행동강령 - 의심하라

평가원은 절대로 “그냥” 숫자를 주지 않습니다. 모든 조건과 숫자는 의미가 있어요. 예를 들어볼게요. 제가 문제를 제시하고 질문을 던질 테니까 문제를 풀어보시고 스스로 답을 해보세요. 어려우면 아래에 제 해설을 보셔도 되구요.

21. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2021학년도 6월 21번입니다.

왜 하필 ㄱ선지에는 “$\frac{1}{2}$“라는 숫자가 있는 걸까요? ㄴ, ㄷ과 어떤 관련이 있는 걸까요?

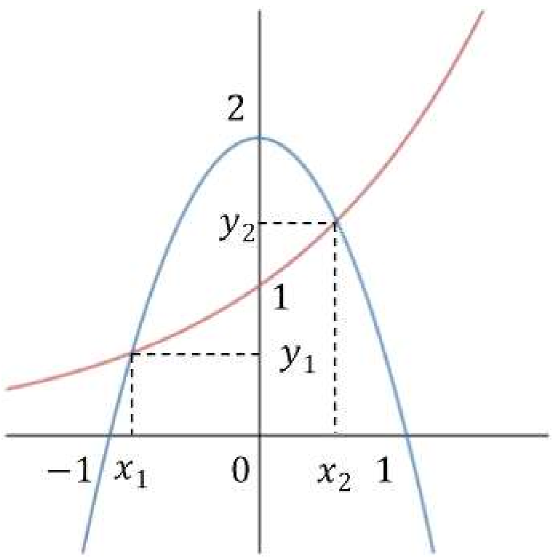
정답 ⑤〔2021학년도 6월 21〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

$y=2^x$와 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$이라고 한답니다. 그리고 $x_1<x_2$라고 하네요.

일단 각각 만나니까 $2^{x_1}=-2{x_1}^2+2=y_1$이고 $2^{x_2}=-2{x_2}^2+2=y_2$입니다.

그리고 그래프를 대충 그려볼게요. $y=2^x$는 $(0,\ 1)$을 지나고 점근선이 $y=0$인 그래프입니다. $y=-2x^2+2$는 $-2(x^2-1)=-2(x+1)(x-1)$이니까 x축과 $x=-1,\ 1$에서 만나구요, 축은 $x=0$인 그래프입니다. 극댓값은 2이구요.



뭐 이정도로 그릴 수 있겠네요.

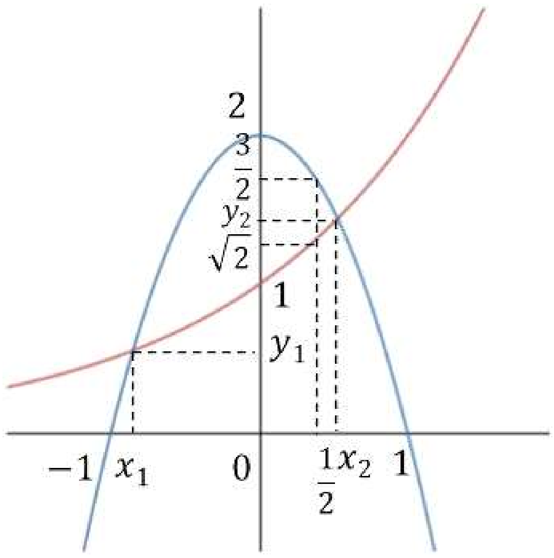
ㄱ에서 x_2가 $\frac{1}{2}$보다 크냐고 물어보네요. 어…… $\frac{1}{2}$보다 큰지는 어떻게 알죠?

그럼 이렇게 생각하면 되죠. 그림을 보면 $x=x_2$에서 $y=2^x$와 $y=-2x^2+2$가 만나잖아요. x_2보다 커지면? $y=2^x$가 $y=-2x^2+2$보다 커지구요, x_2보다 작아지면? $y=2^x$가 $y=-2x^2+2$보다 작아지죠.

그러면 $y=2^x$와 $y=-2x^2+2$에 $x=\frac{1}{2}$을 넣어서 어느 함수가 더 큰지를 확인하면 되는 거 아닌가요? 만약 $y=2^x$의 함숫값이 크다면 x_2보다 $\frac{1}{2}$이 더 큰 거구요, $y=-2x^2+2$의 함숫값이 크다면 x_2보다 $\frac{1}{2}$이 더 작은 거겠죠.

$y=2^x$의 함숫값은 $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$이고, $y=-2x^2+2$의 함숫값은 $\frac{3}{2}$입니다. 비교를 위해 두 값을 제곱하면 $2<\frac{9}{4}$가 되네요. $y=-2x^2+2$의 함숫값이 더 크죠? 따라서 $x_2>\frac{1}{2}$입니다. ㄱ은 맞네요?

이거 그림에다 표시해보면



이렇게 되겠네요.

2-1) ㄱㄴㄷ 유기성

ㄴ에서 $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$이냐고 물어봅니다. 음... 이거는 어떻게 해야 할까요?

문자가 두 개면 비교하기가 힘든데... 그러고 보니 아까 $2^{x_1} = -2{x_1}^2 + 2 = y_1$이고 $2^{x_2} = -2{x_2}^2 + 2 = y_2$라고 했잖아요? 여기서 $-2{x_1}^2 + 2 = y_1$와 $-2{x_2}^2 + 2 = y_2$를 사용해봅시다. 각각 넣어보면 $-2\left({x_2}^2 - {x_1}^2\right) < x_2 - x_1$입니다.

이거 살짝만 정리하면 $-2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < x_2 - x_1$이 되죠? 아까 $x_2 > x_1$이라고 했잖아요? 그러면 $x_2 - x_1 > 0$이 되네요. 양변을 $x_2 - x_1$로 나눠도 부등식의 방향이 바뀌지 않겠죠? 나눠보면 $-2(x_2 + x_1) < 1$이 됩니다. -2도 나눠보면 $x_1 + x_2 > -\frac{1}{2}$가 됩니다. 어... 이거는 어떻게 비교하죠?

아까 ㄱ에서 $x_2 > \frac{1}{2}$라고 했잖아요. 그리고 그림을 잘 보세요. x_1은 -1보다 크지 않나요? 0보다는 작구요.

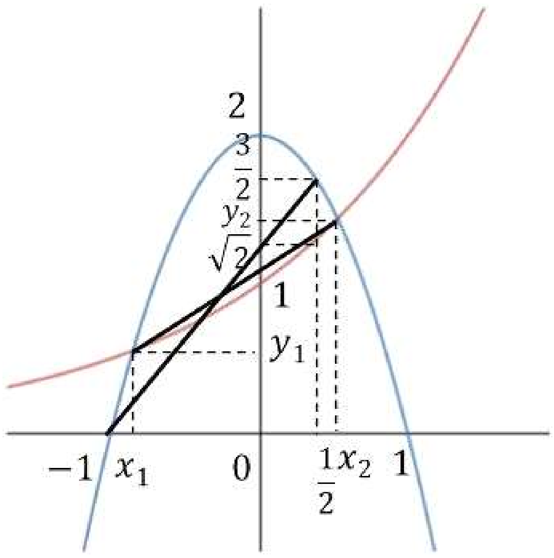
따라서 $-1 < x_1 < 0$입니다. $x_2 > \frac{1}{2}$이고 $-1 < x_1 < 0$이잖아요. 이 둘을 더하면? 아무리 작아도 최소한 $-\frac{1}{2}$보다는 크게 되겠네요. $x_1 + x_2 > -\frac{1}{2}$ 맞습니다. ㄴ은 맞네요.

