제 2 교시

2021학년도 KUME(쿠메) 모의고사 1회

수학 영역
(가형)

성명	

수험번호						-				

○ 자신이 선택한 유형(가 형/나 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

그대의 꿈은 땀 속에서 조금씩 피어나는 꽃

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2021학년도 KUME(쿠메) 모의고사 1회

시행 : 2020년 9월 5일 (토) 오후 9시 55분 ~ 오후 11시 40분

집필 : 고려대학교 수학교육과 소모임 KUME(쿠메) 20

김민석 김정훈 김차민 김현민 박민용 방민서 배동현 백진희 서현덕 우헌석 정상원 조동현 조영빈 최제현 황재민

손해설 : 이현기

검토 : 양우석

KUME(쿠메) 모의고사에 관한 문의사항은 'KUME 모의고사' 페이스북 페이지 또는 bang8999@naver.com으로 문의바랍니다.

제 2 교시

수학 영역(가 형)

5지선다형

1. $4^{\log_2 3} \times \sqrt[4]{16}$ 의 값은? [2점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

$4^{\log_2 3} \times \sqrt[4]{16}$

$= 3^{\log_2 4} \times (2^4)^{\frac{1}{4}}$

$= 3^2 \times 2$

$= 18$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{5\times 3^n + 3^{-n}}{3^n}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{n\to\infty} \frac{5\times 3^n + 3^{-n}}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(5 + \frac{1}{3^{2n}}\right)$

$= 5$

3. 두 학생 A, B에게 서로 다른 색의 구슬 5개를 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 하나의 구슬도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [2점]

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

${}_2\Pi_5 = 32$

A B

① ② ③ ④ ⑤

4. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{13} = 8$일 때, $(a_9)^2 - (a_5)^2$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$a_n = a_1 + (n-1)d$, $a_1 = 2$

$a_{13} = 2 + 12d$ $\therefore d = \frac{1}{2}$

$= 8$

$(a_9)^2 - (a_5)^2 = (a_9 + a_5)(a_9 - a_5)$

$= (2a_1 + 12d) \cdot 4d$

$= (4+6) \cdot 2$

$= 20$

참고) $a_1 = 2$, $a_{13} = 8$ 이므로

등차중항에 의해

$a_7 = \frac{a_1 + a_{13}}{2} = 5$ 이다.

$a_{13} - a_1 = 12d = 6$ 에서 $d = \frac{1}{2}$.

따라서 $(a_9)^2 - (a_5)^2$

$= (a_9 + a_5)(a_9 - a_5)$

등차중항

$= 2a_7 \times 4d$

$= 2\times5\times4\times\frac{1}{2} = 20$

5. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-2n+1}{n}\right)=5$일 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-5}{n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-2n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2+\frac{1}{n}\right)$$

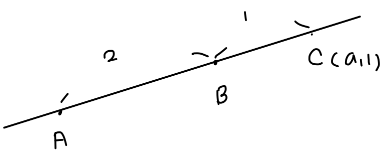
$$=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-5}{n}=4$$

6. 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ \log_2 a)$, $\mathrm{B}(5,\ \log_4 4b)$가 있다. 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(a,\ 1)$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6



$$C(a,1)=C\left(\frac{12}{3},\ \frac{2\log_4 4b+\log_2 a}{3}\right)$$

$$=C\left(4,\ \frac{\log_2 4ab}{3}\right)$$

$a=4,\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=\frac{9}{2}$

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx$의 값은? [3점]

① $1-\frac{\pi}{4}$ ② $1-\frac{\pi}{5}$ ③ $1-\frac{\pi}{6}$ ④ $1-\frac{\pi}{7}$ ⑤ $1-\frac{\pi}{8}$

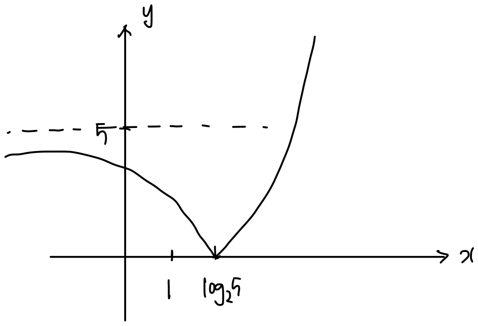
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)\,dx$$

$$=\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=1-\frac{\pi}{4}$$

8. 함수 $f(x)=|2^x-5|$가 닫힌구간 $[1,\ k]$에서 최댓값 3을 갖도록 하는 실수 k의 최댓값은? (단, $k>1$) [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6



i) $1<k\le 3$

$x=1$ 에서 최댓값 $f(1)=f(3)=3$ 을 가진다.

ii) $k>3$ 일때

$x=k$ 에서 최댓값 $f(k)$를 가진다. $=2^k-5$

ii) 에서 $f(k)>3$ 이므로 최댓값이 3이라는 조건에 만족하지 않는다.

따라서 k의 최댓값은 3이 된다.

9. 함수 $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+e^{-x}}$ 의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$f(0)=2$

$g'(2)=\dfrac{1}{f'(0)}$

$f'(x)=\dfrac{4e^x(e^x+e^{-x})-4e^x(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$

$=\dfrac{8}{(e^x+e^{-x})^2}$

$f'(0)=2$

$\therefore g'(2)=\frac{1}{2}$

10. 어느 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같다.

