

Get 독·설·해 (약식 해설)

4. [주예지 Finale, 48 모의고사 1회 4번]

공차가 2 이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 수열 $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$b_{2n-1} = a_n, \quad b_{2n} = 20 - a_n$$

을 만족시킨다. 자연수 m 에 대하여 집합

$$\{b_i \mid 1 \leq i \leq m+1, i \text{ 는 자연수}\}$$

의 원소의 최댓값과 최솟값의 합을 c_m 이라 할 때, 어떤 자연수 k 에 대하여 $\sum_{m=1}^k c_m = 242$ 이다.

a_k 의 값을 구하시오. [4점]

< Solution 1 >

정답) 27

공차가 2 이고 첫째항이 a_1 인 등차수열의 일반항은 $a_n = a_1 + 2(n-1)$ 이다. 따라서 $b_{2n-1} = a_1 + 2(n-1)$ 이고, $b_{2n} = 20 - a_1 - 2(n-1)$ 이다. 이때, n 의 값이 커짐에 따라 b_{2n-1} 은 증가하고, b_{2n} 은 감소한다.

i) $b_1 \geq b_2 \Leftrightarrow a_1 \geq 10$ 인 경우

집합 $\{b_i \mid 1 \leq i \leq m+1, i \text{ 는 자연수}\}$ 의 원소의 최댓값과 최솟값의 합 c_m 을 나열해보면 다음과 같다.

$$c_1 = b_1 + b_2 = a_1 + (20 - a_1) = 20$$

$$c_2 = b_3 + b_2 = a_2 + (20 - a_1) = 22$$

$$c_3 = b_3 + b_4 = a_2 + (20 - a_2) = 20$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{c_m\}$ 은 20, 22 가 반복해서 나오는 수열이다.

그런데 $\sum_{m=1}^{11} c_m = 20 \times 6 + 22 \times 5 = 240$ 이고 $c_{12} = 22$ 이므로 $\sum_{m=1}^k a_m = 242$ 인 자연수 k 는 존재하지 않는다.

ii) $b_1 < b_2 \Leftrightarrow a_1 < 10$ 인 경우

집합 $\{b_i \mid 1 \leq i \leq m+1, i \text{ 는 자연수}\}$ 의 원소의 최댓값과 최솟값의 합 c_m 을 나열해보면 다음과 같다.

$$c_1 = b_1 + b_2 = a_1 + (20 - a_1) = 20$$

$$c_2 = b_1 + b_2 = a_1 + (20 - a_1) = 20$$

$\vdots$

그런데

$$b_{2n-1} = b_2 \Leftrightarrow a_n = 20 - a_1$$

$$\Leftrightarrow 20 - a_n = a_1$$

$$\Leftrightarrow b_{2n} = b_1$$

를 만족시키는 자연수 n 의 값을 p 라 할 때,

$$c_{2p-1} = b_{2p} + b_{2p-1} = (20 - a_p) + a_p = 20$$

$$c_{2p} = b_{2p} + b_{2p+1} = (20 - a_p) + a_{p+1} = 22$$

$$c_{2p+1} = b_{2p+2} + b_{2p+1} = (20 - a_{p+1}) + a_{p+1} = 20$$

$\vdots$

이다. 따라서 $\sum_{m=1}^k c_m = 242 = 20 \times 11 + 22 \times 1$ 이므로 $k = 12$, $p = 6$ 이다.

이때, $a_n = a_1 + 2(n-1)$ 이므로 $p = 11 - a_1$ 이다. 즉, $a_1 = 5$ 이다.

그러므로 $a_k = a_{12} = a_1 + 2 \times 11 = 27$ 이다.

< Solution 2 >

정답) 27

$a_n = a_1 + 2(n-1)$ 이므로 좌표평면에서 점 (n, a_n) 은 직선 $y = 2x - 2 + a_1$ 위의 점이다.

따라서 두 점 $(n, b_{2n-1}), (n, b_{2n})$ 은 각각 두 직선 $y = 2x - 2 + a_1, y = -2x + 22 - a_1$ 위에 있다.

이때, 두 직선의 교점은 $\left(6 - \frac{a_1}{2}, 10\right)$ 이다.

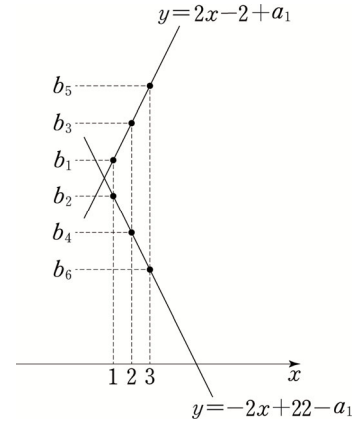
i) $6 - \frac{a_1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow a_1 \geq 10$ 인 경우

두 직선 $y = 2x - 2 + a_1, y = -2x + 22 - a_1$ 은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 수열 $\{c_m\}$ 은 20, 22가 반복해서 나오는 수열이다.

그런데 $\sum_{m=1}^{11} c_m = 20 \times 6 + 22 \times 5 = 240$ 이고 $c_{12} = 22$ 이므로

$\sum_{m=1}^k a_m = 242$ 인 자연수 k 는 존재하지 않는다.



ii) $6 - \frac{a_1}{2} > 1 \Leftrightarrow a_1 < 10$ 인 경우

두 직선 $y = 2x - 2 + a_1, y = -2x + 22 - a_1$ 은 오른쪽 그림과 같다.

따라서

$$\begin{aligned} b_{2n-1} = b_2 &\Leftrightarrow a_n = 20 - a_1 \\ &\Leftrightarrow 20 - a_n = a_1 \\ &\Leftrightarrow b_{2n} = b_1 \end{aligned}$$

을 만족시키는 자연수 n 의 값을 p 라 할 때,

$c_1 = 20, c_2 = 20, \dots, c_{2p-1} = 20, c_{2p} = 22, c_{2p+1} = 20, \dots$ 이다.

따라서 $\sum_{m=1}^k c_m = 242 = 20 \times 11 + 22 \times 1$ 이므로 $k = 12, p = 6$ 이다.

이때, $a_n = a_1 + 2(n-1)$ 이므로 $p = 11 - a_1$ 이다. 즉, $a_1 = 5$ 이다.

그러므로 $a_k = a_{12} = a_1 + 2 \times 11 = 27$ 이다.

