[나승민/한성은 모의고사]

| 대학수학능력시험 수학(가형) 연습 (2/4) |

나승민 (성균관대 수학과)

이투스앤써, 이투스 네오

힘든 시기, 잘 버텨봅시다. 9평 잘 보세요.

수학에 감각을 더하다.
instagram @cremath_david

한성은 (POSTECH 수학과)

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

수능까지 공부할 시간이 적지 않게 남았습니다.
9평/수시원서접수에 너무 들뜨거나 휘둘리지 마세요.

hansungeun.com
  - 저자소개, 학습자료, 교재판매

5지선다형

1. $\left(3\times3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 6
④ 9 ⑤ 12

2. $\cos\frac{5}{6}\pi$의 값은? [2점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\int_{\ln 2}^{\ln 8} e^x dx$의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6},\quad \mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

5. 실수 α에 대하여 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$일 때, $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$의 값은? [3점]

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

6. 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{33}\frac{3}{a_k a_{k+1}}$의 값은? [3점]

① $\frac{93}{100}$ ② $\frac{24}{25}$ ③ $\frac{99}{100}$ ④ $\frac{51}{50}$ ⑤ $\frac{21}{20}$

7. 한 개의 주사위를 2번 던져서 나오는 주사위의 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. ab가 6의 약수일 때, $a+b$도 6의 약수일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

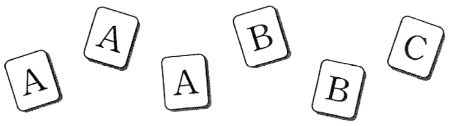
8. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식

$$3\sin^2 x = -\cos^2 x + \cos x + 2$$

의 모든 해의 합은? [3점]

① 3π ② $\frac{7}{2}\pi$ ③ 4π
④ $\frac{9}{2}\pi$ ⑤ 5π

9. A, A, A, B, B, C의 문자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, B가 적힌 두 장의 카드가 서로 이웃할 확률은? [3점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

10. 1보다 큰 세 실수 a, b, c가

$$\frac{\log_a b}{2} = \frac{\log_b c}{3} = \frac{\log_c a}{4}$$

를 만족시킬 때, $2\log_b a + 3\log_c b + 4\log_a c$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt[3]{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ ③ $\sqrt[3]{3}$
④ $2\sqrt[3]{3}$ ⑤ $6\sqrt[3]{3}$

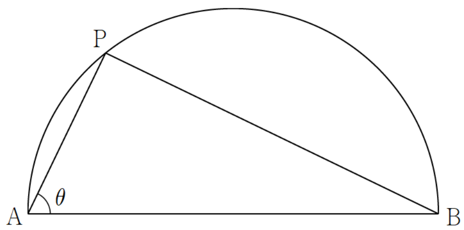
11. 함수 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{ax^{2n+2}+bx^{2n}+x^4}{x^{2n}+1}$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a-b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 O가 있다. 반원의 호 위의 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 할 때,

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{BP}}}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^n}=\alpha\ (\text{단, } n\text{은 자연수, } \alpha\neq 0)$$

이다. $n+\alpha$의 값은? [3점]



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

13. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$은

$$a_{n+1}=\begin{cases}-a_n & (a_n<0)\\ a_n-1 & (a_n\geq 0)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{42}a_k=\frac{1}{2}$일 때, a_1의 값은? (단, $0<a_1<1$이다.) [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

14. $0<x<2\pi$에서 부등식 $(\log_{\pi}x-1)(2\cos x-1)<0$의 해가 $a<x<b$ 또는 $c<x<d$일 때, $a+b+c+d$의 값은? (단, $a<b<c<d$이다.) [3점]

① 3π ② $\frac{10}{3}\pi$ ③ $\frac{11}{3}\pi$ ④ 4π ⑤ $\frac{13}{3}\pi$

15. 정규분포 $\mathrm{N}(48, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 하나를 택해 그 값을 X라 하고, 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(X \le 5\sigma) = \mathrm{P}(\overline{X} \ge 9\sigma)$를 만족시키는 σ의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

16. 방정식

$$|2\log_2 x - k| = \log_2 x + 1$$

의 두 실근을 α, $\beta(\alpha < \beta)$라 하자. $\beta = 16\alpha$일 때, k의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

17. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2}\ \cdots\cdots\ (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때

(좌변) = (우변) = 1

이므로 (*)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{m+1}\times\frac{m(m+1)}{2}$$