X	-3	6	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{9}$	a $\frac{1}{9}$	b $\frac{1}{3}$	1

이 모집단에서 임의추출한 크기가 50인 표본의 표본평균 $\overline{X}$ 에 대하여 $\mathrm{E}(\overline{X})=2$일 때, $\sigma(\overline{X})$의 값은? [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

$E(X)=-\frac{5}{3}+6a+9b=2$

$a+b=\frac{4}{9}$

$\Rightarrow a=\frac{1}{9}\quad b=\frac{1}{3}$

$E(X^2)=5+4+27$

$=36$

$V(X)=32$

$\sigma(X)=4\sqrt{2}$

$\sigma(\bar{X})=\frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\frac{4}{5}$

11. 연속함수 $f(x)$가

$$f(x)=\sin^2 x+\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$$

를 만족시킬 때, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{12}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{7}{12}$ ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

$\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt = a$ 라고 하자.

$f(x)=\sin^2 x+a$

$\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,(1-\cos^2 x+a)\,dx$

$\cos x = k$ 라고 하면

$-\sin x\,dx = dk$ $\quad = \int_{-1}^{1} 1-k^2+a\ dk$

$=\left[k-\frac{k^3}{3}+ak\right]_{-1}^{1}$

$= 2a+\frac{4}{3}$

$= a$

$\therefore a=-\frac{4}{3}$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{4}{3}$

$=-\frac{7}{12}$

12. 한 개의 동전을 반복하여 던질 때, 같은 면이 연속하여 나올 때마다 1점씩 얻기로 한다. 예를 들어 동전을 5번 던져서 차례로 '앞면, 앞면, 앞면, 뒷면, 뒷면'이 나오면 3점을 얻는다. 동전을 5번 던질 때, 2점을 얻을 확률은? [3점]

① $\frac{3}{16}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{5}{16}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{7}{16}$

i) 앞면이 3개인 경우

뒤 앞앞앞 뒤 $+$ ${}_4C_1-2$ 3가지

ii) 앞면이 4개인 경우

${}_5C_1-2=3$ 3가지

뒷면이 3개, 4개인 경우도 같은 경우의 수를 가진다

$\left(\frac{3+3}{32}\right)\times 2=\frac{3}{8}$

13. $0 \le x < 2\pi$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & (\sin x \ge \cos x)\\ \cos x & (\sin x < \cos x)\end{cases}$$

에 대하여 방정식 $2\{f(x)\}^2=\sqrt{3}f(x)$의 모든 해의 합은? [3점]

① 4π ② $\frac{9}{2}\pi$ ③ 5π ④ $\frac{11}{2}\pi$ ⑤ 6π

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & (\frac{\pi}{4}\le x<\frac{5}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi\le x<2\pi)\\ \cos x & (0\le x<\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi\le x<2\pi)\end{cases}$$

i) $f(x)=\sin x$ 일때,

$2\sin^2 x=\sqrt{3}\sin x$

$\sin x = 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi$

ii) $f(x)=\cos x$ 일때,

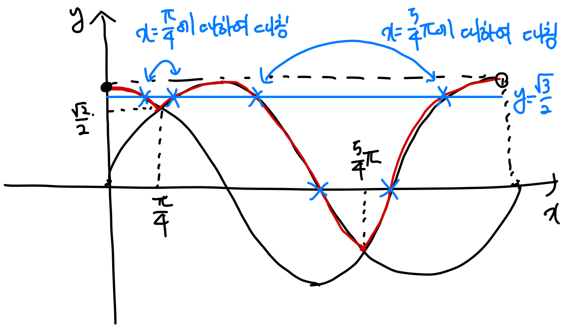
$2\cos^2 x=\sqrt{3}\cos x$

$\cos x = 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

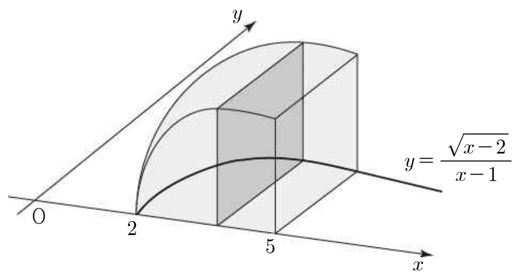
$x=0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

$\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi+\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{11}{6}\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{11}{2}\pi$

참고) 그래프를 이용한 해법.



14. 그림과 같이 곡선 $y=\frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$와 x축 및 직선 $x=5$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [4점]



① $2\ln 2-\frac{4}{5}$ ② $2\ln 2-\frac{3}{4}$ ③ $2\ln 2-\frac{2}{3}$

④ $\ln 3-\frac{3}{4}$ ⑤ $\ln 3-\frac{2}{3}$

$$\int_2^5\left(\frac{\sqrt{x-2}}{x-1}\right)^2dx=\int_2^5\frac{x-2}{(x-1)^2}dx$$

$$=\int_2^5\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$=\left[\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}\right]_2^5$$

$$=2\ln 2-\frac{3}{4}$$

보충설명 : $x-1=t$.

