠다는 것이다. 그 값은 $5! - 4! = 96$.

$n(A_1 \cap A_2)$는 일대일대응이면서 $f(1) = 1$, $f(2) \neq 2$를 동시에 만족시키는 함수의 개수를 구하면 되므로

$4! - 3! = 18$이다.

따라서 정답은 $24 + 96 - 18 = 102$ 임을 알 수 있다.

cf. $f(2) \neq 2$라면 $f(2)$가 가질 수 있는 값이 $1, 3, 4, 5$로 다양하다. 따라서, 이 조건의 여사건을 떠올리는게 자연스러운 과정이지만 우리는 위에서 경고했듯이 결과식만 외워서 이용하지 않았다. 그렇기에 조금 더 수월하게 구할 수 있었다.

v) **바로 쓰기 어려운 두 조건 p_1, p_2를 동시에 만족시키는 경우의 수**

=> $n(A_1 \cap A_2)$를 계산해야 한다. iii)에서와 같은 방식으로 해주면, 드모르간 법칙에 의하여 $n(A_1 \cap A_2) = n((A_1{}^C \cup A_2{}^C)^C) = n(S) - n(A_1{}^C \cup A_2{}^C) = n(S) - \{n(A_1{}^C) + n(A_2{}^C) - n(A_1{}^C \cap A_2{}^C)\}$ 으로 바꿔 풀면 된다.

이 유형은 확실히 알아두도록 하자. 왜냐하면, 작년 수능 가형 20번에 직격탄으로 사용됐기 때문이다.

예제 7)
한 개의 동전을 7번 던질 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은?[4점] [20학년도 수능 가형 20번]

(가) 앞면이 3번 이상 나온다.
(나) 앞면이 연속해서 나오는 경우가 있다.

① $\frac{11}{16}$ ② $\frac{23}{32}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{25}{32}$ ⑤ $\frac{13}{16}$

정답) ①

해설)
기대T의 20수능 현장풀이이기도 하다. 우리는 현장에서 사용가능한 풀이를 체화하는 것이 중요하다 결과론적인 풀이에 익숙해지지 않도록 하자.

(가) 조건에서, 앞면이 3번 이상 나오는 케이스는 앞면이 3, 4, 5, 6, 7번 나오는 것이다.
이에 대한 여사건은 앞면이 0, 1, 2번 나오는 것이다. 즉, 여사건이 유리한 조건임을 알 수 있다.

(나) 조건도 역시 마찬가지로 (나) 조건 그대로 보다는 앞면이 연속해서 나오지 않는 경우가 더 편함을 알 수 있다.
앞면이 몇 번 연속해서 나오는지, 연속된 뭉치가 몇 뭉치나 있는지 모른다.
예를 들어, '앞앞뒤뒤앞앞뒤' 같은 것도 (나)에 포함된다. 따라서, 여사건이 유리한 조건임에 틀림없다.

이제 위에서 배운 $n(S) - \{n(A_1{}^C) + n(A_2{}^C) - n(A_1{}^C \cap A_2{}^C)\}$으로 해결해보자.
$n(S) = 2^7 = 128$, $n(A_1{}^C) = 1 + {}_7\mathrm{C}_1 + {}_7\mathrm{C}_2 = 29$ 이다.

갑자기 왜 끊었냐고? 여기서 잠깐 호흡을 고르고 영리하게 풀기 위함이다.
항상 수학문제는 중간에 호흡을 고르는 연습을 하자. 무작정 풀다간, 매우 비효율적으로 풀고 있는 자신을 발견하게 된다.

$n(A_2{}^C) - n(A_1{}^C \cap A_2{}^C)$를 부분여집합의 역관점에서 재해석 해보자. 그러면

"앞면이 연속해서 나오지 않는데, 앞면이 3번 이상 나오는 경우의 수"

를 구하는 것과 같다.

이런 경우는 생각보다 몇 개 없다. 앞면이 5번 이상 나오면 반드시 앞면이 연속으로 나올 수 밖에 없기 때문이다.
따라서, 앞면이 3번, 4번 나오는데 앞면이 연속하지 않는 경우의 수만 각각 세어주면 된다.
앞면이 3번 나오는 경우, 뒷면은 4번 나온다. 앞면 3개를 미리 맞춰두고, 앞면과 앞면 사이에 뒷면의 동전을 1개씩 집

어넣은 뒤 남는 2개의 뒷면의 동전을 4군데에 넣어놓으면 된다. 따라서 ${}_4\mathrm{H}_2 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 가지.
(이 부분이 헷갈린다면, 앞뒤앞뒤앞뒤뒤, 앞뒤앞뒤뒤앞뒤, 앞뒤앞뒤뒤뒤앞, 앞뒤뒤앞뒤앞뒤. .. 순으로 세어봐도 금방 나온다.)

