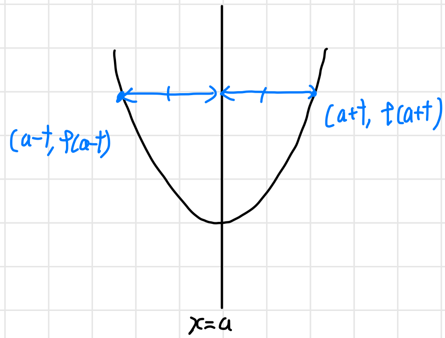
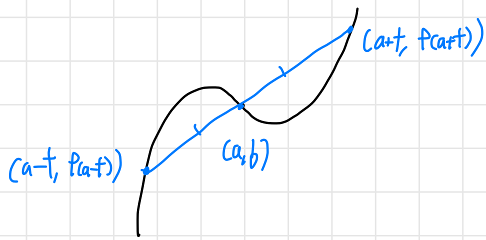
목차

1. ① 선대칭 함수



식: $f(a-t) = f(a+t)$

② 점대칭함수



식: $\dfrac{f(a+t)+f(a-t)}{2} = b \rightarrow f(a+t)+f(a-t)=2b$

(대칭)x(대칭)꼴 함수 $\left[\begin{array}{l} f(x)\ x=0 \text{ 대칭 (우함수)} \\ g(x)\ (0,0) \text{ 대칭 (기함수)} \end{array}\right.$

$h(x) = f(x)g(x)$

$h(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -h(x)$ ∴ (우함수) x (기함수) = 기함수

∴ $h(x)$는 기함수

2. ① 선대칭함수의 도함수

$x=a$ 대칭 함수 $f(x)$

$f(a-x)=f(a+x)$

↓ 양변 미분

$-f'(a-x)=f'(a+x)$

$\therefore\ f'(a+x)+f'(a-x)=2\cdot 0$

☆ $f'(x)$는 $(a,0)$ 점대칭

(선대칭)$'$ = 점대칭 ($x=a \rightarrow (a,0)$)

② 점대칭 함수의 도함수

(a,b) 대칭 함수 $f(x)$

$f(a-x)+f(a+x)=2b$

↓ 양변미분

$-f'(a-x)+f'(a+x)=0$

$\therefore\ f'(a-x)=f'(a+x)$

☆ $f'(x)$는 $x=a$ 선대칭

(점대칭)$'$ = 선대칭 ($(a,b) \rightarrow x=a$)

3-1) 대칭함수의 적분 (식)

2의 결론

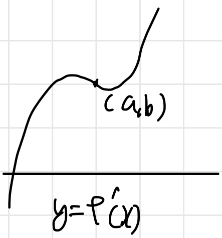
$(x=a \xrightarrow{\int} (a,0))$

$((a,b) \xrightarrow{\int} x=a)$ → $((a,0) \xrightarrow{\int} x=a)$

$(x=a \xrightarrow{\int} (a,b))$ ☆이때 b는 적분상수이기 때문에 정할수 없다.

$(a,b) \xrightarrow{\int} ?$

계산



$y=f'(x)$ 가 (a,b) 점대칭일때 $(b\neq0)$

$f'(x)-b$ 는 $(a,0)$ 대칭

↓

$f'(x)-b$의 원시함수는 $x=a$ 선대칭

→ $f(x)-bx$ = (선대칭함수)

☆ $f(x)=$ (선대칭함수) + $\underbrace{bx}_{\text{(점대칭함수)}}$

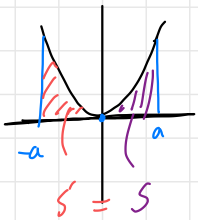
∴ $f'(x)$가 (a,b) $(b\neq0)$ 점대칭일때 $f(x)$의 원시함수는 대칭함수가 아니다.