2-2) 그림 있으면 그림 보면서, ㄱㄴㄷ 유기성

ㄴ에서 $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$이냐고 물어봅니다. 그런데 이거 어디서 많이 본 모양 아닌가요? 우변에 있는 $x_2 - x_1$을 좌변으로 넘기면 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 1$가 되잖아요. 이건 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 이은 직선의 기울기인데요?

그런데 1은 뭘까요? ㄱ에서 $\frac{1}{2}$라는 숫자가 왜 나왔을지 생각해보세요. $(-1,\ 0)$과 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$을 이어보세요.

기울기가 $\dfrac{\frac{3}{2} - 0}{\frac{1}{2} - (-1)} = 1$이 나오네요? 직선을 다 그림에 표시해보면



이렇게 되네요. $(-1,\ 0)$과 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$를 이은 직선이 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 이은 직선보다 기울기가 더 크죠? 그러면 ㄴ은 맞네요.

3) ㄱㄴㄷ 유기성, 지수로그 계산은 밑 통일하기

ㄷ에서 $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1y_2 < 1$이냐고 물어보네요. 이건 또 뭐죠..?

어.. 아까 y_1과 y_2로 정리된 게 있었죠..? $2^{x_1} = -2{x_1}^2 + 2 = y_1$와 $2^{x_2} = -2{x_2}^2 + 2 = y_2$이거 말이에요. 그런데

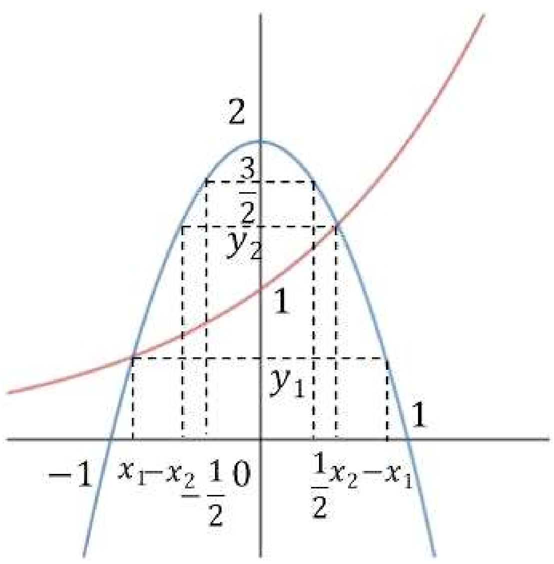
이차식으로 하면 너무 복잡할 거 같은데요? 이번엔 지수로 가봅시다. $2^{x_1} = y_1$, $2^{x_2} = y_2$라는 걸 사용하는 거에요.

그러면 $\frac{\sqrt{2}}{2} < 2^{x_1}2^{x_2} < 1$이 됩니다. 이거는 $\frac{\sqrt{2}}{2} < 2^{x_1+x_2} < 1$가 되죠.

이거 계산하려면 밑을 통일해야 하겠네요. 가봅시다. 일단 밑이 2인 지수로 통일해볼게요. 일단

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$가 되구요. $1 = 2^0$입니다. 따라서 $-\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < 0$이 되네요.

일단 그림을 잘 보세요.



이렇게 되죠? $y = -2x^2 + 2$는 축이 $x = 0$이니까 $x = 0$에 대하여 대칭이에요.

그러니까 저렇게 그림에 표시할 수 있는 거죠.

$x_2 < -x_1$이니까 $x_1 + x_2 < 0$입니다. 거기다 x_1은 -1보다 크죠? $-\frac{1}{2}$보다는 작구요. 따라서

$-1 < x_1 < -\frac{1}{2}$입니다. $x_2 > \frac{1}{2}$이고 $-1 < x_1 < -\frac{1}{2}$이니까 둘을 더하면 $-\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < 0$가 나오네요.

맞습니다. ㄷ도 맞네요. 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번입니다.

30. 이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, 삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 0) \\ g(x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-3)+h'(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다. (나) 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이다.

2021학년도 6월 30번입니다.

왜 하필 $f(x)$는 $x=$"-1"에서 극대인 걸까요? 이차함수가 극대라는 건 어떤 의미일까요?

왜 하필 $g(x)$는 이차항의 계수가 0인 걸까요? 왜 $h(x)$는 $x=$"0"을 기준으로 함수가 나뉘어져 있는 걸까요?

왜 하필 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합이 "1"인 걸까요? 왜 하필 (나)조건의 구간이 $-2 \le x \le 3$인 걸까요?

정답 38 〔2021학년도 6월 30〕

1) 문제해석

$f(x)$는 이차함수인데 $x=-1$에서 극대라고 하네요. 이거 바로 식 세울 수 있죠? $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하고 극댓값을 b라 하면 $f(x)=a(x+1)^2+b\ (a<0)$라고 할 수 있겠네요. 극댓값을 가지니까 최고차항의 계수는 음수이구요. 축은 $x=-1$입니다. $x=-1$축에 대하여 대칭인 거죠.

그리고 $g(x)$는 삼차함수인데 이차항의 계수가 0이라고 하네요. 음.... 원래 삼차함수 식을 바로 세우는 걸 좋아하진 않지만 이차항의 계수가 0이라고 하니까 세워볼게요. $g(x)=px^3+qx+r$이라고 할 수 있겠죠?

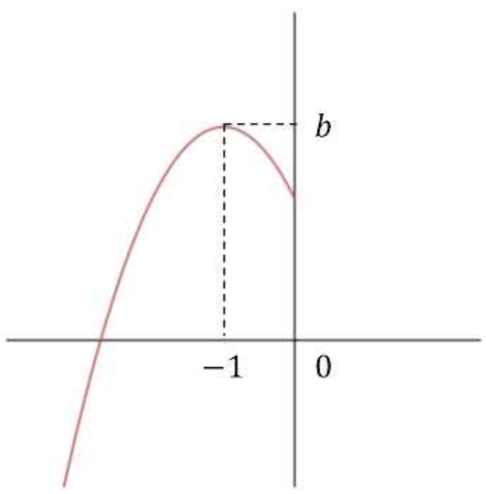
2) 미분가능은 도함수의 연속이다, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

이때 $h(x)=\begin{cases} f(x)\ (x\le 0) \\ g(x)\ (x>0) \end{cases}$인데 이게 모든 실수 x에 대하여 미분가능하답니다. 미분가능하다는 건 도함수의 연속으로 생각하면 되잖아요? 물론 정확한 건 아니지만 다항함수니까 이렇게 생각해도 무방해요. 일단 원래 함수에서도 연속이어야 하니까 $f(0)=g(0)$이구요, 미분하면 $h'(x)=\begin{cases} f'(x)\ (x\le 0) \\ g'(x)\ (x>0) \end{cases}$인데 이게 연속이니까 $f'(0)=g'(0)$입니다.

그러고 보니 아까 $f(x)=a(x+1)^2+b$랑 $g(x)=px^3+qx+r$를 구했었잖아요. 각각 값을 넣어봅시다.

