<TUTORIAL>

일차함수 $f(x)=ax+b$ 에 대하여 $f(354)=154$, $f(368)=160$ 이다. $f(417)$의 값은?

$sol1)$

$354a+b=154$

$368a+b=160$ $\quad$ $14a=6$ $\quad$ $a=\frac{3}{7}$

$354\times\frac{3}{7}+b=154$ $\quad$ (계산 생략) $\quad$ $b=\frac{16}{7}$

$$f(417)=\frac{3}{7}\times 417+\frac{16}{7}=\frac{1251+16}{7}=\frac{1267}{7}=\frac{700+560+7}{7}=100+80+1=181$$

$sol2)$

354에 14를 더하면 368, 368에 49를 더하면 417

$14:49=2:7$

154에 6을 더하면 160, 6의 $\frac{7}{2}$배는 21

$160+21=181$

b를 직접 구하는 것은 답을 구할 때 의미가 없다.

2020. 09. 7번

7. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = a_3 + 8, \quad 2a_4 - 3a_6 = 3$$

일 때, $a_k < 0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

풀이1) 초항과 공차를 미지수로 두는 풀이

$d = -4$

$2(a-12) - 3(a-20) = 3$

$-a - 24 + 60 = 3 \qquad a = 33$

$33 - 4(k-1) < 0$

$4k > 37$

$k > 9 + \frac{1}{4}$

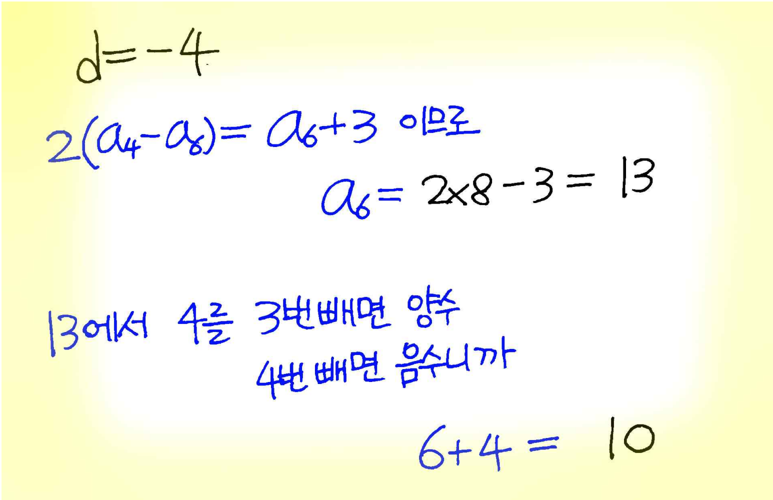
33보다 큰 4의 배수 최솟값은 36이므로 $k-1 = 9$

$k = 10$

좌측 하단의 식은 k의 범위를 정직하게 구한 것입니다.

우측 하단의 풀이는 $k-1$을 하나의 항으로 본 다음에
33이 4×8보다 크고 4×9보다 작다는 점을 통해 k값을 바로 얻어냈습니다.
이는 k가 실수 전체의 범위가 아닌 자연수 범위에 있기에 가능한 사고입니다.