$$\int_2^5\frac{x-2}{(x-1)^2}dx=\int_1^4\frac{t-1}{t^2}dt=\int_1^4\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\left[\ln|t|+\frac{1}{t}\right]_1^4=2\ln 2-\frac{3}{4}$$

15. 다음은 $n \geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여

$$\left(1-\frac{2}{2^3-1}\right)\left(1-\frac{3}{3^3-1}\right)\cdots\left\{1-\frac{n-1}{(n-1)^3-1}\right\}<\frac{3n+4}{4n+4} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (ⅰ) $n=3$일 때, (좌변)$=\frac{5}{7}$, (우변)$=\frac{13}{16}$이므로
> (*)이 성립한다.
> (ⅱ) $n=m\ (m \geq 3)$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면
> $$\left(1-\frac{2}{2^3-1}\right)\left(1-\frac{3}{3^3-1}\right)\cdots\left\{1-\frac{m-1}{(m-1)^3-1}\right\}<\frac{3m+4}{4m+4}$$
> 이다. $n=m+1$일 때,
> $$\left(1-\frac{2}{2^3-1}\right)\left(1-\frac{3}{3^3-1}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{m^3-1}\right)$$
> $$<\left(\frac{3m+4}{4m+4}\right)\left(1-\frac{m}{m^3-1}\right)$$
> $$=\left\{\frac{3}{4}+\frac{1}{4(m+1)}\right\}\left(1-\frac{m}{m^3-1}\right)$$
> $$=\frac{3}{4}+\frac{\boxed{(가)}}{4(m+1)(m^3-1)} \quad \cdots\cdots \ ㉠$$
> 한편 $m^2+3m+3>0,\ m+5>0$이므로
> $$\frac{\boxed{(가)}}{(m+1)(m^3-1)}$$
> $$<\frac{\boxed{(가)}+m^2+3m+3}{(m+1)(m^3-1)}=\frac{m-2}{\boxed{(나)}}$$
> $$<\frac{m-2}{\boxed{(나)}-(m+5)}=\frac{1}{m+2}\text{에서}$$
> $$㉠<\frac{3}{4}+\frac{1}{4(m+2)}=\frac{3(m+1)+4}{4(m+1)+4}\text{ 이다.}$$
> 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n \geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여
> $$\left(1-\frac{2}{2^3-1}\right)\left(1-\frac{3}{3^3-1}\right)\cdots\left\{1-\frac{n-1}{(n-1)^3-1}\right\}<\frac{3n+4}{4n+4}$$
> 이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(4)+g(4)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

(가)

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4(m+1)}\right)\left(1-\frac{m}{m^3-1}\right)=\frac{3}{4}-\frac{3m}{4(m^3-1)}+\frac{1}{4(m+1)}-\frac{m}{4(m+1)(m^3-1)}$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{m^3-3m^2-4m-1}{4(m+1)(m^3-1)} \qquad \therefore f(m)=m^3-3m^2-4m-1$$

(나)

$$\frac{m^3-3m^2-4m-1+m^2+3m+3}{(m+1)(m^3-1)}=\frac{m^3-2m^2-m+2}{(m+1)(m^3-1)}$$

$$=\frac{m-2}{m^2+m+1} \qquad \therefore g(m)=m^2+m+1$$

$f(4)+g(4)=-1+20$

$=20$

16. 양수 a에 대하여 곡선 $y=\frac{4x^2}{x^2+a^2}$의 서로 다른 두 변곡점을 각각 A, B라 하자. 이 곡선 위의 두 점 A, B에서의 접선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① 3 ② $\frac{9}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 9

$f(x)=\frac{4x^2}{x^2+a^2}$ 이라 하자.

$$f'(x)=\frac{8x(x^2+a^2)-8x^3}{(x^2+a^2)^2}=\frac{8a^2x}{(x^2+a^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{8a^2(x^2+a^2)^2-8a^2x(x^2+a^2)\cdot 4x}{(x^2+a^2)^4}$$

$$=\frac{-8a^2(3x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^3}$$

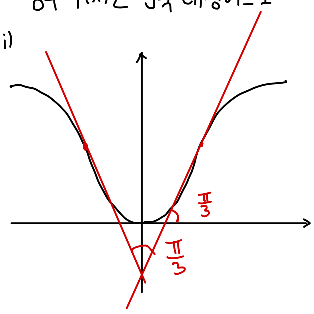
$x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ 에서 변곡점이다.

$$f'\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\frac{8}{\sqrt{3}}a^3}{\left(\frac{4}{3}a^2\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2a}$$

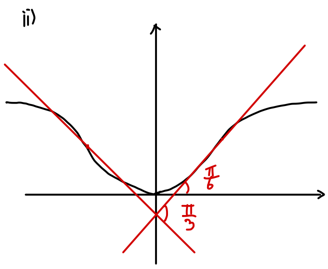
$$f'\left(\frac{-a}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2a}$$

함수 $f(x)$는 y축 대칭이므로

i)



ii)



i) $\frac{3\sqrt{3}}{2a}=\sqrt{3}$ $\quad a=\frac{3}{2}$

ii) $\frac{3\sqrt{3}}{2a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad a=\frac{9}{2}$

