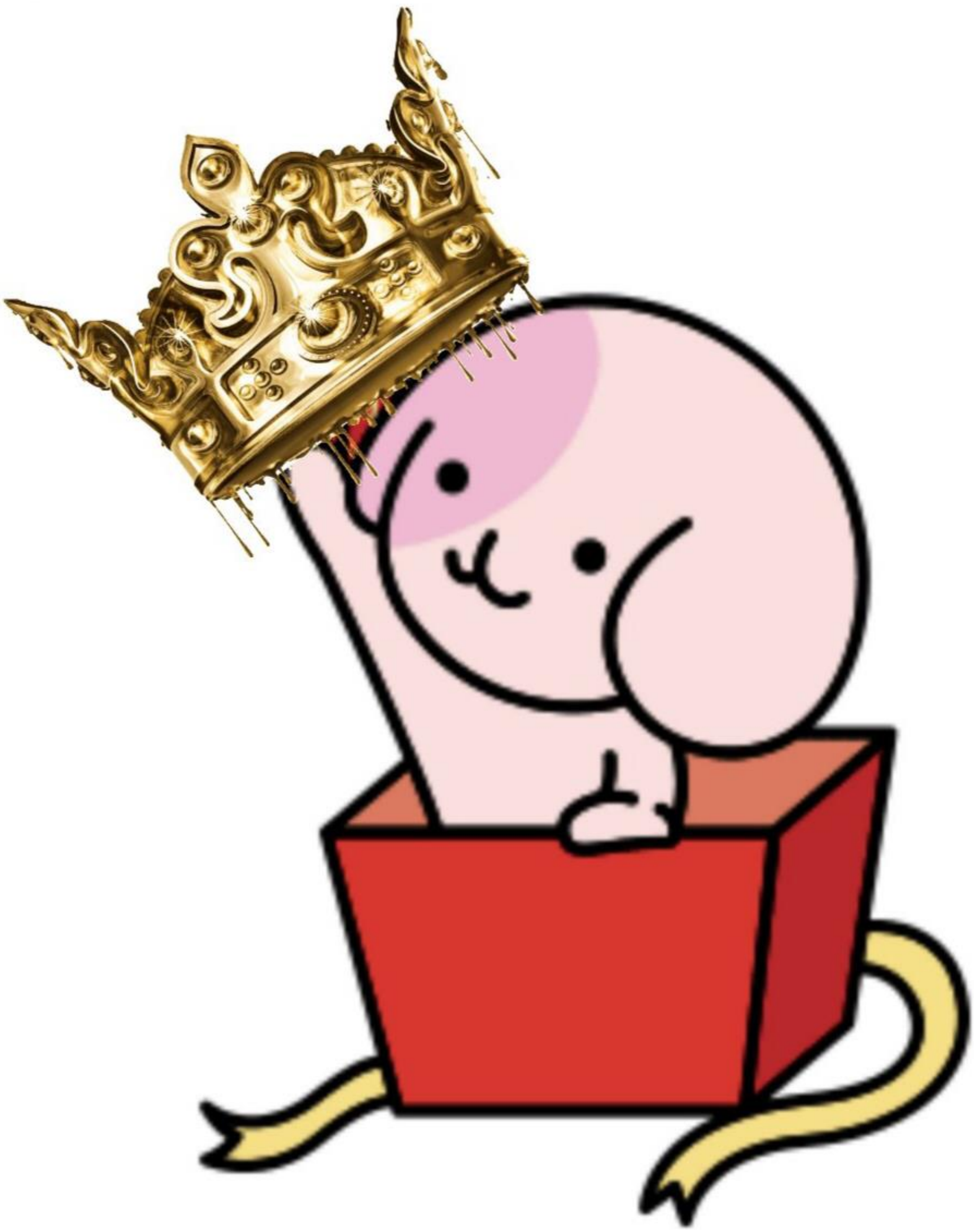
Claim 수리논술



내용 질문은 band.us/@studywithorbi 에서 하시면 됩니다.

오늘은 적분

입니다. 정확히는 여러가지 함수의 적분을 하는 방법에 대해 알아보겠습니다. 이 주제가 단독으로 문제에 나오는 경우는 많지 않은데, 의외로 논제에 스며들어있으면 제대로 처리하지 못하시는 분들이 많아요. 그런 분들을 위해 꼭 알아야 할 적분 식과 적분에 대한 아이디어를 소개해드리려고 합니다. 따라서 오늘은 짧아요.