풀이2) 항을 묶어서 보는 풀이



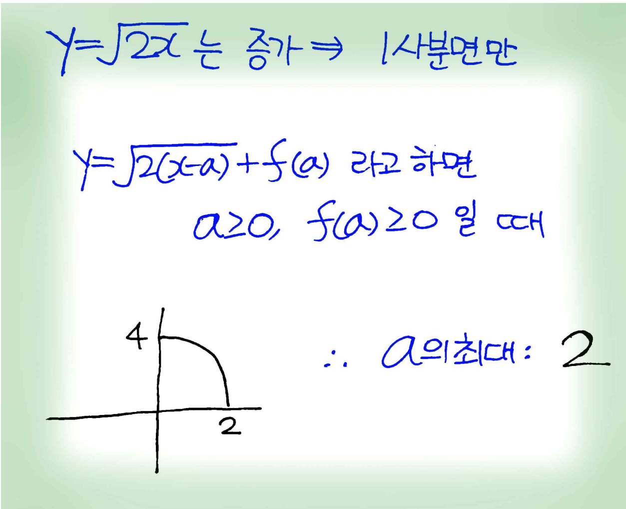
<풀이1) 2) 비교>

풀이1) 은 등차수열을 $a_n = a+(n-1)d$ 로 식을 세우고 a와 d를 구하는 풀이입니다.
풀이2) 는 1과 3의 간격이 4와 6의 간격과 같다는 사실로 a_6을 구하는 풀이입니다.
a_6을 알게 되면 정답을 구할 때 a_1을 별도로 구할 필요가 없습니다.
즉, 이 문제는 a_1이 조건에 등장하지 않고, 풀이과정 중에 중요한 비중을 차지하는 문제도 아니며, a_1을 구하는 것이 계산이 더 편해지는 문제도 아닙니다. 1과 3, 4와 6의 간격이 같은 것은 평가원이 의도적으로 넣은 상황입니다. 풀이2)는 발상적인 풀이가 전혀 아니라 평가원이 의도한 풀이입니다. 오히려 풀이1)이 a_1을 구하는 불필요한 과정이 포함된 풀이라고 생각해야 합니다. 문제에서 의미가 없는 초항을 직접 구하는 것은 TUTORIAL에서 y절편인 b를 직접 구하는 것과 같습니다.

2020. 09. 9번 (N)

9. 정의역이 $\{x \mid x > a\}$인 함수 $y = \sqrt{2x-2a} - a^2 + 4$의 그래프가 오직 하나의 사분면을 지나도록 하는 실수 a의 최댓값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10



이 문제는 식으로 풀어나가는 문제가 아닙니다.
적당히 그림을 그린 다음에 해석하는 것을 요구하는 문제입니다.

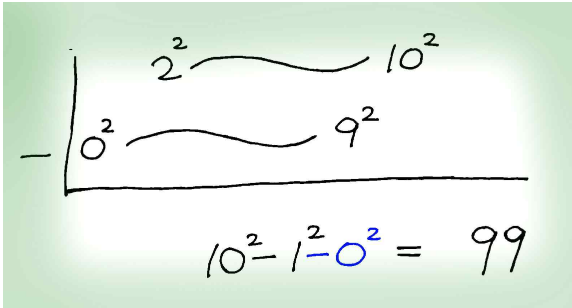
답이 깔끔하게 나오게 하기 위해 정의역 부등식에 등호 포함을 하지 않았습니다.
x축, y축, 원점은 사분면에 포함 되지 않는다는 것은 당연히 알아야하고, ㄱㄴㄷ 합답형 등의 더 어려운 문제를 풀기 위해 복습을 할 때에는 등호 포함 여부에 따라 최댓값이 정의 되는지도 확인하고 넘어가야합니다.

유리함수와 무리함수가 직접범위에서 제외되었지만, 지수함수 로그함수로 언제든지 비슷한 유형을 출제할 수 있습니다.

2020. 09. 12번

12. $\sum_{k=1}^{9}(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{10}(k-1)^2$ 의 값은? [3점]

① 91 ② 93 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99



수열의 합 단원을 세 파트로 나눈다면 '시그마의 의미와 성질' 과 '자연수 거듭제곱의 합' , '부분분수분해, 유리화를 이용한 수열의 합'으로 나눌 수 있습니다.
이 문제는 '자연수 거듭제곱의 합'을 묻는 문제, 즉 $\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ 을 사용하라는 문제가 아닙니다. 시그마 기호의 원초적인 의미를 묻는 문제입니다.

<사고과정>
시그마가 빼기로 연결되어있고 두 시그마는 각각 범위가 1~9, 1~10이다.
범위가 다르므로 시그마 내부의 식 끼리 그대로 계산하면 안 된다.