앞면이 4번 나오는 경우엔 앞뒤앞뒤앞뒤앞 밖에 없으니 개꿀. 1가지이다.
따라서 문제에서 묻는 확률은 $\dfrac{128-29-(10+1)}{128} = \dfrac{88}{128} = \dfrac{11}{16}$ 이다.

cf. 이 풀이의 묘미는 '우리가 원할 때 여사건을 쓰고, 원하지 않을 땐 조건을 바로 썼다는 점이다.'
$n({A_1}^C)$를 계산할 땐 여사건을,
$n\left({A_2}^C\right) - n\left({A_1}^C \cap {A_2}^C\right)$ (=앞면이 연속해서 나오지 않는데, 앞면이 3번 이상 나오는 경우의 수)를 계산할 땐 (가) 조건을 그대로 사용해줬다.

(가)조건은 분명 혼자 있을 땐 여사건 접근 때 보다 껄끄러운 조건임에 틀림없다.
하지만 (나)조건의 여사건 ${A_2}^C$과 결합됐을 시엔 생각보다 간단한 조건으로 바뀜을 알 수 있다. Fin.

풀이에서 볼 수 있듯이 상당히 강력한 스킬이다. 강력하다고 어렵지도 않고, 추상적이지도 않다.
감으로 경우의 수와 확률을 풀고 있다면, 이와 같이 전 문항의 솔루션을 정리해보기 바란다.

$vi)$ **바로 쓰기 어려운 두 조건 p_1, p_2 중 하나 이상을 만족시키는 경우의 수**

=> $n(A_1 \cup A_2)$를 계산해야 한다. 이 때, 두 조건 p_1, p은 바로 쓰기 힘드므로 여사건으로 바꿔서 풀어주자.

$n(A_1 \cup A_2) = n\left(\left(A_1{}^C\right)^C \cup \left(A_2{}^C\right)^C\right) = n\left(\left(A_1{}^C \cap A_2{}^C\right)^C\right) = n(S) - n\left(A_1{}^C \cap A_2{}^C\right)$ 으로 바꿔주면 생각보다 깔끔한 모양이 나옴을 알 수 있다.

예제 8)

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$ 의 개수를 구하시오.

(가) 함수 f의 역함수가 존재한다.
(나) $f(1) \neq 1$ 또는 $f(2) \neq 2$

정답) 114
해설)
조건 $f(1) \neq 1$을 만족시키는 진리집합을 A_1,
조건 $f(2) \neq 2$을 만족시키는 진리집합을 A_2라 하자.
구하려는 정답은 $n(A_1 \cup A_2)$인데, 두 조건은 여사건이 유리할뿐더러 합집합을 교집합으로 바꿔주면 편하기 때문에 아래와 같이 계산하는게 영리한 선택이다.
드모르간 법칙을 이용하여
$n(A_1 \cup A_2) = n\left(\left(A_1{}^C\right)^C \cup \left(A_2{}^C\right)^C\right) = n\left(\left(A_1{}^C \cap A_2{}^C\right)^C\right) = n(S) - n\left(\left(A_1{}^C \cap A_2{}^C\right)\right)$ 으로 정리 가능하며
$n(S) = 5! = 120$, $n\left(A_1{}^C \cap A_2{}^C\right) = 3!$이므로 구하려는 정답은 $5! - 3! = 114$ 이다.
$i)$부터 $vi)$ 까지 총 6케이스로 나누어서 연습해봤다.
앞에서도 얘기했지만, 이 케이스들에 대한 결과를 외우려고 하는 순간 이는 안하는 것만 못한 공부가 된다.

'집합의 연산 성질을 이용하여 경우의 수를 표현하자. 대신 부분여집합이 들어가는 경우만 집합의 연산결과와 약간 다르니 주의해줘야 하는 점은 반드시 인지할 것!'

으로 이해하고 넘어갔다면, 아주 좋은 수학공부습관을 갖고 있는 것이다.