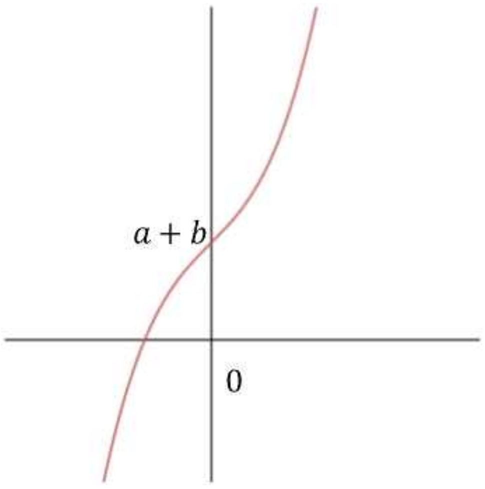
$f(0)=g(0)$이니까 $a+b=r$이네요. 그리고 $f'(x)=2a(x+1)$, $g'(x)=3px^2+q$이니까 $2a=q$입니다. 다 넣어보면 $g(x)=px^3+2ax+a+b$가 되겠네요.

이거 그래프를 그려볼까요? 일단 $x\le 0$에서는



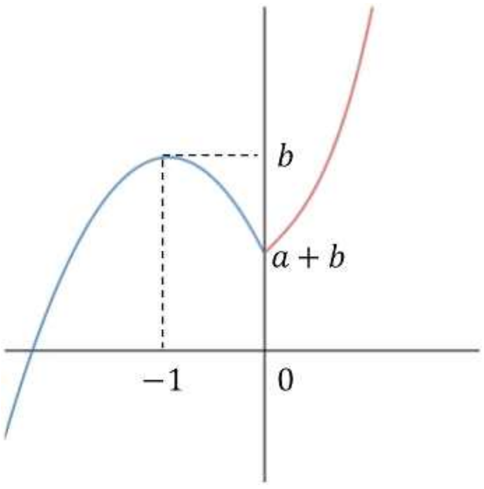
이렇게 될 거에요.

이제 $g(x)$를 관찰해봅시다. $g(x)=px^3+2ax+a+b$를 잘 보세요. 이거 상수항인 $a+b$가 없다고 생각하면 기함수 아닌가요? 원점 대칭함수잖아요? 그런데 그 함수를 $a+b$만큼 움직였어요. 그러니까 대충



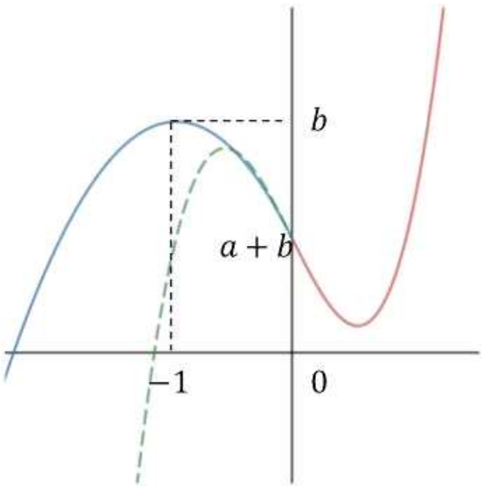
이렇게 될 거라는 이야기죠. 대충 그려서 개형은 정확하지 않을 수도 있어요.

이제 이 함수를 $x>0$에서 짤라서 $h(x)$를 만들어야 해요. 어..? 그런데 바로 위와 같은 그래프를 $x>0$에서 짜르고 $h(x)$를 그려보세요.

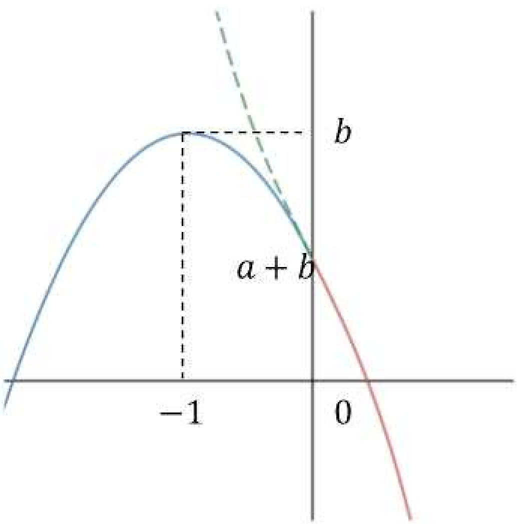


연속은 맞는데, 미분가능한가요? 아닌데요?

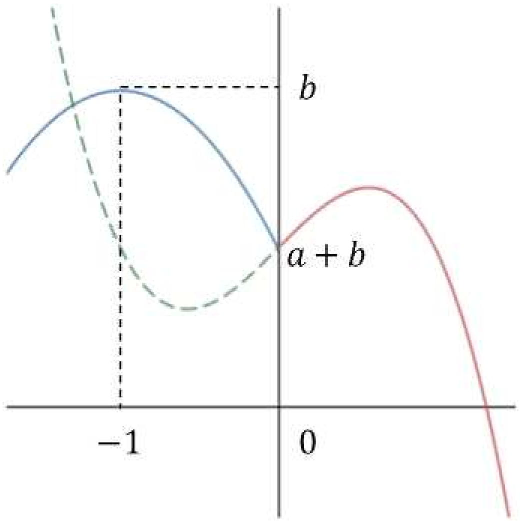
어.... 이거 그래프를 몇 개 그려봐야 할 것 같아요. 일단 계속 증가하는 그래프는 안 됩니다.



이렇게 그리면요? 점선 그래프는 무시하세요. $x>0$에서 짤랐다는 걸 보여주기 위해서 그린 거에요. 이거는 되죠?

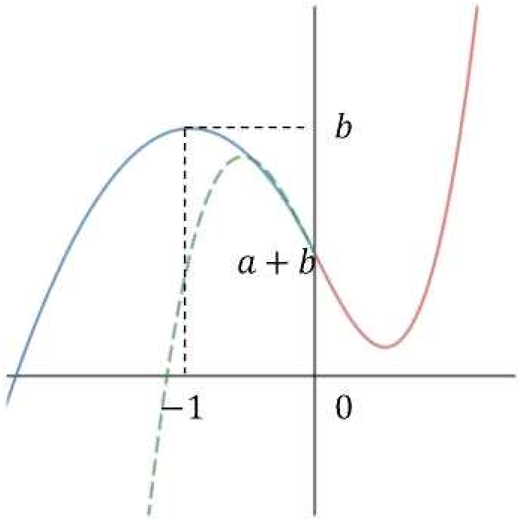


이렇게 계속 감소하게 그리면요? 이것도 되네요.

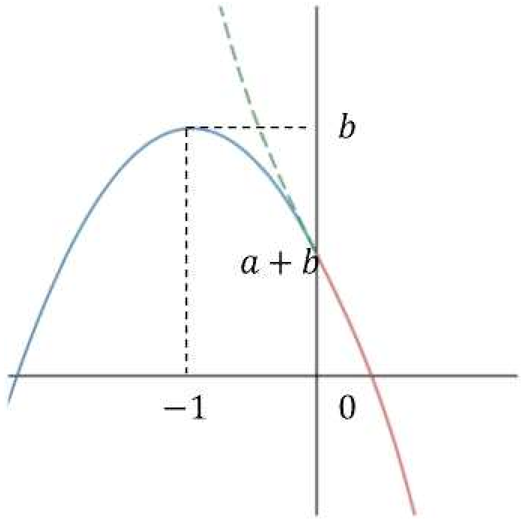


이렇게 그리면... 미분가능하지 않군요. 안 되겠네요.