1~10을 1~9 와 10 으로 나눠서 1~9항을 더할 수도 있지만 이 문제는 그럴 필요가 없어 보인다.

2^2부터 10^2까지의 합에서 0^2부터 9^2까지의 합을 빼라는 것과 같다. 많은 항들이 상쇄되므로 상쇄되지 않는 항 끼리 계산하면 된다.

말로 풀어서 길어보일 뿐이지 실전에서는 5초도 안 걸리는 사고과정입니다.

2020. 09. 13번

13. 확률변수 X가 평균이 m, 표준편차가 $\frac{m}{3}$인 정규분포를 따르고

$$\mathrm{P}\left(X \leq \frac{9}{2}\right) = 0.9987$$

일 때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 m의 값을 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

$$P\left(X \leq \frac{9}{2}\right) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq 3)$$

$\frac{9}{2}$는 평균에 3×표준편차를 더한 것이다.

$$\frac{9}{2} = m + m$$

$$m = \frac{9}{4}$$

교과서적인 풀이들은 문제에서 제시 된 숫자를 $\frac{X-m}{\sigma} = z_0$ 라는 분수식에 그대로 대입하지만 기계적으로 수식에 의존하기 이전에 정규분포곡선의 이미지를 머릿속에 그리면서 해석해봅시다.

- 평균보다 작은 수보다 작을 확률은 0.5보다 작다.
- 평균보다 작은 수보다 클 확률은 0.5보다 크다.
- 평균보다 큰 수보다 작을 확률은 0.5보다 크다.
- 평균보다 큰 수보다 클 확률은 0.5보다 작다.

정규분포에서 아주 당연한 진술들입니다.

그래서 수식을 읽자마자 $\frac{9}{2}$라는 숫자가 평균보다 오른쪽에 있는 숫자라는 것을 알 수 있습니다. 이제 그 차이가 얼마나 되는 지에 집중을 해야합니다.

일차함수 $y = ax + b$ 의 식을 변형하면 $\frac{y-b}{a} = x$ 입니다.

역으로 $\frac{X-m}{\sigma} = z_0$ 의 식을 변형하면 $X = \sigma z_0 + m$ 입니다.

평균이 y절편, 표준편차가 기울기의 역할을 하게 됩니다.

교과서적인 풀이에서 자주 사용하는 분수식 $\frac{X-m}{\sigma} = z_0$ 은 원함수가 아닌 역함수 형태이고, 해석은 역함수 형태가 아닌 원래의 함수 형태로 바꿔야 쉽습니다. 교과서에서는 개념설명이나 해설을 수식을 쓰지 않는 언어로 서술하거나, 그림만을 그려서 설명하기 부적합하기 때문에 수식으로 나타낸 것뿐입니다.

간단한 정규분포 문제는 분수식에 그대로 대입해서 너무 정직하게 쓰기보다
정규분포, 표준화의 원초적인 의미를 생각해서 평균으로부터의 상대적인 위치를 정한 다음에 최대한 식을 $X = \sigma z_0 + m$ 형태로 바로 인식하는 것을 추천합니다. 익숙하지 않더라도 평가원 3점짜리 10~20 문제에만 모아서 시도해도 충분히 연습이 됩니다.

2020. 09. 15번

15. 함수 $f(x)=x^2-2x$ 에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-1)-1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{5}{12}$　⑤ $\frac{1}{2}$

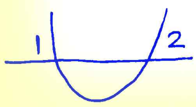
이 문제의 풀이과정은 교점의 x좌표를 구하는 과정과, 넓이를 구하는 과정으로 나눌 수 있습니다. 이차함수 넓이공식을 쓰지 않는다면 넓이를 구하는 과정은 일반적인 정적분 계산을 하면 됩니다. 이 자료에서는 일반적인 정적분 계산을 하지 않고, 이차함수 넓이 공식으로만 풀었습니다. 교점의 x좌표를 구하기 이전에 개형을 대략적으로 그립시다(상상합시다.)