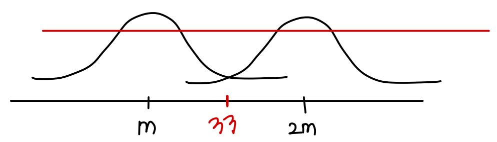
17. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ 5^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다.

$$f(21)=g(45),\quad \mathrm{P}(X \ge 23)+\mathrm{P}(Y \le 46) \ge 1$$

일 때, $\mathrm{P}(20 \le X \le 25)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.2	0.0793
0.4	0.1554
0.6	0.2257
0.8	0.2881

① 0.2347 ② 0.3050 ③ 0.3811 ④ 0.4435 ⑤ 0.5138



두 함수의 교점의 x좌표 : $(21+45)\times\frac{1}{2}=33$

$P(X\ge23)+P(Y\le46)\ge1$

$m+k=23 \quad 2m+k=46$

$m=23$

$33+k=2m \quad 33-k=m$

$m=22$

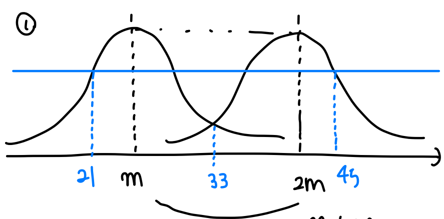
$P(20\le X\le25)=P\left(\frac{20-22}{5}\le Z\le\frac{25-22}{5}\right)$

$=P(-0.4\le Z\le0.6)$

$=0.1554+0.2257$

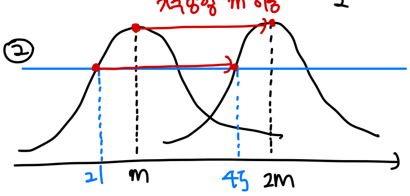
$=0.3811$

참고) ①



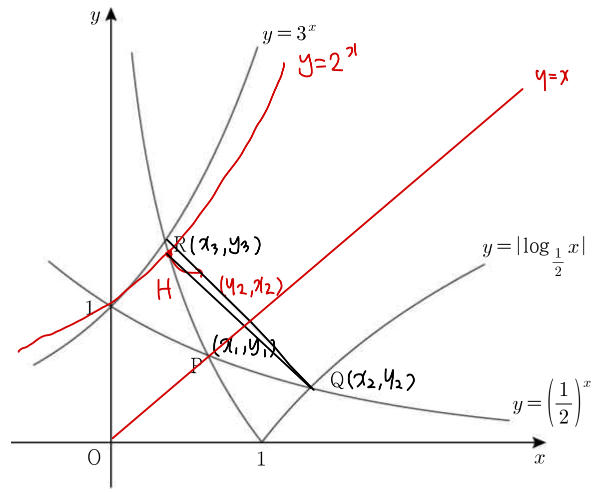
$\frac{m+2m}{2}=33 \Rightarrow m=22.$

②



↳ $m=45-21=24.$

18. 좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_{\frac{1}{2}}x|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_{\frac{1}{2}}x|$와 $y=3^x$이 만나는 점을 $\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$이라 하자.
<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $x_2<y_3$

ㄴ. $x_3-x_2>y_2-y_3$

ㄷ. $(x_1-y_3)(y_2-x_1)>(x_1-x_3)(x_2-x_1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $y=2^x$ 와 $y=\log_2 x$는 역함수이므로
H의 좌표는 (y_2, x_2)이다.
따라서 $x_2<y_3$ 이다.

ㄴ. $\frac{x_2-y_2}{y_2-x_2}=-1$ 이므로 $\overleftrightarrow{HQ}$의 기울기가 -1이다.

$\overleftrightarrow{RQ}$의 기울기 : $\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}<-1$

$\Rightarrow y_2-y_3<x_3-x_2$

ㄷ. P는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$와 역함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 교점이므로 $y=x$위의 점이다.
따라서 $x_1=y_1$ 이다.

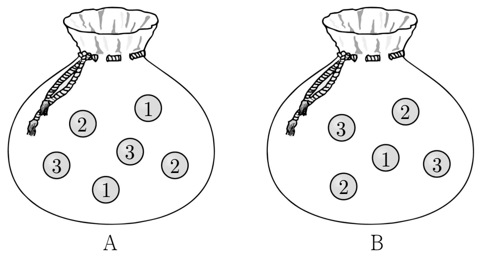
$(x_1-y_3)(y_2-x_1)<(x_1-x_3)(x_2-x_1)\Rightarrow(y_1-y_3)(y_2-y_1)<(x_1-x_3)(x_2-x_1)$

$\Rightarrow\left(\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}\right)\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)>1$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{RP}$의 기울기 $\times$ $\overleftrightarrow{QP}$의 기울기 >1

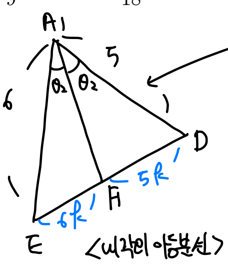
$\overleftrightarrow{HP}$의 기울기 $\times$ $\overleftrightarrow{QP}$의 기울기 $=1$ 이므로 ㄷ은 참이다.