(그러나 $\int f(x)dx$ = ($x=a$ 선대칭함수) + bx 꼴인건 기억하기)

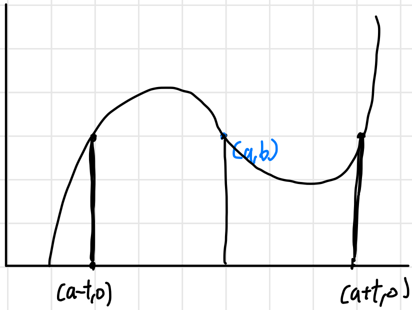
3-2) 대칭함수의 적분 (계산)

☆ 그래프 그리기

① 선대칭



☆ ② 점대칭



1. 식계산

$$\int_{a-t}^{a+t} f(x)dx = F(a+t) - F(a-t)$$

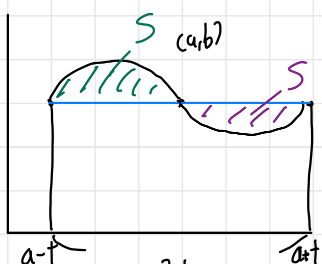
$F(x) = (x=a$ 선대칭함수$) + bx$ (∵ 3-1) 결론)

$$\Big[\underbrace{(x=a \text{ 선대칭함수})}_{\text{0이된다}} + bx\Big]_{a-t}^{a+t} = b(a+t-(a-t)) = 2bt$$

$$\therefore \int_{a-t}^{a+t} f(x)dx = 2bt$$

2. 기하적접근

'점 대칭'



S = S

$$\int_{a-t}^{a+t} f(x)dx = 2bt + \underbrace{S - S}_{\to 0}$$

$$\therefore \int_{a-t}^{a+t} f(x)dx = 2bt$$

4 기출 문제 - 2018.06.30

30. 실수 a와 함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c$ ($c>0$인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ (m은 자연수)이다. $a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)\,dx = k\alpha_m\int_0^1 \lvert f(x)\rvert\,dx$

$mk\times e^c$의 값을 구하시오. [4점]

↓ 풀이는 아래

30. 실수 a와 함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c$ ($c>0$인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ (m은 자연수)이다. $a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

① or ②

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
>
> (나) $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)\,dx = k\alpha_m\int_0^1 |f(x)|\,dx$

$mk\times e^c$의 값을 구하시오. [4점]

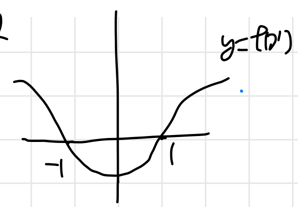
☆ $f(x)$는 $x=0$ 선대칭 함수

$x=0$ 선대칭 함수를 적분하면 무조건 $(0,k)$ 점대칭 함수가 나온다.

(가) $g'(x)=f(x)$

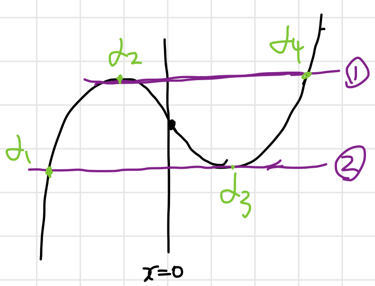
$\rightarrow f(1)=0 \rightarrow c=\ln 2$

$f(x)=\ln(x^4+1)-\ln 2$



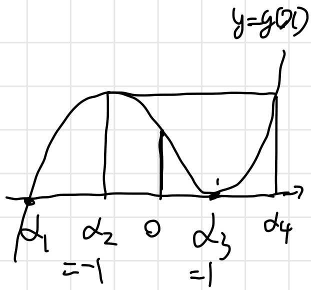
적분

$+(\alpha_1,0)$



$\rightarrow m=4$

$a=\alpha_1$일때 $\rightarrow$ ②이 x축



(나) $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$

$\displaystyle = -\int_0^1 f(x)\,dx = -g(1)+g(0)$

$= g(0)$ ($\because g(1)=0$)

$\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)\,dx = 2\alpha_4\times g(0) = k\alpha_4\times g(0)$

$\therefore k=2$

5. 자작문제

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 전체 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)=\int_0^x \ln f(t)dt+k$가 다음조건을 만족시킨다. (단, k는 상수이다.)