결국 가능한 그래프는



이거랑



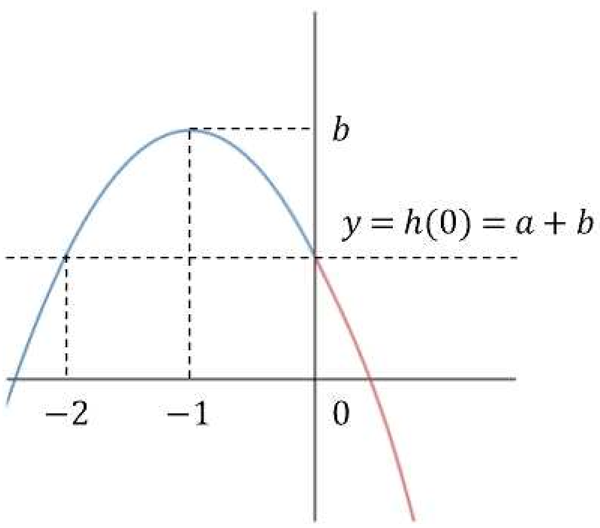
이거에요.

그러면 결국 $g(x)$의 이차항의 계수가 0이고 $h(x)$가 $x=0$을 기준으로 함수가 나뉘어져 있는 건 $g(x)$가 기함수를 $a+b$만큼 올린 함수라는 걸 이용하기 위함이었겠네요. $h(x)$를 미분가능하도록 만들고 케이스 분류를 하게 한 거죠.

3) 조건해석

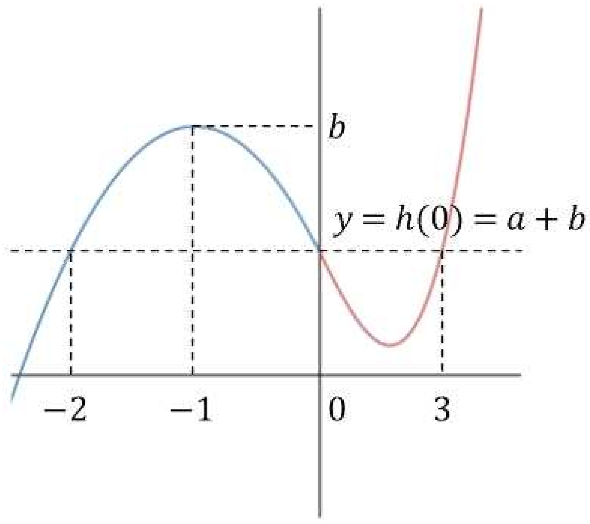
(가)조건에서 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합이 1이라고 합니다. 그러니까 $y=h(x)$와 $y=h(0)$이 만나는 점의 x좌표의 합이 1이라는 거죠?

그래프 잘 관찰해보세요.



이 그래프 같은 경우 $y=h(0)$과 만나는 점이 그림과 같이 되죠? 일단

$f(x)$는 축이 $x=-1$이니까 $x=0$에서 $y=h(0)$과 만나면 축에 대하여 대칭인 부분인 $x=-2$에서도 만나게 되잖아요? 그런데 그게 끝이죠. 모든 실근의 합은 -2입니다. 안 되겠죠?



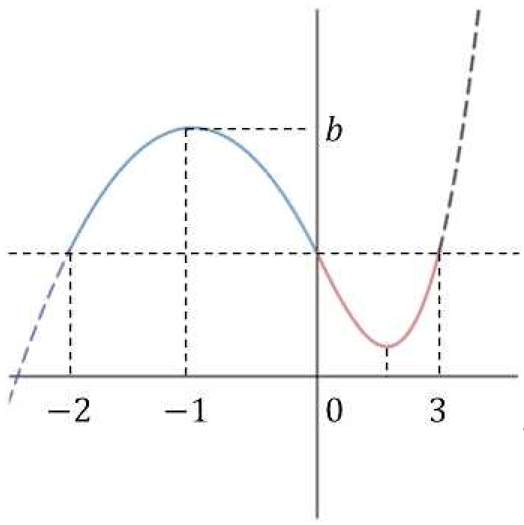
이 그래프는요? 일단 아까와 마찬가지로 $y=h(0)$과 $x=-2$에서 만납니다. 그러니까 이미 실근의 합이 -2는 있는 거죠.

그런데 $x>0$에 있는 부분에서 만나는 점이 하나 더 있잖아요? 그 점의 x좌표까지 더한 값이 1이 되어야 해요. 그 말은? $x=3$에서 $y=h(0)$와 $y=h(x)$가 만난다는 이야기겠죠. 따라서 $h(3)=h(0)=a+b$입니다.

일단 계산해볼까요? $x>0$에서 $h(x)=g(x)=px^3+2ax+a+b$인데 $h(3)=h(0)=a+b$이니까

$g(3)=27p+6a+a+b=a+b$이구요, $p=-\dfrac{2}{9}a$입니다. $g(x)=-\dfrac{2}{9}ax^3+2ax+a+b$이네요.

(나)조건에서 $-2\le x\le 3$에서 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차가 $3+4\sqrt{3}$이라고 합니다. 어? -2와 3이라는 숫자는 방금 그래프에서 봤던 거 아닌가요? $y=h(0)$와 $y=h(x)$가 만나는 점의 x좌표가 -2와 3이었잖아요? 이 부분에서 그래프를 짤라보면



이렇게 됩니다. 최댓값을 바로 보이죠? b에요. 최솟값은요? $x>0$에서 $h(x)=g(x)$의 극솟값이네요. 일단 미분해서 확인해봐야겠어요.

$g'(x)=-\dfrac{2}{3}ax^2+2a=-\dfrac{2a}{3}(x^2-3)=-\dfrac{2a}{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$이니까 $x=\sqrt{3}$에서 극솟값을 가집니다. 극솟값은

$h(\sqrt{3})=g(\sqrt{3})=\dfrac{a(3+4\sqrt{3})}{3}+b$입니다.

최댓값과 최솟값의 차는 $b-\left(\dfrac{a(3+4\sqrt{3})}{3}+b\right)=-\dfrac{a(3+4\sqrt{3})}{3}$이네요. 이게 $3+4\sqrt{3}$이죠? 따라서

$-\dfrac{a(3+4\sqrt{3})}{3}=3+4\sqrt{3}$이고 $a=-3$입니다. $f(x)=-3(x+1)^2+b$이고 $g(x)=\dfrac{2}{3}x^3-6x+b-3$이네요.

이때 $h'(-3)+h'(4)$를 구하라고 합니다. 각각 미분하고 계산하면 되겠네요. 일단 $f'(x)=-6(x+1)$이니까 $h'(-3)=12$이구요, $g(x)=2x^2-6$이니까 $h'(4)=26$입니다. $h'(-3)+h'(4)=38$이네요.

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

2020학년도 수능 30번입니다.