이다. $n=m+1$일 때

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}&(-1)^{k+1}k^2\\&=(-1)^{m+1}\times\frac{m(m+1)}{2}+\boxed{(가)}\\&=(-1)^{m+2}\left\{-\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)^2\right\}\\&=(-1)^{m+2}\times\left(\boxed{(나)}\right)\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(4)g(4)$의 값은? [4점]

① 275 ② 300 ③ 325 ④ 350 ⑤ 375

18. 착한 의학자 석태는 전 세계에 확산된 바이러스 모르나19의 감염여부를 검사하는 진단키트를 개발하였다. 이 진단키트는 모르나19에 감염된 환자를 감염자로 진단할 확률이 98%이고, 감염되지 않은 환자를 비감염자로 진단할 확률이 95%라고 한다. 어느 진료소에서 모르나19에 감염된 환자 100명과 감염되지 않은 환자 300명을 대상으로 이 진단키트를 사용하였다. 이 400명 중 임의로 택한 한 명의 환자가 진단키트에서 감염자로 진단 당했을 때, 이 환자가 실제로 모르나19에 감염된 환자일 확률은? [4점]

① $\frac{92}{113}$ ② $\frac{94}{113}$ ③ $\frac{96}{113}$ ④ $\frac{98}{113}$ ⑤ $\frac{100}{113}$

19. 자연수 n에 대하여 $\frac{n}{2^k}$가 자연수가 되도록 하는 정수 k의 최댓값을 $\{a_n\}$,

$$\sum_{k=1}^{2^n} a_k = b_n$$

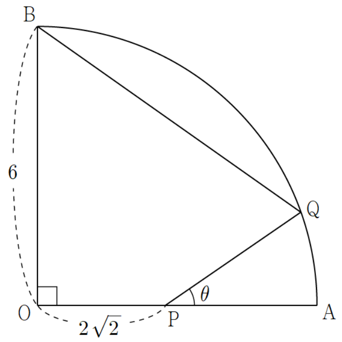
이라 하자. $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+2}}{b_n}$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

20. 그림과 같이 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OA 위의 점 P와 호 AB 위의 점 Q는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{OP} = 2\sqrt{2}$
(나) $\angle QPA = \theta$라 할 때 $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\overline{BQ}$의 값은? [4점]



① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{3}$
④ 8 ⑤ $4\sqrt{5}$

21. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\int_{0}^{x} e^{t} f(x-t)\,dt$$

이다. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+g(x)=xe^{x^2}$일 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{e+1}{2}$　② $\frac{2e+1}{2}$　③ $\frac{3e+1}{2}$　④ $\frac{4e+1}{2}$　⑤ $\frac{5e+1}{2}$

단답형

22. 다항식 $(2x+1)^4$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하여라. [3점]

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{5}\right)$를 따를 때, $\mathrm{E}\left(X^2\right)$의 값을 구하여라. [3점]

24. 수열 $\left\{\left(\frac{x-2}{4}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하여라. [3점]

25. 함수 $f(x)=2|\sin\pi x|+4$는 주기가 a인 주기함수이고, $f(x)$의 최솟값은 m, 최댓값은 M이다. $a+m+M$의 값을 구하여라. [3점]

26. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 - n$

(나) $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = (n-2)2^n + 2$

b_5+b_6의 값을 구하여라. [4점]

27. 다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. [4점]

(가) $x+y+z=19$
(나) x, y, z는 어떤 삼각형의 세 변의 길이이다.

28. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=(\ln x)^n$$

이 두 개의 변곡점을 가지며, 두 변곡점의 x좌표의 곱이 e^{10} 이하가 되도록 하는 자연수 n값의 합을 구하여라. [4점]

29. 집합

$$A = \{x \mid x\text{는 } n \text{ 이하의 자연수}\} \ (\text{단, } n \geq 3)$$

의 부분집합 중 원소의 개수가 3인 모든 부분집합에 대하여 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값을 $f(n)$이라 하자. $\sum_{k=3}^{10} f(k)$의 값을 구하여라. [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[-\pi, \pi]$에서 실수 a에 대하여

$$f(x) = a\sin x$$

이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x_1 x_2 < 0$를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2) \leq 0$이다.
(나) 방정식 $xf\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = 0$의 실근은 존재하지 않는다.