(1) $\int \frac{1}{sinx} dx$

삼각함수의 적분에서 식의 조작을 해야만 적분이 가능한 경우가 종종 있습니다. 식을 조금 변형해야겠다는 생각이 없다면 이 적분은 절대 못하겠죠. 생각할 수 있는 아이디어는 많겠지만, 저는 분자, 분모에 sinx를 곱해주어 정리하도록 하겠습니다.

$$\int \frac{1}{sinx} dx = \int \frac{sinx}{\sin^2 x} dx = \int \frac{sinx}{1-\cos^2 x} dx$$

에서 $cosx = t$로 치환합니다. 그러면 식은

$$-\int \frac{1}{(1-t)(1+t)} dt = \frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\mathrm{cosx}}{1+\mathrm{cosx}}\right)$$

으로 정리됩니다. 보시면 아시겠지만 이걸 수능에서 묻기에는 부담스럽지만 논술에서 출제하기에는 굉장히 좋은 주제죠.

또 감각이 좋으신 분들은 다음과 같이 정리할 수도 있습니다.

$$\int \frac{1}{sinx}\,dx = \int \frac{1}{sin2t}\,(2dt) = \int \frac{1}{sintcost}\,dt$$

치환적분을 이용해 여기까지 끌고 온 후, $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$를 이용합니다.

$$\int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{sintcost}\,dt = \int \frac{sint}{cost} + \frac{cost}{sint}\,dt = \ln\left(\frac{sint}{cost}\right) = \ln\tan\left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right)$$

적분상수는 전부 생략했습니다.

이걸 어떻게 해?? 하실 수 있는데, 지금은 그냥 적분방법과 아이디어를 받아가시고 나중에 시험장에서 비슷한 적분 문제가 나오면 그냥 적분하면 됩니다. 변형해도 아이디어는 비슷해요.

(2) $\int \frac{1}{1+sinx}\,dx$

분모에 1+sinx, 1+cosx 꼴이 있다면 분자,분모에 켤레를 곱해준다는 아이디어를 쓸 수 있습니다. 우리는 $1-\sin^2 x$, $1-\cos^2 x$꼴을 정리할 수 있거든요.

$$\int \frac{1}{1+sinx}\,dx = \int \frac{1-sinx}{1-\sin^2 x}\,dx = \int \sec^2 x + \frac{sinx}{\cos^2}\,dx = tanx - secx$$

역시 깔끔하게 나옵니다.

대칭적분

에 대한 이야기도 조금 해봅시다. 피적분함수가 **적분구간의 중심에 대하여 대칭**시켜서 적분하는 치환적분의 일부분 입니다.
물론 해당 구간에서 f(x)가 대칭이 아니어도 쓸 수 있습니다.
예를들어 0부터 a까지 f(x)를 적분한다고 할 때, x=a-t 로 치환한다면 이 값은 0부터 a까지 f(a-x)를 적분한 값과 같죠. 즉 f(x)+f(a-x)가 적분하기 쉽다면 f(x)도 적분할 수 있다는 것입니다.

(3) $\int_{-2}^{2} \frac{x^2}{e^x+1}\,dx$

피적분함수를 x=0에서 대칭시켜 적분합시다. 즉 구하고자 하는 적분값을 a라고 하고 x=-t로 치환한다면

$$a = \int_{-2}^{2} \frac{x^2}{e^x+1}\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{x^2}{e^{-x}+1}\,dx$$

이죠. 이제 저 두 식을 더합시다.

$$2a = \int_{-2}^{2} \frac{x^2}{e^x+1} + \frac{x^2 \times e^x}{e^x \times (e^{-x}+1)}\,dx = \int_{-2}^{2} x^2\,dx = \frac{16}{3}$$

따라서 a=8/3 입니다.

굉장히 깔끔하게 적분이 됩니다. 이어지는 기출문제 역시 이를 이용해서 풀어보세요.

(가) 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음과 같은 부분 적분 공식이 성립한다.

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

예를 들어, $f'(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$ 이면,

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx$$이므로,

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$ 를 얻는다. 단, C 는 적분상수이다.

(나) 함수 $y = f(x)$가 y 축에 대하여 대칭인 경우 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$를 만족하고,

함수 $y = f(x)$가 원점에 대하여 대칭인 경우 모든 실수 x 에 대하여

$f(-x) = -f(x)$를 만족한다.

(다) 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (a < x < b)$$가 성립한다.