19. 주머니 A에는 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어있고, 주머니 B에는 숫자 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어있다. 주머니 A에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 주머니 B에 넣고 주머니 B에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 주머니 B에서 꺼낸 공 중 1의 숫자가 적혀 있는 공의 개수와 2의 숫자가 적혀 있는 공의 개수가 각각 2 이하일 확률은? [4점]



① $\frac{13}{18}$　② $\frac{7}{9}$　③ $\frac{5}{6}$　④ $\frac{8}{9}$　⑤ $\frac{17}{18}$

여사건을 이용하여 확률을 구하면



i) 1의 개수가 3개 이상일 때

A→B　　B→A

1 두 개를 꼭 포함 × 1 세개 꼭 포함

$\frac{{}_2C_2 \cdot {}_4C_2}{{}_6C_4} \times \frac{{}_3C_3 \cdot {}_6C_1}{{}_9C_4} = \frac{6}{15} \times \frac{6}{126}$

ii) 2의 개수가 3개 이상일 때

A→B　　B→A

2 한개 포함　　2 세개 포함

$\frac{{}_2C_1 \cdot {}_4C_3}{{}_6C_4} \times \frac{{}_3C_3 \cdot {}_6C_1}{{}_9C_4} = \frac{8}{15} \times \frac{6}{126}$

A→B　　B→A

2 두 개 포함　　2 네개 포함

$\frac{{}_2C_2 \cdot {}_4C_2}{{}_6C_4} \times \frac{{}_4C_4}{{}_9C_4} = \frac{6}{15} \times \frac{1}{126}$

B→A

2 세개 포함

$\times \frac{{}_4C_3 \times {}_5C_1}{{}_9C_4} = \frac{6}{15} \times \frac{20}{126}$

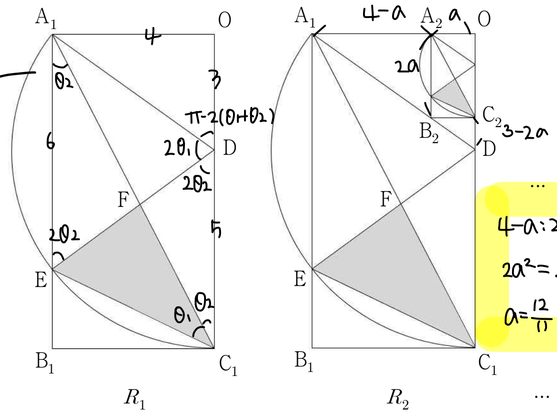
$1 - \left(\frac{6}{15}\times\frac{6}{126} + \frac{8}{15}\times\frac{6}{126} + \frac{6}{15}\times\frac{1}{126} + \frac{6}{15}\times\frac{20}{126}\right)$

$= 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

20. 그림과 같이 $\overline{OA_1}=4$, $\overline{OC_1}=8$인 직사각형 $OA_1B_1C_1$이 있다. 선분 OC_1 위에 $\overline{A_1D}=\overline{C_1D}$가 되도록 점 D를 잡고, 중심이 D인 부채꼴 DA_1C_1을 그린다. 부채꼴 DA_1C_1이 선분 A_1B_1과 만나는 점 중 점 B_1과 가까운 점을 E, 선분 A_1C_1과 선분 DE가 만나는 점을 F라 할 때 삼각형 C_1FE에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 O, 선분 OA_1 위의 점 A_2, 선분 A_1D 위의 점 B_2, 선분 OD 위의 점 C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{OA_2} : \overline{OC_2} = 1:2$인 직사각형 $OA_2B_2C_2$를 그린다. 직사각형 $OA_2B_2C_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



$4-a : 2a = a : 3-2a$

$2a^2 = 2a^2 - 11a + 12$

$a = \frac{12}{11}$

① $\frac{40}{7}$　② $\frac{165}{28}$　③ $\frac{85}{14}$　④ $\frac{175}{28}$　⑤ $\frac{45}{7}$

점 D가 점 A_1, E, C_1을 지나는 원의 중심이므로

$\overline{A_1D} = \overline{ED} = \overline{C_1D}$이다.

$\overline{A_1D} = k$라 하면 $\triangle A_1DO$는 직각삼각형이므로

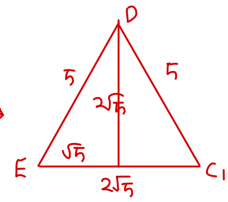
$\overline{OD} = \sqrt{k^2-16}$

$\overline{OD} + \overline{C_1D} = \sqrt{k^2-16} + k = 8 \Rightarrow k=5, \ \overline{OD}=3$

$\triangle A_1EF \sim \triangle C_1DF$ (AA 닮음)

$\overline{A_1E} : \overline{C_1D} = \overline{FE} : \overline{FD} = 6:5$

$S_1 = \frac{1}{2} \times \frac{6}{11} \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = \frac{60}{11}$ →



공비: $4^2 : \left(\frac{12}{11}\right)^2 = 1 : \frac{9}{121}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{60}{11}}{1-\frac{9}{121}} = \frac{\frac{60}{11}}{\frac{112}{121}} = \frac{165}{28}$

21. $a_5=2$인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n| \ge \frac{3}{2}$ 이다.
>
> (나) 3 이상의 모든 자연수 n에 대하여
> $(S_n)^3-(S_{n-1})^3=(a_n)^3+9a_n$ 이다.

