30. [21학년도 사관학교 나형 30번]

양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x(x+a)^2 & (x<0) \\ x(x-a)^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+t$의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 최댓값은 5이다.
(나) 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 개수는 2이다.

$f'(0)$의 값을 구하시오.

〈 Solution 1 〉

1st Step
독해

[조건]

① 양수 a, $f(x)=\begin{cases} x(x+a)^2 & (x<0) \\ x(x-a)^2 & (x \ge 0) \end{cases}$: 곡선 $y=f(x)$의 대략적인 개형 파악 가능

② 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+t$의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$
  : x에 대한 방정식 $f(x)=4x+t$의 서로 다른 실근의 개수가 $g(t)$

③ 함수 $g(t)$의 최댓값은 5 : 부등식 조건이므로 a의 범위에 대한 조건임을 예상

④ 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 개수는 2
  : 곡선 $y=f(x)$의 개형을 결정하기 위한 조건

[구하는 값]

⑤ $f'(0)$의 값 : a의 값을 구하는 것이 목표

2nd Step
설계

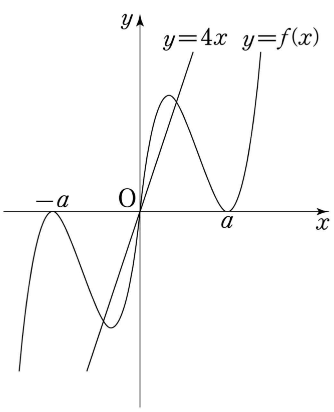
① 새로운 함수가 정의되어 있으므로 함수 $f(x)$에 대한 기본적인 내용을 조사해야 한다.
즉, 주기성, 대칭성 등에 대한 파악이 필요한데 이 함수의 그래프는 원점에 대하여 대칭임을 쉽게 파악할 수 있다.

② 곡선과 직선의 비교이므로 주어진 상황을 바꾸지 않고 그대로 해결할 수 있다.
이때, 곡선과 직선이 접하는 순간 $g(t)$의 값이 변할 것임을 예측할 수 있다.

③, ④ 직접 함수 $f(x)$의 그래프를 그려가며 조건을 만족시키는 상황으로 결정해야 한다.

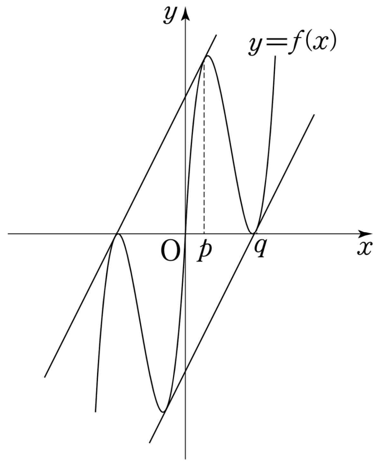
3rd Step
해결

① 함수 $f(x)=\begin{cases} x(x+a)^2 & (x<0) \\ x(x-a)^2 & (x \ge 0) \end{cases}$의 그래프는 대략적으로 다음 그림과 같다.



③ 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+t$가 만나는 점의 개수의 최댓값이 5이어야 한다.
위의 그림과 같이 모든 양수 a에 대하여 $t=0$일 때 교점의 개수가 최대이고,
$f'(0)=a^2$이므로 $a^2>4 \Rightarrow a>2$일 때, 조건 (가)를 만족시킨다.

④ 함수 $g(t)$가 불연속인 $t=\alpha$의 값을 α_1, α_2라 하면 조건 (나)를 만족시키기 위해 직선 $y=4x+\alpha_1$, $y=4x+\alpha_2$는 두 곡선 $y=x(x+a)^2$ $(x<0)$, $y=x(x-a)^2$ $(x \geq 0)$에 각각 동시에 접해야 한다.



3rd Step
해결

$x \geq 0$에서 곡선 $y=f(x)$가 두 직선 $y=4x+\alpha_1$, $y=4x+\alpha_2$와 만나는 점의 x좌표를 각각 p, q라 하자.

곡선 $y=f(x)$가 원점에 대하여 대칭이므로 두 직선 $y=4x+\alpha_1$, $y=4x+\alpha_2$가 서로 원점에 대하여 대칭이다. 따라서 $x<0$에서 $y=f(x)$가 두 직선 $y=4x+\alpha_1$, $y=4x+\alpha_2$와 만나는 점의 x좌표는 각각 $-q$, p이다.

이때, 직선의 기울기가 4이므로 $\dfrac{f(p)-f(-q)}{p-(-q)}=\dfrac{f(q)-f(-p)}{q-(-p)}=4$가 성립한다.