$f(2\pi) - f(-2\pi) = 2\pi$일 때, $\frac{1}{\pi^2}\int_{-2\pi}^{6\pi} f(x)dx$의 값을 구하여라. [4점]

[나승민/한성은 모의고사]

수능(가형) 연습(2/4) 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	②	02	①	03	⑤	04	③	05	①
06	③	07	④	08	①	09	②	10	⑤
11	③	12	③	13	④	14	①	15	④
16	⑤	17	⑤	18	④	19	②	20	③
21	①	22	24	23	416	24	20	25	11
26	24	27	45	28	35	29	792	30	12

COMMENT 10

$\dfrac{\log_a b}{2}=\dfrac{\log_b c}{3}=\dfrac{\log_c a}{4}=k$라 두면 $\log_a b=2k$, $\log_b c=3k$, $\log_c a=4k$이다.

세 등식을 변끼리 모두 곱하면 $k=2\sqrt[3]{3}$이고, $2\log_b a=3\log_c b=4\log_a c=\dfrac{1}{k}=2\sqrt[3]{3}$이다.

COMMENT 16

$2\log_2 x-k\le 0$일 때 : $-2\log_2 x+k=\log_2 x+1 \Rightarrow 3\log_2 x=k-1 \Rightarrow x=2^{\frac{k-1}{3}}$, 얘가 α이다.

$2\log_2 x-k>0$일 때 : $2\log_2 x-k=\log_2 x+1 \Rightarrow \log_2 x=k+1 \Rightarrow x=2^{k+1}$, 얘가 β이다.

COMMENT 17

$f(m)=(-1)^{m+2}(m+1)^2,\quad g(m)=\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$

COMMENT 18

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2te^{t^2+1}}{3t^2+1}$이고, 얘는 $t=0$일 때 0이다. $x=g(t)$는 증가함수이고 $t=0$일 때 $x=4$이므로

함수 $f(x)$는 $x<4$에서 감소, $4<x$에서 증가한다. $a_3=f(4)$, $a_4=f(4)$, $a_6=f(6)$이다.

$x=4$일 때는 $t=0$일 때이므로 $f(4)=e$, $x=6$일 때는 $t=1$일 때이므로 $f(6)=e^2$이다.

COMMENT 19

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n+1}}a_k=\sum_{k=1}^{2^n}a_k+\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}a_k$이고, $\begin{cases}a_{2^{n+1}}=a_{2^n}+1\\ a_{2^n+i}=a_i\,(1\le i\le 2^n-1)\end{cases}$이므로

$b_{n+1}=b_n+(b_n+1)$이다. 따라서 $b_{n+2}=4b_n+3$이다.

COMMENT 20

$\overline{\mathrm{PQ}}=x$라 할 때, 삼각형 OPQ에서 코사인 돌리면

$$6^2=(2\sqrt{2})^2+x^2-4\sqrt{2}\,x\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \Leftrightarrow (\sqrt{3}x-6)(\sqrt{3}x+14)=0$$

이므로 $x=2\sqrt{3}$이다. 사인 돌리면 $\sin(\angle\mathrm{POQ})=\dfrac{1}{3}$이다.

$\angle\mathrm{BOQ}=\dfrac{\pi}{2}-\angle\mathrm{POQ}$이므로 $\cos(\angle\mathrm{BOQ})=\dfrac{1}{3}$이다. 삼각형 BOQ에서 코사인.

COMMENT 21

$g(x)=\displaystyle\int_0^x e^t f(x-t)dt$에서 $x-t=\alpha$로 치환하면 $g(x)=e^x\displaystyle\int_0^x e^{\alpha}f(\alpha)d\alpha$이다.

양 변을 미분하면 $g'(x)=e^x\displaystyle\int_0^x e^{\alpha}f(\alpha)d\alpha+f(x)=g(x)+f(x)$이다.

$g'(x)=xe^{x^2}$이므로 $g(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$이고 $g(0)=0$이므로 $g(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}-\dfrac{1}{2}$이다.

$f(x)=g'(x)-g(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)e^{x^2}+\dfrac{1}{2}$이다.

COMMENT 27

세 자연수 x, y, z 중 어느 하나가 다른 두 수의 합보다 작아야 한다.

$\Rightarrow$ 가장 큰 자연수가 9 이하이다.

전체 경우의 수 ${}_3\mathrm{H}_{16}$에서 어느 하나가 10 이상인 경우의 수 ${}_3\mathrm{H}_7 \times 3$을 빼면 된당.

COMMENT 28

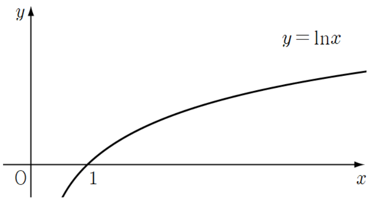
$n=1$일 때는 변곡점을 갖지 않는다.