$\sum_{k=1}^{20}(a_k)^2$의 최솟값은? [4점]

① $\frac{153}{2}$ ② $\frac{155}{2}$ ③ $\frac{157}{2}$ ④ $\frac{159}{2}$ ⑤ $\frac{161}{2}$

$(S_n)^3-(S_{n-1})^3 = a_n\{(a_n)^2+9\}$

$(S_n-S_{n-1})\{(S_n)^2+S_n\cdot S_{n-1}+(S_{n-1})^2\} = a_n\{(a_n)^2+9\}$

$a_n\{(S_n)^2+S_n\cdot S_{n-1}+(S_{n-1})^2\} = a_n\{(a_n)^2+9\}$

$(S_n)^2+S_n\cdot S_{n-1}+(S_{n-1})^2 = (S_n-S_{n-1})^2+9 \quad (a_n\neq 0)$

$3S_n\cdot S_{n-1}=9$

$S_n\cdot S_{n-1}=3 \quad (n\ge 3)$

$S_5 S_4=(S_4+2)(S_4)=3 \qquad S_4=-3,\ 1$

i) $S_4=1$ 일때

$S_3=3 \qquad S_2=1$

$a_1+a_2=S_2=1$, $a_1+a_2+a_3=3$, $a_1+a_2+a_3+a_4=1$

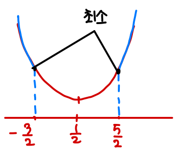
$a_2=1-a_1 \qquad a_3=2 \qquad a_4=-2$

$a_5=2$, $a_6=-2\cdots$

$\sum_{k=1}^{20}(a_k)^2=(a_1)^2+(1-a_1)^2+18\cdot 2^2$

$=2a_1^2-2a_1+73$

$=2(a_1-\frac{1}{2})^2+\frac{145}{2}$



$|a_n|\ge\frac{3}{2}$ 이므로 $a_1\le-\frac{3}{2}$, $a_1\ge\frac{3}{2}$, $a_2\le-\frac{3}{2}$, $a_2\ge\frac{3}{2}$ 을 만족해야 한다.

$\Rightarrow -\frac{3}{2}\le a_1\le\frac{5}{2}$ 최솟값 : $\frac{161}{2}$

ii) $S_4=-3$ 일때

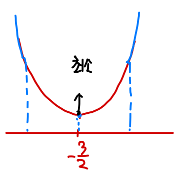
$S_3=-1 \quad S_2=-3 \quad S_5=-1 \quad S_6=-3 \cdots$

$a_3=2 \quad a_2=-3-a_1 \quad a_4=-2 \quad a_5=2 \quad a_6=-2\cdots$

$\sum_{k=1}^{20}(a_k)^2=(a_1)^2+(-3-a_1)^2+18\cdot 2^2$

$=2a_1^2+6a_1+81$

$=2(a_1+\frac{3}{2})^2+\frac{153}{2}$



$|a_1|\ge\frac{3}{2}$, $|a_2|\ge\frac{3}{2}$

$\Rightarrow a_1\le-\frac{9}{2}$, $a_1\ge\frac{3}{2}$, $a_1=-\frac{3}{2}$ 최솟값 : $\frac{153}{2}$

단답형

22. $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 일 때, $\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$의 값을 구하시오. [3점]

4

$\tan^2(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot^2\theta$

$=\csc^2\theta-1$

$=5-1$

$=4$

23. $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x의 계수를 구하시오. [3점]

80

${}_5C_k\,(2x)^k x^{k-5}$

$2k-5=1$

$k=3$

${}_5C_3\cdot 2^3=10\cdot 8$

$=80$

24. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(80,\ \frac{1}{4}\right)$을 따를 때, $\mathrm{V}(2X+3)$의 값을 구하시오. [3점]　　60

$V(X) = 80 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$

$= 15$

$V(2x+3) = 2^2 \cdot 15$

$= 60$

25. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (0 \le t < \pi)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

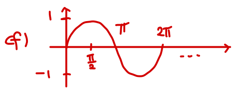
$$x = \sin t - 4\cos t, \quad y = 2\sin t + 2\cos t$$

이다. 점 P의 속력이 최대일 때, 점 P가 직선 $y = ax$ 위에 있다. a의 값을 구하시오. [3점]　　2

$|\vec{v}| = \sqrt{(\cos t + 4\sin t)^2 + 4(\cos t - \sin t)^2}$

$= \sqrt{20\sin^2 t + 5\cos^2 t}$

$= \sqrt{5 + 15\sin^2 t}$



$-1 \le \sin t \le 1$

$t = \frac{\pi}{2}$ 일 때 속력이 최대가 된다.