왜 하필 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$는 $y=x$, $y=-x$와 서로 다른 "2"개의 점에서 만나는 걸까요? 왜 하필 $f(0)$="0", $f'(1)$="1"일까요? 왜 하필 기울기가 "1"인 $y=x$를 줬을까요? 왜 하필 원점에서 만나는 $y=x$, $y=-x$를 줬을까요?

정답 51 〔2020학년도 수능 30〕

1) 조건해석

$f(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수랍니다.

(가)조건에서 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2개이구요, (나)조건에서 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2개라고 합니다. 그 말은 $y=f(x)$와 $y=x$가 만나는 서로 다른 점은 2개이고, $y=f(x)$와 $y=-x$가 만나는 서로 다른 점도 2개라는 말이죠? $y=f(x)$와 $y=x$, $y=-x$ 각각과 서로 다른 2개의 점에서 만나야 합니다.

어? 그런데 잘 생각해보세요. $f(x)$는 삼차함수에요. 삼차함수와 직선이 두 개의 점에서 만난다는 건 단순히 만난다는 의미가 아니잖아요. 삼차함수와 직선이 두 개의 점에서 그냥 만날 수가 있나요? 지금 그래프 막 그려보세요. 절대로 그냥은 안 만납니다. 한 점에서 접해야만 하죠. 그러니까 $y=f(x)$와 $y=x$, $y=-x$는 한 점에서 그냥 만나고 한 점에서는 접해야 합니다.

그리고 $f(0)=0$이고 $f'(1)=1$이라고 하네요. ...? 아까 $y=f(x)$와 $y=x$, $y=-x$는 한 점에서 그냥 만나고 한 점에서는 접해야 한다고 하지 않았나요? $f(0)=0$이면 이미 한 점 나왔는데요? 일단 $x=0$에서 두 함수와 만납니다.

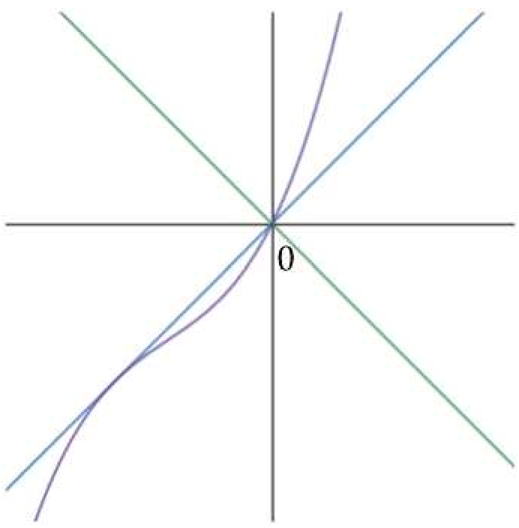
거기에 $f'(1)=1$이네요? 그렇다면... $y=f(x)$와 $y=x$가 $x=1$에서 접할 수도 있겠는데요? $y=x$의 기울기는 1이잖아요? 그래프 그려서 확인해봅시다.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

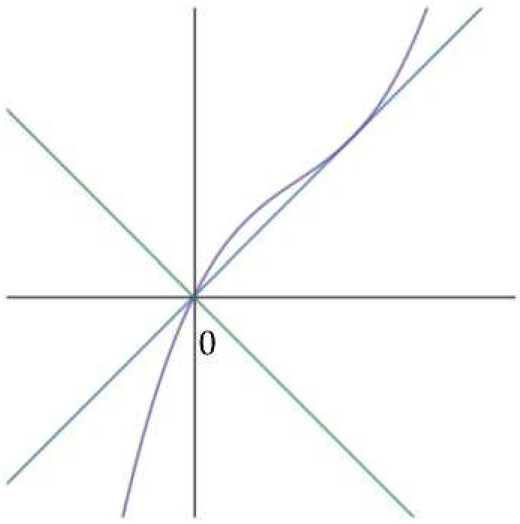
$y=f(x)$와 $y=x$, $y=-x$는 한 점에서 그냥 만나고 한 점에서는 접해야 하구요, $f(0)=0$이고 $f'(1)=1$인 그래프를 그려볼게요.

일단 $y=x$를 기준으로 접하는 점이 $x=0$인지 아닌지로 분류 좀 하면서 가볼게요.

만약 $y=x$와 $x=0$에서 접하지 않고 그냥 만난다면

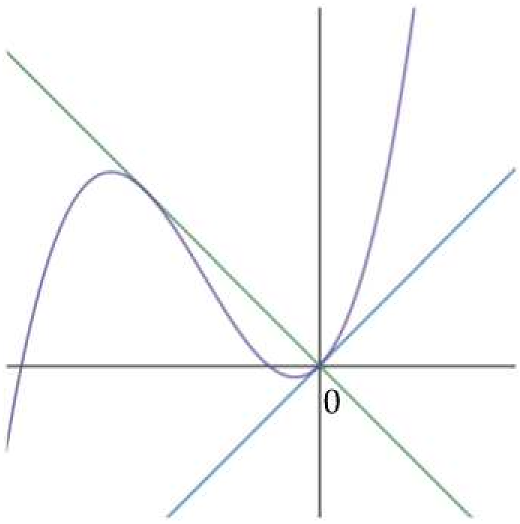


이렇게 될 수도 있죠. 그런데 $y=-x$와 두 점에서 안 만나는데요?



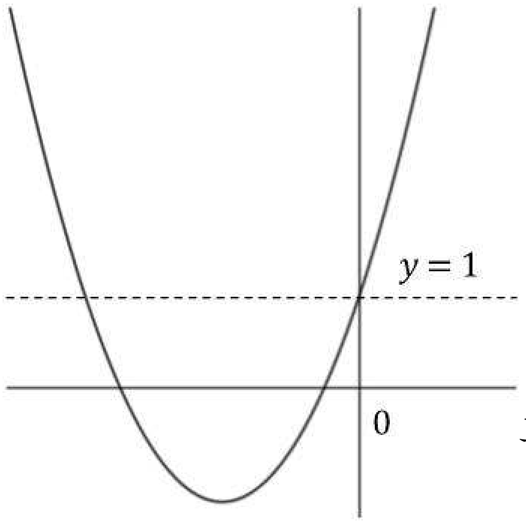
이렇게 될 수도 있어요. 이것도 $y=-x$와 안 만나네요.

만약 $y=x$와 $x=0$에서 접한다면



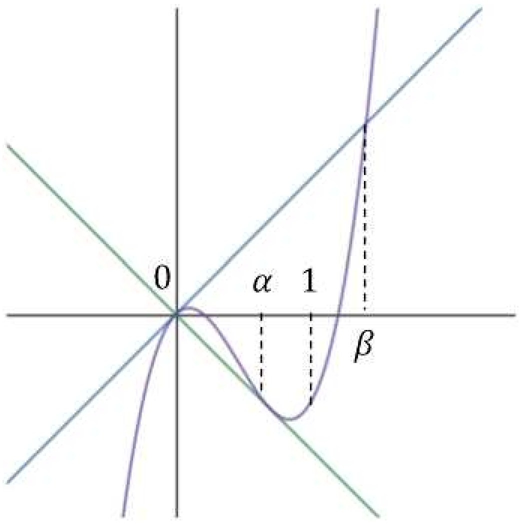
이렇게 될 수가 있네요. 어? 이건 될 수도 있지 않나요? 라고 할 수도 있지만

이미 $f'(x)=1$인 점이 두 개가 있습니다.



