Claim 수리논술

내용 질문은 band.us/@studywithorbi 에서 하시면 됩니다.

오늘은 급수입니다.

흔히 수열의 합이라고 부르는 녀석이죠. 수능날 무한등비급수에서 우리를 엄청 괴롭힐 그 녀석입니다. 급수의 중요한 주제인 급수의 수렴성에 대해 알아볼거에요. 오늘도 열공하세요!

급수의 수렴 판정

은 사실 교과서에서 정밀하게 다루는 주제는 아니에요. 하지만 논술에서는 이렇게 좋아하는 주제가 또 없습니다. 어떤 급수가 수렴할 조건, 발산할 조건이 어떤 것들이 있는지 가볍게 알아봅시다.

n항판정법

만약 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 이라면 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 은 발산합니다. 마찬가지로 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$가 수렴한다면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$입니다.

비교판정법

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 $0 \leq a_n \leq b_n$을 만족할 때, 급수 $\sum b_n$이 수렴하면 급수 $\sum a_n$도 수렴합니다. 또 $\sum a_n$이 발산하면 $\sum b_n$도 발산합니다. 논술에서 자주 사용하는 내용이지만 대부분 제시문으로 주어질거에요. 그냥 직관적으로 그러겠구나.. 하시면 됩니다.

비판정법

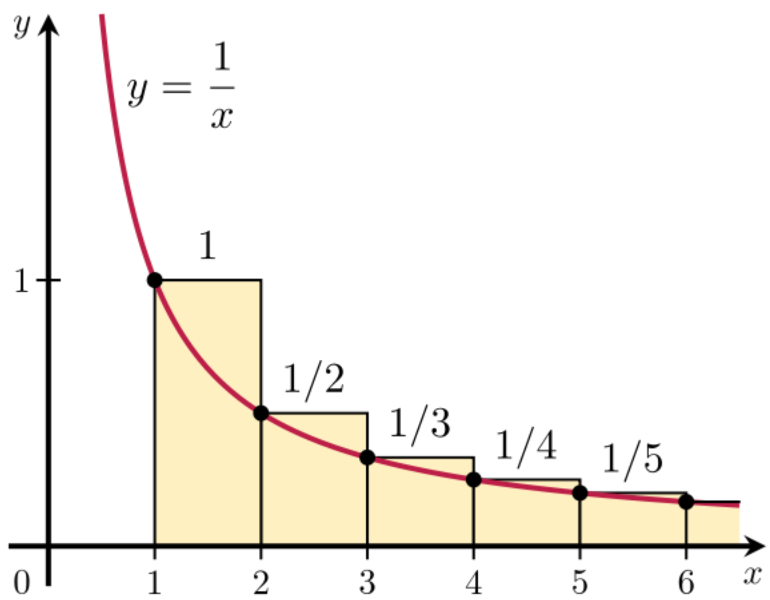
자주 나오지는 않는 판정법입니다. 가볍게 알아두시고 확인하고 넘어가죠. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $0 < a_n$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1$가 되도록 하는 상수 r이 충분히 큰 n에 대하여 존재한다면 급수 $\sum a_n$ 은 수렴합니다. 이건 와닿지 않으시죠? 다음의 급수의 수렴/발산을 판단해봅시다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

안에 있는 수열을 a_n이라고 하면 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$ 이므로 비판정법에 의해 해당 급수는 수렴합니다.

적분판정법

이건 직관적으로 알아두세요. 나오기는 힘들 것 같네요.



급수 $\sum \frac{1}{n}$은 위 그림처럼 적분 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}$보다 큽니다.

그런데 우리는 저 적분을 계산을 못하죠.. 그래서 이걸 내려면 무조건 제시문이 필요해요. 직관적으로 받아들일 수 있으니 그냥 보시죠.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{M\to\infty} \ln x\Big|_1^M = \infty$$

따라서 정적분과 급수 모두 발산합니다. 이렇게 급수를 넓이로 이해하여 판단하는 것을 적분판정법이라고 해요. 시험장에서 다른게 생각이 안난다! 하시면 제시문에 없어도 그냥 쓰세요. 이 급수를

조화급수

라고 부릅니다. 조화급수의 발산은 아래처럼 비교판정법을 통해 구할 수도 있어요. 유명한 급수이고, 이미 기출된 학교도 있으니 알아두고 갑시다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} &= 1+\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{9}+\cdots\right]+\cdots \\ &> 1+\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{16}+\cdots\right]+\cdots \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots \\ &= 1+0.5+0.5+0.5+0.5+\cdots \\ &= 1+1+1+\cdots\end{aligned}$$

조화급수의 항을 2의 거듭제곱으로 묶어 각 묶음의 합이 1/2보다 크거나 같음을 이용합니다. 1/2의 무한합은 발산하죠. 이처럼 조화급수보다 작은 급수가 발산하므로 조화급수도 발산함을 알 수 있습니다.

이제 여러 급수의 수렴성을 판단해봅시다.

(1) $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2$$

에서 비교판정법에 의해 수렴합니다. 또, 아까 조화급수처럼 적분판정법을 이용해 수렴함을 증명할 수도 있어요.

일반적으로 급수 $\sum \frac{1}{n^p}$는 지수 p가 1보다 클 때 수렴함이 알려져있습니다. 증명은 적분판정법으로 하시면 됩니다. 또 이 급수의 수렴값은 $\frac{\pi^2}{6}$임도 알려져 있어요. 관심 있으신 분들은 Basel problem 검색해보세요.

(2) $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

분자,분모에 켤레를 곱해주면 (2)의 수열이 (1)보다 항상 작거나 같음을 알 수 있습니다. 마찬가지로 비교판정법에 의해 급수는 수렴합니다.
증명은 (1)과 동일하게 잡아주시면

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2$$

이므로 급수가 수렴함을 알 수 있습니다.

(3) $\sum ar^n \ (-1 < r < 1)$

등비수열의 합이죠. 교과서처럼 다음과 같이 증명하거나

등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구해 보자.

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

이고, ①의 양변에 r를 곱하면

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots\cdots ②$$

이다. ①에서 ②를 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rrcr} & S_n = a + & ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} & \\ -) & rS_n = & ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} & + ar^n \\ \hline & (1-r)S_n = a & & - ar^n \end{array}$$

이다. 따라서 $r \neq 1$일 때에는

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$$

이고, $r=1$일 때에는 ①에서

$$S_n = a + a + a + \cdots + a = na$$

이다.

비판정법을 통해 자명함을 알 수 있습니다.

급수의 수렴과 발산은 수능에서는 나오지 않지만 대학에서는 좋아하는 주제입니다. 꼭 다시 정리해두세요.

수고하셨습니다! 공부 열심히 하시고 band.us/@studywithorbi에서 뵙시다!