$t = \frac{\pi}{2}$ 일 때,

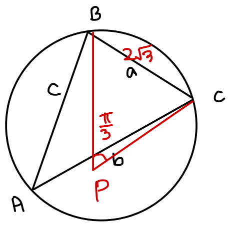
$x = 1$, $y = 2$

$\therefore a = 2$

26. 반지름의 길이가 9인 원에 내접하고 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{9}$을 만족시키는 예각삼각형 ABC가 있다.

$$\overline{\mathrm{BP}} + \overline{\mathrm{CP}} = 6, \quad \angle \mathrm{BPC} = \frac{\pi}{3}$$

를 만족하는 점 P에 대하여 삼각형 BPC의 넓이는 k이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]　　12



$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = 18$

$a = 2\sqrt{3}$

$\overline{BP} = \alpha$, $\overline{CP} = \beta$ 라고 하면

$\begin{cases} \alpha + \beta = 6 \\ \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 12 \end{cases}$

$\alpha^2 + (6-\alpha)^2 - 2\alpha(6-\alpha) \cdot \frac{1}{2} = 12$

$3\alpha^2 - 18\alpha^2 + 24 = 0$

$\alpha = 2$, $\beta = 4$

$\alpha = 4$ $\beta = 2$

$k = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \sin\frac{\pi}{3}$

$= 2\sqrt{3}$

$\therefore k^2 = 12$

27. 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적힌 8장의 카드가 들어있는 주머니에서 갑이 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낸다. 갑이 꺼낸 두 장의 카드 중 3의 배수가 적힌 카드가 있으면 을은 카드를 꺼내지 않고, 3의 배수가 적힌 카드가 없으면 을이 이 주머니에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낸다. 갑 또는 을이 3의 배수가 적힌 카드를 꺼냈을 때, 갑이 3의 배수가 적힌 카드를 꺼냈을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이고, 꺼낸 카드는 다시 넣지 않는다.) [4점] 35

i) 갑이 3의 배수 카드를 선택 o (을이 카드 선택×)

$$1-\frac{{}_6C_2}{{}_8C_2}=1-\frac{15}{28}=\frac{13}{28}$$

ii) 갑이 3의 배수 카드를 선택 x (을이 카드 선택 o)

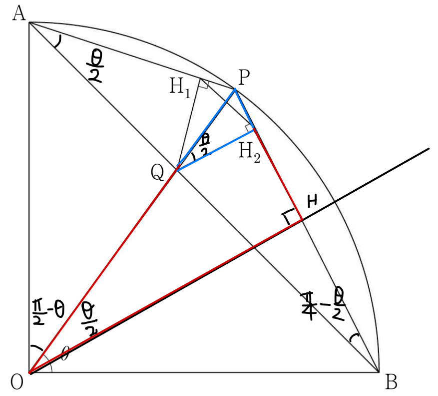
$$\frac{{}_6C_2}{{}_8C_2}\times\left(1-\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\right)=\frac{15}{28}\times\frac{9}{15}=\frac{9}{28}$$

$$\frac{\frac{13}{28}}{\frac{13}{28}+\frac{9}{28}}=\frac{\frac{13}{28}}{\frac{22}{28}}=\frac{13}{22}$$

$\therefore p+q=13+22=35$

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. $\angle POB=\theta$를 만족시키는 호 AB 위의 점 P에 대하여 선분 AB가 선분 OP와 만나는 점을 Q, 점 Q에서 선분 AP와 선분 BP에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.

$\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{\overline{H_1H_2}}{\theta}=a$일 때, $40a^2$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) 20 [4점]



$\triangle PQH_2 \backsim \triangle POH$ (RHA) $\Rightarrow \angle PQH_2=\frac{\theta}{2}$

$\overline{PQ}=x$라 하면

$\overline{QH_2}=x\cos\frac{\theta}{2}$, $\overline{PH_2}=x\sin\frac{\theta}{2}$

$\angle PAB=\frac{\theta}{2}$ ($\because$ $\angle POB$가 원주각), $\angle PBA=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$ ($\because$ $\angle POA$가 원주각)

$\overline{PB}=2\sin\frac{\theta}{2}$, $\overline{H_2B}=(2-x)\sin\frac{\theta}{2}$

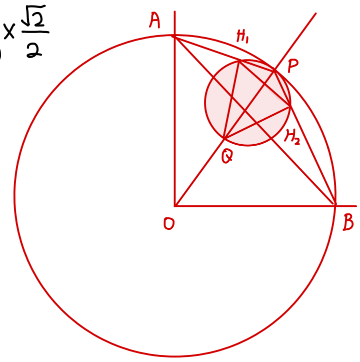
$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\overline{QH_2}}{\overline{H_2B}}=\left(\frac{x}{2-x}\right)\cdot\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$ $\Rightarrow x=\frac{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\tan\frac{\theta}{2}}$

$\angle PH_1Q=\angle PH_2Q=\frac{\pi}{2}$이므로 점 P, H_1, H_2, Q는 $\overline{PQ}$를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

$\overline{H_1H_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\overline{PQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}x$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{H_1H_2}}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\tan\frac{\theta}{2}}{\theta\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\tan\frac{\theta}{2}\right)}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=a$$

$\therefore 40a^2=20$



29. 두 집합 $X=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{0,1,2,3,4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하시오. [4점]