도함수의 그래프에요. $x>0$에서 함숫값이 1보다 계속 커집니다. $x=1$에서

함숫값이 1이 될 리가 없죠?



이렇게 되면요? $y=x$와 $x=0$에서 접하고, $x=\beta$에서 만나구요, $y=-x$와

$x=0$에서 만나고 $x=\alpha$에서 접합니다. 거기에 $f(0)=0$이고 $f'(1)=1$이네요. 다 만족하죠?

3) 함수 구하기 - 차함수

일단 $y=f(x)$가 $y=x$와 $x=0$에서 접하고, $x=\beta$에서 만나니까 $f(x)-x$는 x라는 인수 두 개랑, $(x-\beta)$라는 인수 한 개를 가집니다. $f(x)$의 최고차항의 계수를 k라 하면 $f(x)-x=kx^2(x-\beta)$이고

$f(x)=kx^2(x-\beta)+x$입니다.

이때 $f'(1)=1$이잖아요? 미분하면 $f'(x)=2kx(x-\beta)+kx^2+1$입니다. $f'(1)=2k(1-\beta)+k+1=1$이니까

$2k(1-\beta)+k=k(3-2\beta)=0$인데 k는 0이 아니죠? 따라서 $\beta=\dfrac{3}{2}$입니다. $f(x)=kx^2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+x$이네요.

그런데 $y=-x$와도 접해야 하잖아요. $f(x)+x$는 x라는 인수 하나랑 $(x-\alpha)$라는 인수 두 개를 가져야 합니다.

$f(x)+x=kx^2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+2x=x\left(kx\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+2\right)$인데 x라는 인수 하나는 있어요. 그러면 $kx\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+2$가 중근을

가져야 하죠? 판별식이 0이어야 합니다. 저거 식을 전개하면 $kx^2-\dfrac{3}{2}kx+2$이고 판별식을 쓰면 $\dfrac{9}{4}k^2-8k$인데

이게 0이니까 $k\left(\dfrac{9}{4}k-8\right)=0$입니다. k는 0이 아니잖아요. 따라서 $\dfrac{9}{4}k=8$이고 $k=\dfrac{32}{9}$입니다.

$f(x)=\dfrac{32}{9}x^2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+x$이네요. $f(3)=51$입니다.

21. 함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $h(x)$가 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지면 $\int_0^1 g(x)\,dx=-1$이다.

ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $g(x)=0$은 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2020학년도 9월 21번입니다.

왜 하필 ㄱ선지에서는 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$라는 걸 말해준 걸까요? 이게 ㄴ, ㄷ과 어떤 연관이 있는 걸까요?

정답 ⑤〔2020학년도 9월 21〕

1) 문제해석

$f(x)=x^3+x^2+ax+b$가 있는데 $g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$랍니다. 음... 뭐 그렇다네요. $f(x)$를 넣어서 정리해도 되지만 아직은 그럴 필요는 없을 것 같아요.

ㄱ에서 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$냐고 물어봅니다. 그럼 미분해보면 되죠. 곱의 미분법에 의해 $h'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$입니다. $g(x)$도 식이 같네요? ㄱ은 맞습니다.

2) ㄱㄴㄷ 유기성

ㄴ에서 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값을 가지고, 그 값이 0이면 $\int_0^1 g(x)dx=-1$이냐고 묻네요. 일단 $x=-1$에서 극값 0을 가지면 $f'(-1)=f(-1)=0$이죠? 가봅시다.

$f(-1)=b-a=0$이니까 $a=b$이구요, 미분하면 $f'(x)=3x^2+2x+a$이니까 $f'(-1)=a+1=0$이고 $a=b=-1$입니다. $f(x)=x^3+x^2-x-1=(x-1)(x+1)^2$이네요.

이제 $\int_0^1 g(x)dx$를 계산해야 하는데, $g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$에 $f(x)$와 $f'(x)$를 넣고 적분해야 할까요?

아까 ㄱ에서 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$이라고 했잖아요. 그럼 결국 미적분의 기본정리에 의해

$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 h'(x)dx=[h(x)]_0^1=h(1)-h(0)$이 되는 것 아닌가요? $h(1)=0$이구요, $h(0)=-f(0)=1$이잖아요.

따라서 $\int_0^1 g(x)dx=-1$입니다. ㄴ도 맞네요.

3) ㄱㄴㄷ 유기성

ㄷ에서 $f(0)=0$이면 $g(x)=0$이 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖냐고 물어보네요. 어? 이거 물어보는 게 좀 특이한데요? 이런 발문을 쓰는 개념은 2가지가 있죠? 평균값 정리 아니면 사잇값 정리(실근의 정리)에요.

일단 $f(0)=0$이라는 것부터 해봅시다. $b=0$이고 $f(x)=x^3+x^2+ax$가 되네요.

그리고 $g(x)=0$이 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가지는데.... 이것도 ㄱ에서 했던 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$를 사용할 수는 없을까요? 그러니까 결국 $h'(x)=0$이 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가지는 걸로 바뀌는 거죠. 이거는 실근의 정리로 가야 할까요..?

어? 그런데 $h(1)=0$이고 $f(0)=0$이니까 $h(0)=-f(0)=0$이잖아요. ㄴ에서 했었죠? 그러면 평균값 정리에 의해 $\frac{h(1)-h(0)}{1-0}=0=h'(c)$를 만족시키는 c가 열린 구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재하죠!! 그러면 $h'(x)=g(x)=0$이 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는 거 맞네요! ㄷ도 맞습니다. 맞는 건 ㄱ, ㄴ, ㄷ이고 답은 ⑤번이네요.

30. 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1) \\ f(x) & (x \ge 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid t=-1$ 또는 $t \ge 3\}$이다.

$(g \circ g)(-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

2020학년도 6월 30번입니다.

왜 하필 $f(2)=$"3"일까요? 왜 $y=g(x)$와 $y=t$가 "두" 점에서만 만나는 범위에 $t \ge$"3"이 있는 걸까요?

왜 $y=g(x)$와 $y=t$가 두 점에서만 만나는 범위에는 부등식이 아니라 $t=$"-1"가 있는 걸까요?

정답 19 〔2020학년도 6월 30〕

1) 문제해석

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$인 삼차함수라고 합니다. 음... 왜 하필 $f(2)=3$일까요?

이때 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1) \\ f(x) & (x \ge 1) \end{cases}$라고 하네요. 일단 유리함수는 점근선과 부호를 확인해야겠죠? 점근선은

$x=1$, $y=a$이구요, 부호는 $\dfrac{ax-9}{x-1}=\dfrac{a(x-1)+a-9}{x-1}=a+\dfrac{a-9}{x-1}$이니까 $a>9$라면 부호가 양수가 되구요,

$a=9$라면 $\dfrac{ax-9}{x-1}$는 그냥 직선이 되네요. $a<9$라면 부호가 음수가 되구요. 그리고 무조건 $(0,\ 9)$를 지나네요.

점근선인 $x=1$에서 $g(x)$가 변하네요.

이때 $y=g(x)$와 $y=t$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 t가 $t=-1$ 또는 $t \ge 3$이라고 합니다.