두 이차함수는 최고차항 계수가 1인 것과 -1인 것.
둘러싸인 부분 넓이가 있다면 두 그래프는 두 점에서 만나고 그 사이 범위에서
최고차항 계수가 -1인 그래프가 위
최고차항 계수가 1인 그래프가 아래 에 있다.

교점의 x좌표를 구합시다. 교점의 x좌표들은 $f(x)+f(x-1)+1=0$의 실근입니다.

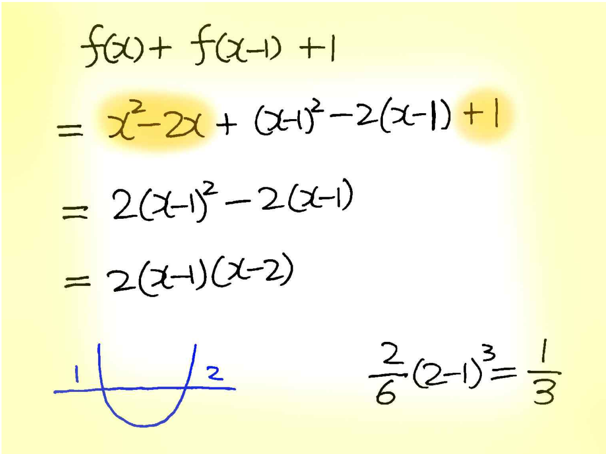
계산법 1)

$$f(x)+f(x-1)+1$$
$$=x^2-2x+(x-1)^2-2(x-1)+1$$
$$=x(x-2)+(x-2)^2$$
$$=2(x-1)(x-2)$$



$$\frac{2}{6}(2-1)^3=\frac{1}{3}$$

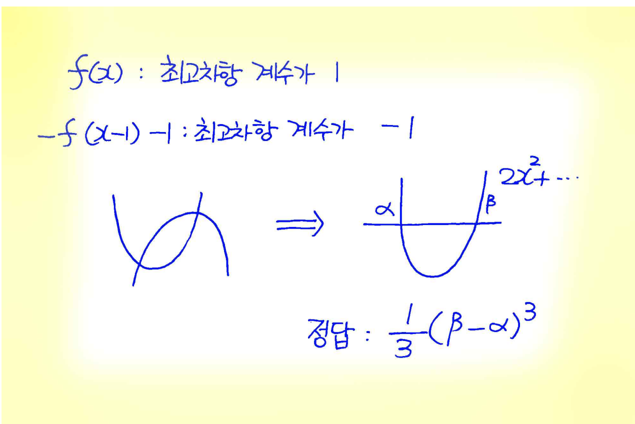
계산법 2)



첫 번째 계산법에서는 $(x-1)^2-2(x-1)+1$을 $(x-2)^2$로 한 번에 묶었습니다.
$x^2-2x+1=(x-1)^2$ 에 $x-1$ 을 합성한 것이므로 아주 당연한 결과입니다.
$(x-2)$가 공통인수가 되어 인수분해를 했습니다.

두 번째 계산법에서는 멀리 떨어져있는 x^2-2x 와 1을 묶었습니다.
$(x-1)$이 공통인수가 되어 인수분해를 했습니다.

이차항 계수와 교점의 x좌표를 모두 얻었으니 넓이공식에 대입하면 정답이 나옵니다.



이차함수 넓이공식은 이차함수 그래프와 직선로 둘러싸인 넓이로 알려져 있는데,
이차함수와 이차함수로 둘러싸인 넓이도 같습니다. 빼기 함수로 생각을 해도 되고,
$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x)+g(x))dx$ 라는 당연한 기본성질을 근거로 해서 생각해도 됩니다.