$n \geq 2$일 때, $f''(x)=\dfrac{n(\ln x)^{n-2}\{(n-1)-\ln x\}}{x^2}$에서 $f''(x)=0$의 근은 $x=0$, $x=e^{n-1}$이다.

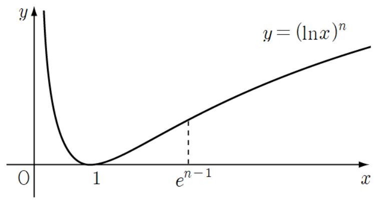
$x=e^{n-1}$일 때는 빼박 변곡점이고 $x=0$일 때는 n이 홀수일 때 변곡점이다.

두 변곡점을 가지려면 n은 홀수, 두 변곡점의 x좌표의 곱은 e^{n-1}이므로

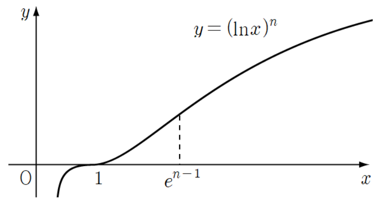
해당하는 n은 3, 5, 7, 9, 11이다.



$n=1$일 때



n이 짝수일 때



n이 3 이상의 홀수일 때

COMMENT 29

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n-2}\{k \times {}_{n-k}\mathrm{C}_2\}$$

$$=({}_{n-1}\mathrm{C}_2+{}_{n-2}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_2\mathrm{C}_2)+({}_{n-2}\mathrm{C}_2+{}_{n-3}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_2\mathrm{C}_2)+({}_{n-3}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_2\mathrm{C}_2)+\cdots+{}_2\mathrm{C}_2$$

$$={}_n\mathrm{C}_3+{}_{n-1}\mathrm{C}_3+{}_{n-2}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_3\mathrm{C}_3={}_{n+1}\mathrm{C}_4$$

※ $f(n)=\sum_{k=1}^{n-2}\{k \times {}_{n-k}\mathrm{C}_2\}$에서 $\sum_{k=1}^{n-2}\dfrac{k(n-k)(n-k-1)}{2}$을 푸는 것도 가능하다. 이론상.

COMMENT 30

(나)에서 $\dfrac{1}{x}=t$로 치환하면 $t \neq 0$일 때 $\dfrac{f(t)-t}{t}=0$의 실근이 존재하지 않는다.

따라서 곡선 $y=f(x)$는 $x \neq 0$일 때 직선 $y=x$와 교점을 갖지 않는다.

(가)에서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$나 구간 $(0, \infty)$에서 볼록성을 바꾸지 못한다.

$a>0$라 가정하면 $f(x)$는 $f(2\pi)-f(-2\pi)=2\pi$를 만족시킬 수 없다.

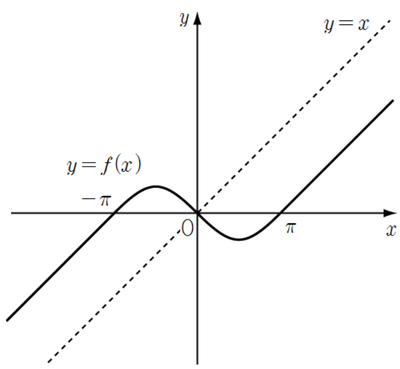
$f(\pi)=0$, $f'(\pi)<0$, $x>\pi$에서 위로 볼록,

$f(-\pi)=0$, $f'(-\pi)>0$, $x<-\pi$에서 아래로 볼록

이기 때문. $f(2\pi)-f(-2\pi)<2\pi$가 된다.

평균값의 정리나 정적분과 부등식으로 증명하는 것이 가능하지만,

수능 준비하는 입장에서는 비추. 대충 개형에서 읽어 낼 수 있도록.



$a<-1$인 경우에도 불가능. $f(2\pi)-f(-2\pi)>2\pi$가 된다.

$-1<a<0$인 경우에도 불가능.

이 경우에는 $f(2\pi)-f(-2\pi)=2\pi$를 만족시키는 것은 가능하지만,

곡선 $y=f(x)$는 $|x|>2\pi$일 때 직선 $y=x$와 적어도 한 점에서 만나게 된다.

뭐 그래서 $a=-1$이고 $|x| \geq \pi$인 구간은 반직선으로 채워야 한다.

반직선이 잠깐이라도 어긋나면 직선 $y=x$와 만나버려서 망한다