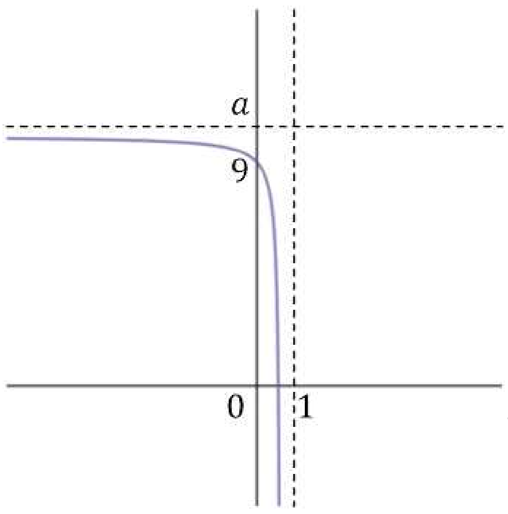
이거는 그래프를 그려야 알 수 있겠는데요? 그런데 문제는 $g(x)$의 개형을 모른다는 거에요. $\dfrac{ax-9}{x-1}$는 점근선은

알지만 부호를 몰라요. $f(x)$는 그냥 모르구요. 천천히 케이스 나누고 그래프를 그려봐야겠죠?

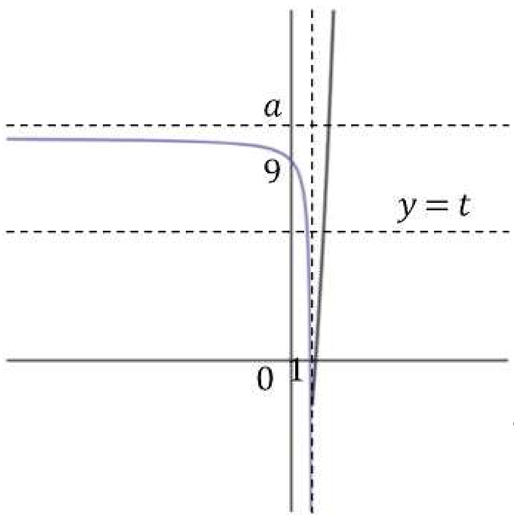
2) 케이스 분류, 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

2-1) $a>9$일 때

그래프는 $x<1$일 때

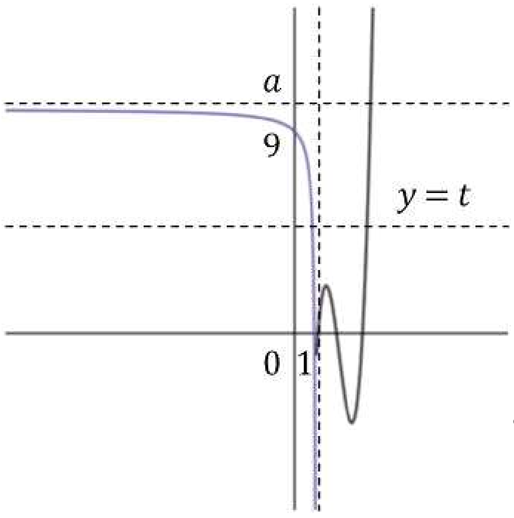


이렇게 됩니다. 이제 이 그래프에 $x>1$에서 $f(2)=3$인 삼차함수를 그려보세요.



이렇게 계속 증가하게 그리면 $y=t$와 두 점에서 만나게 하는 t의 범위가 맞지

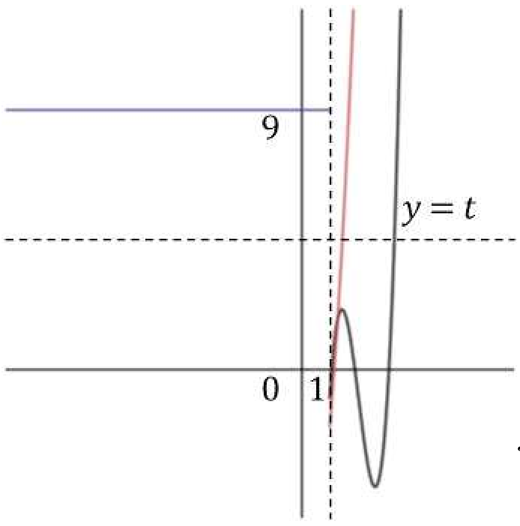
않는데요? $t>a$에서는 한 점에서만 만나는 부분이 생기니까요.



이렇게 그려도 마찬가지죠. $t>a$에서 한 점에서만 만나는 구간이 생기잖아요.

2-2) $a=9$일 때

이러면 $g(x)=\begin{cases} 9 & (x<1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$가 됩니다.

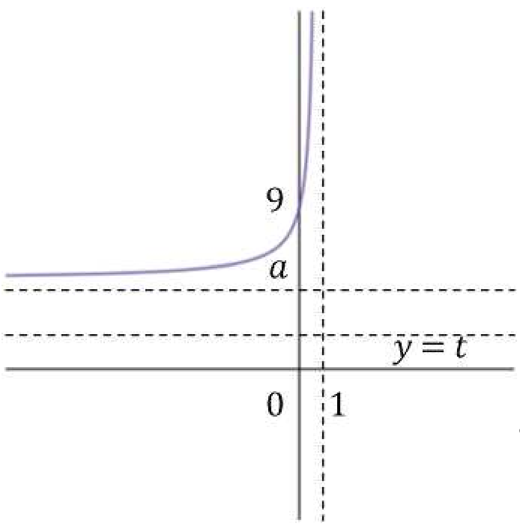


$f(x)$를 어떻게 그려도 조건에 맞지 않죠? $t>9$에서 두 점에서 만나지 않는 점이 생깁니다.

2-3) $a<9$일 때

결국 이 경우네요. 다시 조건을 상기해봅시다. $y=g(x)$와 $y=t$는 $t=-1$ 또는 $t \geq 3$에서만 두 점에서 만나야 해요.

일단 $x<1$에서 그래프는

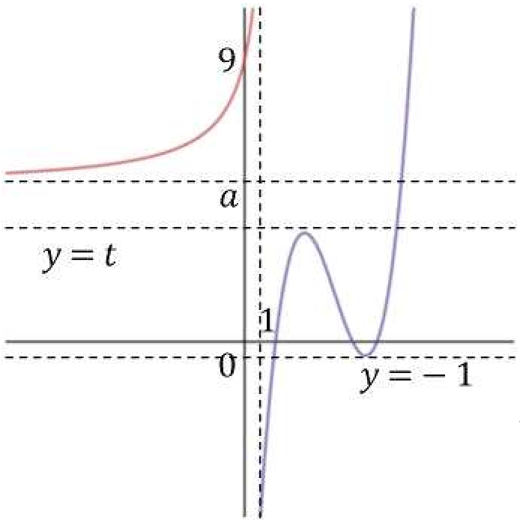


이렇게 됩니다.

여기서 생각 좀 해볼게요. 지금 $y=t$와 $y=\dfrac{ax-9}{x-1}$는 $t>a$에서 한 점에서만 만납니다. 이 상황에서 $t=-1$ 또는 $t\geq 3$에서만 두 점에서 만나려면? 모르죠. a의 범위에 따라 경우가 또 나뉘니까요. a가 3보다 작냐 크냐, -1보다 작냐 크냐에 따라 갈립니다. 또다시 케이스를 분류해야겠군요.