(가)방정식 $f(x)=k$를 만족하는 근은 $-a,0,a$이다.(단, $a>0$)

(나)$f'(0)=0$

(다)$\int_{-a}^{a} g(x)dx=2k^2$

$f(1)=1$일 때, $\int_{-2}^{2}(f(x)+x^4 g(x))dx$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

사용하는 개념 → 1. $f(x)$가 선대칭이면 $\ln f(x)$도 선대칭

증명 $f(a+x)=f(a-x) \rightarrow \ln f(a+x)=\ln f(a-x)$

단 $f(x)>0$

2. 우함수 × 기함수 → 기함수

※ 흔한 오개념: ((0, 1)점대칭 함수) × 우함수 → 기함수 X

대칭은 부호와 관련있음.

↳ 반례 $y=x+1$ (0, 1)점대칭

$y=x^2 \rightarrow (x+1)(x^2)=x^3+x^2$

↓ 기함수X

→ 이럴때는 (0, 1)점대칭함수를 평행이동해서 기함수로 만들어서 계산.

예시

$f(x)$가 (0, 1)점대칭 일때

$$\int_{-2}^{2} x^4 f(x)\,dx = ?$$

∴ x^4은 우함수

$$\rightarrow \int_{-2}^{2} \left(x^4 \left(f(x)-1\right)+x^4\right)dx = 2\int_{0}^{2} x^4\,dx$$

$$= \frac{64}{5}$$

우 × 기

기 → 0

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 전체 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)=\int_0^x \ln f(t)dt+k$가 다음조건을 만족시킨다. (단, k는 상수이다.)

(가)방정식 $f(x)=k$를 만족하는 근은 $-a,0,a$이다.(단, $a>0$)

↳개형분류가능

(나)$f'(0)=0$

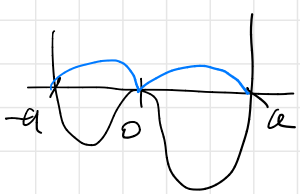
개형추론의 단서.

(다)$\int_{-a}^{a} g(x)dx=2k^2$

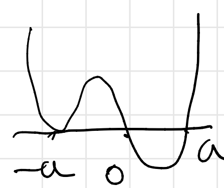
$f(1)=1$일 때, $\int_{-2}^{2}(f(x)+x^4g(x))dx$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$f(t)>0$

(가)

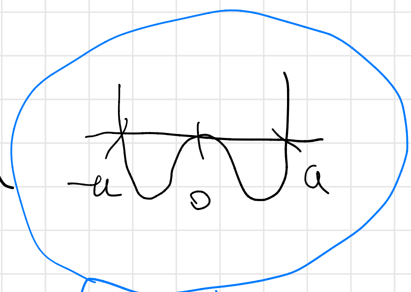


한계의점X



↓

(나) $f'(0)=0$ 에러곤



확정

특징: 우함수임.

↓

$\ln f(x)$도 우함수

↓적분

$\int \ln f(t)dt$는 $(0,0)$에 점대칭

$g(x) = \int_0^x \ln f(t)\,dt + k$

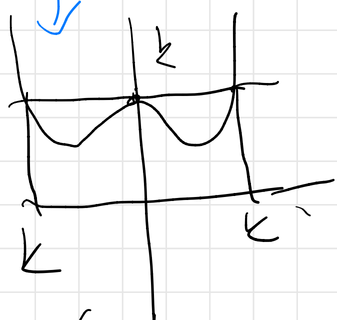
$\rightarrow$ $(0, k)$에 점대칭

(다) $\rightarrow$ $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2a \times k = 2k^2$

$k=0$

(가)
$f(x)=0$의
근이 존재
$f(x)>0$에 모순

$a=k$



$f(x)-k = (x+k)x^2(x-k)$

$f(1)$의 대입 $\quad 1-k = (1-k)(1+k)$

$k=1$ or $k=0$ $\rightarrow$ 모순

☆ 마무리 계산

$$\int_{-2}^{2}\left(f(x)+x^4 g(x)\right)dx$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_{0}^{2} f(x)dx = 2\int_{0}^{2}\left(x^2(x^2-1)+1\right)dx = \frac{172}{15}$$

$$\int_{-2}^{2} x^4 g(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\left(x^4(g(x)-1)+x^4\right)dx$$

$g(x)$ ↓ $(0,1)$ 점대칭

$x^4(g(x)-1)$ ↓ 기함수 ↓ 0

$$= \frac{64}{5} = \frac{192}{15}$$

$$\therefore \frac{364}{15}$$

→ 379