한편, $x>0$에서 방정식 $f'(x)=4$의 모든 실근이 p, q이므로 근과 계수와의 관계에 의해 $3x^2-4ax+a^2-4=0$에서 $p+q=\dfrac{4a}{3}$이다. 따라서 $q=\dfrac{4a}{3}-p$이므로 위의 식에 대입하면

$$\frac{f(p)-f(-q)}{p-(-q)}=4 \iff \frac{p(p-a)^2+\left(\frac{4a}{3}-p\right)\left(\frac{a}{3}-p\right)^2}{\frac{4a}{3}}=4$$

$$\iff \frac{\frac{4a^3}{27}}{\frac{4a}{3}}=4$$

$$\iff a^2=36$$

이다. 그러므로 $f'(0)=a^2=36$이다.

〈 Solution 2 〉

1st Step
독해

[조건]

① 양수 a, $f(x)=\begin{cases} x(x+a)^2 & (x<0) \\ x(x-a)^2 & (x\ge 0)\end{cases}$: 곡선 $y=f(x)$ 의 대략적인 개형 파악 가능

② 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=4x+t$ 의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$
: x 에 대한 방정식 $f(x)=4x+t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 $g(t)$

③ 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 5 : 부등식 조건이므로 a 의 범위에 대한 조건임을 예상

④ 함수 $g(t)$ 가 $t=\alpha$ 에서 불연속인 α 의 개수는 2
: 곡선 $y=f(x)$ 의 개형을 결정하기 위한 조건

[구하는 값]

⑤ $f'(0)$ 의 값 : a 의 값을 구하는 것이 목표

2nd Step
설계

① 새로운 함수가 정의되어 있으므로 함수 $f(x)$ 에 대한 기본적인 내용을 조사해야 한다.
즉, 주기성, 대칭성 등에 대한 파악이 필요한데 이 함수의 그래프는 원점에 대하여 대칭임을 쉽게 파악할 수 있다.

② $f(x)=4x+t \iff f(x)-4x=t$ 이므로 함수 $y=f(x)-4x$ 와 직선 $y=t$ 의 서로 다른 교점의 개수가 $g(t)$ 이다. 이때, 함수 $h(x)$ 를

$$h(x)=f(x)-4x=\begin{cases} x(x+a)^2-4x & (x<0) \\ x(x-a)^2-4x & (x\ge 0)\end{cases}$$

라 하면 함수 $h(x)$ 의 그래프도 원점에 대하여 대칭이다.

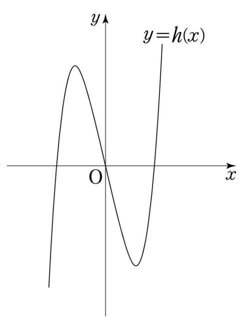
③, ④ 직접 함수 $h(x)$ 의 그래프를 그려가며 조건을 만족시키는 상황으로 결정해야 한다.

3rd Step
해결

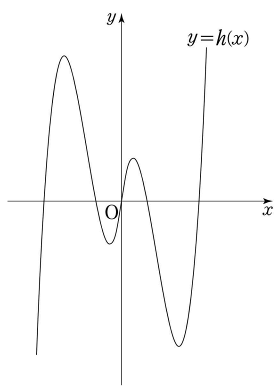
② 함수 $h(x)$ 에서

$$x(x+a)^2-4x=x(x+a+2)(x+a-2),$$
$$x(x-a)^2-4x=x(x-a+2)(x-a-2)$$

이므로 $0<a\le 2$, $a>2$ 에 따라 다음과 같이 곡선 $y=h(x)$ 를 그릴 수 있다.



$0<a\le 2$



$a>2$

3rd Step **해결**	③ 이때, $0<a\le 2$ 이면 $g(t)$ 의 최댓값이 5 일 수 없으므로 $a>2$ 이다. ④ 조건 (나)에 의해 함수 $h(x)$ 의 극댓값과 극솟값은 각각 유일해야 한다. 또한, 함수 $h(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $y=x(x+a)^2-4x$ 의 극댓값과 함수 $y=x(x-a)^2-4x$ 의 극솟값의 절댓값이 서로 같다. 따라서 함수 $y=x(x+a)^2-4x$ 의 극댓값과 극솟값은 부호는 반대이고 절댓값은 서로 같아야 한다. 그러므로 $(a-2)-0=(a+2)-(a-2) \iff a=6$ 이다. 즉, 구하는 값은 $f'(0)=a^2=36$ 이다.