2-3-1) $3<a<9$일 때

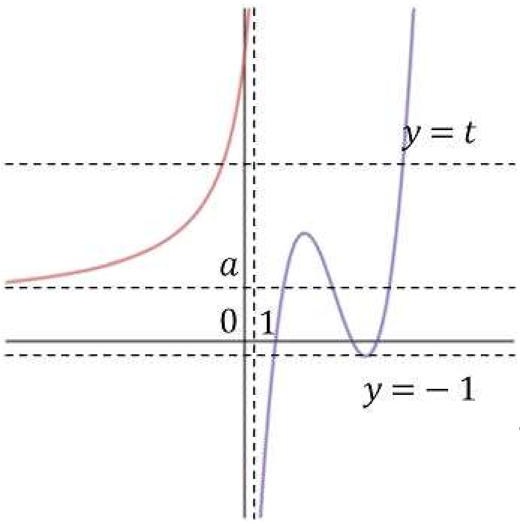
이러면



대충 이렇게 될 거에요. 그런데 이건 말이 안 되죠. 극댓값이 3보다 작다면 두 점에서 만나는 t의 범위가 $t\geq 3$이 나올 수가 없습니다. 극댓값이 3보다 크면 $t=3$에서는 세 개의 점에서 만나구요. 극댓값이 3이면 $t=3$에서는 두 점에서 만나긴 하지만 $3<t<a$에서는 한 점에서만 만나는데요?

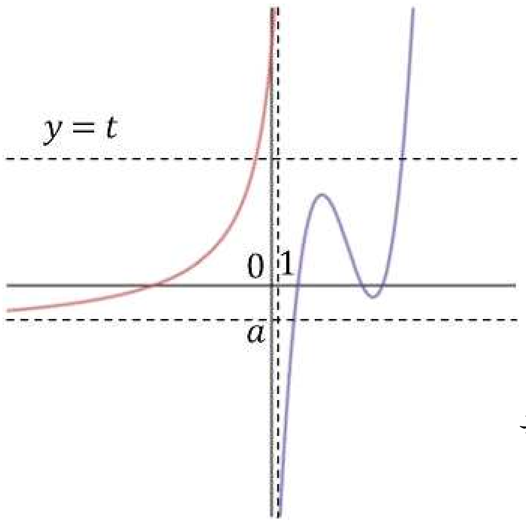
2-3-2) $-1<a<3$일 때

이러면



이렇게 됩니다. 이것도 말이 안 돼요. 극댓값이 3보다 크다면 두 점에서 만나는 t의 범위는 $t>k$가 될 거에요. (k는 극댓값) 극댓값이 a보다 크고 3보다 작다면 t의 범위는 $t>k$가 되겠죠. (k는 극댓값) 극댓값이 a라면 범위는 $t\geq a$가 될 거에요. 하지만 a는 3보다 작잖아요? 극댓값이 a보다 작다면 두 점에서 만나는 t의 범위는 $t>a$가 되니까 안 되구요.

2-3-3) $a \le -1$일 때



극댓값이 a보다 클 때 극댓값을 k라 하면 t의 범위는 $t > k$가 되겠죠. $t = k$일 때는 3개의 점에서 만나니까요. $t \ge 3$이 아니죠? 극댓값이 a보다도 작다면 t의 범위는 $t > a$가 되는데 말이 안 됩니다. 극댓값이 a여도 범위는 $t \ge a$인데 $a \le -1$이잖아요.

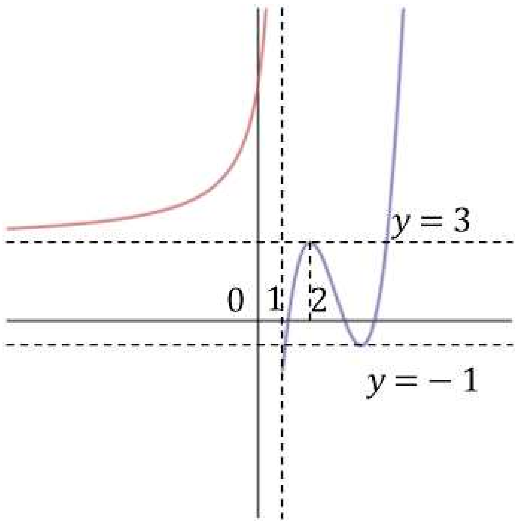
2-3-4) $a = 3$일 때

따라서 $a = 3$이어야 합니다.

$a = 3$이면 $y = \dfrac{3x-9}{x-1}$의 점근선이 $y = 3$이잖아요? $x < 1$에서는 3부터 ∞까지 계속 증가하구요.

그러면 $y = 3$과 $y = f(x)$가 두 점에서 만나야겠네요. 상수함수와 삼차함수가 두 점에서 만난다는 건 한 점에서는 접하고 있다는 거구요.

사실 문제를 읽으면서 눈치를 채셔야 해요. 왜 하필 $f(2) = 3$일까요? $t = 3$일 때 $y = 3$이 이미 $f(x)$와 $x = 2$에서 만나고 있다는 거에요. 그러니까 그래프는



이렇게 되어야 합니다. 극댓점의 x좌표가 2가 아닐 수도 있지만, 그건 계산해보시면 안 되는 걸 알 수 있어요. 극대점의 x좌표를 k라 하면 차함수에 의하여

$f(x) = (x-k)^2(x-2) + 3$인데 극솟값이 -1이니까 미분하고 값을 넣어보면 $f\left(\dfrac{k+4}{3}\right) = \dfrac{4}{27}(k-2)^3 + 3 = -1$이고 $k = -1$이 나오는데 이러면 $x = 1$보다 작은 부분에 극솟값이 있게 되어서 그림이 짤립니다. 조건을 만족시킬 수가 없어요.

3) 함수 구하기 - 차함수

이렇게 극댓점의 x좌표는 2가 됩니다. $y=3$과 $y=f(x)$가 그냥 만나는 점의 x좌표를 k라 하면 차함수에 의하여 $f(x)-3=(x-2)^2(x-k)$이고 $f(x)=(x-2)^2(x-k)+3$입니다. 극솟값이 -1이니까

$f\left(\frac{2k+2}{3}\right)=-\frac{4}{27}(k-2)^3+3=-1$이고 $k=5$입니다. $f(x)=(x-2)^2(x-5)+3$이네요.

이제 $(g\circ g)(-1)$를 구해봅시다. 일단 $g(-1)=6$입니다. 그러면 $(g\circ g)(-1)=g(6)$이네요. $g(6)=19$입니다.

이외에도 많은데 이 정도만 할게요. 저 물음의 답을 알았다면 다음부터는 행동강령을 세워야겠죠.
모든 걸 의심하십시오. 평가원은 절대로 “그냥” 숫자를 주지 않습니다. 모든 조건과 숫자는 의미가 있어요. 문제에 조건과 숫자가 있다면 저 위에 제가 던진 질문들처럼 “왜?”라고 끊임없이 질문하십시오. 끊임없이 고민하십시오.
그리고 조건과 숫자들의 연관성에 최대한 집중하십시오. 조건과 숫자들 사이에는 연결고리가 존재합니다. 조건을 읽으면서 방금 전에 봤었던 조건이나 숫자와 어떤 연관이 있을지 끊임없이 고민하십시오.