$f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x) + f(\pi - x) = \left(e^{\frac{\pi}{2}-x} + e^{x-\frac{\pi}{2}}\right)\sin x$를 만족할 때, $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx$를 계산하는 과정을 논리적으로 제시하시오.

대놓고 대칭성 찾을 수 있니? 묻는겁니다.

이 문제에 대한 대학에서 발표한 평가 목표와 출제의도는 다음과 같습니다.

적분은 심화된 수학적 지식과 사고방법을 습득하고 논리적 추론 능력을 배양하며 문제를 합리적으로 해결하는 방법과 태도의 기초를 제공한다. 본 문항에서는 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 수학적 통찰과 직관에 바탕을 둔 함수 사이의 관련과 관계에 대한 형식화의 능력과 문제 해결 능력을 평가하고자 하였다. 구체적으로 수학에서 중요한 대칭성과 자연과학과 공학에서의 중요한 지수함수, 삼각함수의 적분 계산 능력, 제시문을 읽고 이에 대한 깊은 고찰에 바탕을 둔 문제해결능력을 판단하고자 하였다. $x=\frac{\pi}{4}$ 에 대칭이라는 사실을 유추하고, 이를 이용하여 대칭으로 주어진 적분 구간에서 적분을 구하는 문제이다. 함수를 구체적으로 찾는 것이 아니라 대칭성을 논리적으로 이용하여야 한다. 치환 적분을 사용하여야 하는 문제이다. 함수의 대칭성, 치환 적분 개념을 이해해야 하며, 계산을 실수 없이 수행하여야 한다.

말은 긴데 그냥 대칭적분 묻겠다는 말이에요. 알아두셔야 한다는 의미입니다.

이후에 적분을 계산하는 과정은 도표적분법을 이용하면 편합니다. 제시문 (가)의 적분을 처리하는 방법과 동일하게 해주시면 됩니다.

주어진 적분식에서 $x = \pi - t$로 치환을 해줍시다. f(x)의 대칭성에 의해

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(\pi - x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) + f(\pi - x)\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{\frac{\pi}{2}-x} + e^{x-\frac{\pi}{2}}\right) sinx\,dx$$

입니다. 다시 $\frac{\pi}{2} - x = t$로 치환하고, (가)와 동일한 방법으로 이를 적분해주면

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^t + e^{-t})\cos t\,dt = [(e^t - e^{-t})\cos t]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^t - e^{-t})\sin t\,dt$$

$$= [(e^t - e^{-t})\cos t + (e^t + e^{-t})\sin t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^t + e^{-t})\cos t\,dt = [(e^t - e^{-t})\cos t + (e^t + e^{-t})\sin t]_0^{\frac{\pi}{4}} - I$$

그러므로, $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^t + e^{-t})\cos t\,dt = \frac{1}{2}[(e^t - e^{-t})\cos t + (e^t + e^{-t})\sin t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}$

입니다.

마지막으로 다룰 적분은

삼각치환

입니다. 이게 교육과정에서 빠진지 꽤나 오래된걸로 알고있는데 아직 논술에서 자주 나오는 편이에요. 나오네 안나오네 토론할 시간에 그냥 알아두시면 됩니다. 그렇게 어렵지도 않고요.

삼각치환 중에서도 오늘은 가장 유명한 적분만 하나 하고 끝낼겁니다. 다들 아실 적분이에요.

(4) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$

이걸 왜 이렇게 하는데? 하는 의문은 일단 접어두시고, 다음과 같이 적분할 수 있다는 것만 알아두고 갑시다.

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+\tan^2\theta}\,d(tan\theta) = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta = \tan^{-1}x$$

우리는 저걸 아크탄젠트 함수라고 하죠. 이처럼 x를 사인, 코사인, 탄젠트 등의 함수로 치환하는 것을 삼각치환이라고 합니다.

이걸 응용하여 다음의 적분을 해봅시다.

(5) $\int \frac{1}{x^2+4x+6}dx$

위와 꼴이 비슷하게 묶어준 후, 바로 적분합니다.

이때 $x+2=\sqrt{2}tan\theta$로 치환할겁니다.

$$= \int \frac{1}{(x+2)^2+2}\,dx = \int \frac{1}{2(1+\tan^2\theta)}\,d\left(\sqrt{2}tan\theta - 1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)$$

뭔 개소린가...싶으신 분들은 band.us/@studywihtorbi 로 오시고, 수고하셨습니다!