두 이차함수 그래프의 교점의 x좌표 간격만 같다면 이차항 계수가 1과 -1일 때나, 2와 4일 때나 35와 37일 때나 둘러싸인 넓이가 모두 같습니다.

$f(x) = ax^2 + \dots, \quad g(x) = bx^2 + \dots \qquad S = \frac{|b-a|}{6}(\beta-\alpha)^3$

그러므로 이 문제는 최고차항 계수만 읽자마자 정답이 $\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$ 라고 바로 식을 세운 다음에 α와 β가 될 값을 구하는 것에만 집중을 해도 됩니다.

2020. 09. 16번

16. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1,\quad \lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$$

를 만족시킨다. $f(1)\le 12$일 때, $f(2)$의 최댓값은? [4점]

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

풀이1) 일반형 풀이

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f(-1)=-1+a-b+c=0$

$f'(-1)=2$ $\quad 3-2a+b=2$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(2)=8+4a+2b+c$

$$\left.\begin{aligned}&a+c=b+1\\&a+b+c+1\le 12\\&b+3=2a+2\end{aligned}\right\}\ 8+4a+2b+c\text{의 최댓값은?}$$

$2(b+1)\le 12$ $\quad b\le 5$, $a\le 3$

$8+4a+2b+b-a+1$

$=3a+3b+9$

$a=3$, $b=5$ 일 때

$3\times 8+9=33$

풀이2) 표준형 풀이

$$f(x) = (x+1)(x^2+ax+b)$$

$$1-a+b=2$$

$$1+a+b \le 6$$

$3(4+2a+b)$의 최댓값은?

$2+2b \le 8$ $b \le 3$

$a \le 2$

$$3(4+4+3) = 33$$

풀이3) 이차함수 위주의 풀이

$f(x) = (x+1)\,g(x)$ 라고 하면

$g(-1)=2$ 정답: $g(2)$의 최댓값$\times 3$

$g(1) \le 6$

$$g(x) = (x+1)(x-t)+2$$

$$2(1-t)+2 \le 6$$

$$t \ge -1$$

$g(2) = 3(2-t)+2 \Rightarrow$ $t=-1$일 때 11로 최대

$$3\times 11 = 33$$

<풀이비교>

일반형은 그래프의 개형, 성질을 표현하기 어렵습니다. 표준형은 그래프의 개형, 성질을 잘 나타냅니다. 그러므로 풀이1)보다 풀이2)에 익숙해지는 것이 다항함수를 다룰 때 더 좋습니다.

풀이2)와 풀이3) 모두 표준형으로 식을 세운 것이지만, 풀이3)은 그 초점이 이차함수에 더 맞춰줘 있습니다. 풀이2)는 미정계수가 2개이고, 풀이3)은 미정계수가 1개이지만, 발상이 더 쉽고, 풀이 길이도 짧기 때문에 이 문제에서는 풀이2)가 더 현실적입니다.

더 어려운 문제들을 접하다보면 풀이2) 보다 풀이3) 이 더 편한 문제도 있을 것입니다.
그렇기에 풀이3)처럼 접근하는 아이디어도 알아두는 것이 좋습니다.

<등식과 부등식의 연립>

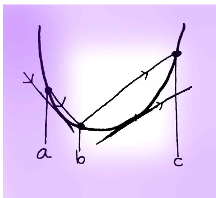
풀이1) 과 풀이2)에서 b의 범위를 직접 구했습니다. a는 직접 구하지 않고 b의 범위를 구한 다음에 간접적으로 a의 범위까지 바로 구했습니다. 두 풀이에서 a, b 모두 등식에 포함되어있고, 서로 양의 상관관계에 있기 때문에 b가 최대일 때 a도 동시에 최대가 됩니다. 서로 음의 상관관계에 있다면 둘 중 하나가 최대일 때 다른 하나는 최소가 됩니다. 이 절차가 지체 없이 당연하게 이어져야합니다.