$f(1)+f(2)+f(3) \le 4+f(4)$

355

$f(1)+f(2)+f(3)+(4-f(4)) \le 8$ $\quad -①$

$f(1), f(2), f(3)$, $4-f(4)$는 음이 아닌 정수이므로

① 을 만족시키는 함수의 개수 : ${}_5H_8 = {}_{12}C_4 = 495$

i) $f(1), f(2), f(3)$, $4-f(4)$ 中 한개가 5일 때

$f(1)+f(2)+f(3)+5 \le 8$

$f(1)+f(2)+f(3) \le 3$ $\quad : {}_4H_3$

${}_4C_1 \cdot {}_4H_3 = {}_4C_1 \cdot {}_6C_3$

ii) $f(1), f(2), f(3)$, $4-f(4)$ 中 한개가 6일 때

$f(1)+f(2)+f(3)+6 \le 8$

$f(1)+f(2)+f(3) \le 2$ $\quad : {}_4H_2$

${}_4C_1 \cdot {}_4H_2 = {}_4C_1 \cdot {}_5C_2$

iii) $f(1), f(2), f(3)$, $4-f(4)$ 中 한개가 7일 때

$f(1)+f(2)+f(3)+7 \le 8$

$f(1)+f(2)+f(3) \le 1$ $\quad : {}_4H_1$

${}_4C_1 \cdot {}_4H_1 = {}_4C_1 \cdot {}_4C_1$

iV) $f(1), f(2), f(3)$, $4-f(4)$ 中 한개가 일 때

$f(1)+f(2)+f(3)+8 \le 8$

$f(1)+f(2)+f(3) \le 0$ $\quad : {}_4H_0$

${}_4C_1 \cdot {}_4H_0 = {}_4C_1 \cdot {}_3C_0$

$495 - {}_4C_1({}_6C_3 + {}_5C_2 + {}_4C_1 + {}_3C_0) = 495 - {}_4C_1 \cdot {}_7C_3$

$= 495 - 140$

$= 355$

cf $a+b+c+d \le 8$ 의 경우의 수

$a+b+c+d = 8$ $\quad {}_4H_8$

$a+b+c+d = 7$ $\quad {}_4H_7$ $\quad \Rightarrow {}_4H_8 + {}_4H_7 + \cdots + {}_4H_0$

$\vdots$ $\quad = {}_5H_8$

$a+b+c+d = 0$ $\quad {}_4H_0$

30. 상수 k와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = ke^{f(x)} + \int_0^x e^{f(t)}\,dt$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 α의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2, α_3, α_4이다. $\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} f(x)\,dx = 4$일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha_1)+f(\alpha_2)=f(\alpha_3)+f(\alpha_4)$ ⇒ 중점의 y좌표가 일치
(나) 함수 $(g \circ f)(x)$가 $x=\beta$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 β의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2, α_3, α_4이다.

$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} \frac{f(x)g'(x)}{e^{f(x)}}\,dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

73

$g'(x) = ke^{f(x)} \cdot f'(x) + e^{f(x)} = e^{f(x)}(kf'(x)+1) = 0$

$f'(x) = -\frac{1}{k}$

(가) 조건이 만족하려면

α_1와 α_4, α_2와 α_3가 변곡점에 대하여

대칭이고 $f(\alpha_2)-f(\alpha_3)=f(\alpha_4)-f(\alpha_1)$이어야

하므로 $f(\alpha_2)=f(\alpha_4)$, $f(\alpha_1)=f(\alpha_3)$가 성립한다.

(나) $g'(f(x)) \cdot f'(x) = 0$

① $f'(x)=0$ $\quad x=\alpha_2, \alpha_3$ $\quad$ 2개

② $g'(f(x))=0$ $\quad$ 2개 $\quad \Rightarrow$ 4개 $\alpha_1 \sim \alpha_4$

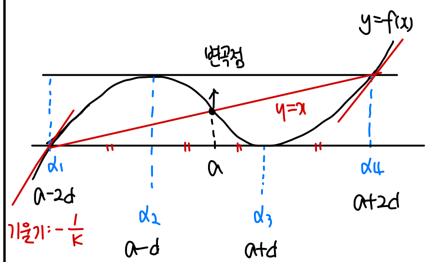
$\Rightarrow f'(f(x)) = -\frac{1}{k}$

$\Rightarrow f(x)=\alpha_1, \alpha_4$ $\quad x=\alpha_1, \alpha_4$

$\Rightarrow \alpha_1=f(\alpha_1)$, $\alpha_4=f(\alpha_4)$

삼차함수의 대칭성에 의하여

$\alpha_1 \sim \alpha_4$는 등차수열을 이룬다.



$f(x)-x = (x-a+2d)(x-a)(x-a-2d)$

$f(a+d)-(a+d) = 3d \times d \times (-d)$

$a-2d-(a+d) = -3d^3$

$d^2=1$

$d=1 \quad (d>0)$

$\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}(f(x)-x)\,dx = \int_{a-d}^{a+d} f(x)\,dx - \int_{a-d}^{a+d} x\,dx$

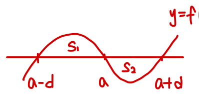
$= 4 - \int_{a-d}^{a+d} x\,dx$

$= 4 - 2ad$

$= 0 \quad \Rightarrow a=2$

$k = \frac{-1}{f'(0)} = -\frac{1}{9}$

cf)



$S_1=S_2$

$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} \frac{f(x)g'(x)}{e^{f(x)}}\,dx = \int_0^4 \left(-\frac{1}{9}f'(x)f(x) + f(x)\right)dx$

$= -\frac{1}{18}\left[(f(x))^2\right]_0^4 + \int_0^4 f(x)\,dx$

$= -\frac{8}{9} + 8 = \frac{64}{9}$ $\quad \therefore p+q=73$

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.