$px+qy=k$ 일 때

$pq>0$ 이면 x와 y는 음의 상관관계
x가 최대일 때 y는 최소
x가 최소일 때 y는 최대

$pq<0$ 이면 x와 y는 양의 상관관계
x가 최대일 때 y도 최대
x가 최소일 때 y도 최소

풀이4) 초고난도 풀이



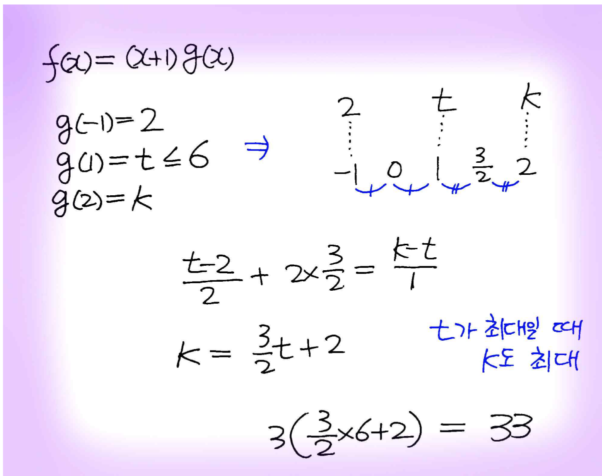
이차함수는 다음이 성립한다.

$f(x) = px^2 + \ldots..$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = \Delta_1 \ , \quad \frac{f(c)-f(b)}{c-b} = f'\left(\frac{b+c}{2}\right) = \Delta_2$$

이차함수의 도함수는 일차함수이기 때문에

$$\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\frac{b+c}{2} - \frac{a+b}{2}} = \quad f'(x)\text{의 기울기} \quad = 2p \qquad\qquad \Delta_2 - \Delta_1 = 2p \times \frac{c-a}{2}$$



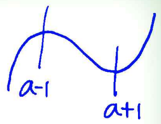
2020. 09. 17번

17. 함수 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$ 의 극댓값이 4이고 $f(-2)>0$ 일 때, $f(-1)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [4점]

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

풀이1- I)

$$f'(x)=3x^2-6ax+3(a+1)(a-1)$$
$$=3(x-(a+1))(x-(a-1))$$



$$f(a-1)=4$$
$$(a-1)^3-3a(a-1)^2+3(a-1)^2(a+1)$$
$$=(a-1)^2(a-1-3a+3a+3)=(a-1)^2(a+2)=4$$

$$(a^2-2a+1)(a+2)=a^3-3a+2=4$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$(a+1)^2(a-2)=0$$

$$a=-1 \text{ or } 2$$

가장 정직하면서, 넓이공식, 비율관계를 사용하지 않았을 때 시험 현장에서 현실적인 풀이입니다.

$f(a-1)=4$ 를 풀 때, $(a-1)^2$ 로 묶는 것은 기본적으로 할 수 있어야합니다.
어차피 조립제법을 쓸 때 전개할 것이라고 해서 처음부터 전개를 시도하면 오히려 계산만 쓸데없이 길어집니다.

풀이1-Ⅱ-1) <$f(-2)$를 a로 표현하고 대입>

$$f(-2) = -8-12a-6a^2+6 > 0$$

$$3a^2+6a+1 < 0$$

$a=-1$ 이면 $\quad 3-6+1<0$

$a=2$ 이면 $\quad 3a^2, 6a, 1$ 모두 양수 $\quad a=-1$

$$f(x) = x^3+3x^2 \qquad f(-1) = 2$$

노란색 음영처럼 계산을 할 필요 없을 때 안하는 것도 실력입니다.

풀이1-Ⅱ-2) <a를 먼저 대입하고 부호조사>

$a=-1$ 이면 $\quad f(x) = x^3+3x^2 = x^2(x+3)$

$a=2$ 이면 $\quad f(x) = x^3-6x^2+9x = x(x+3)^2$

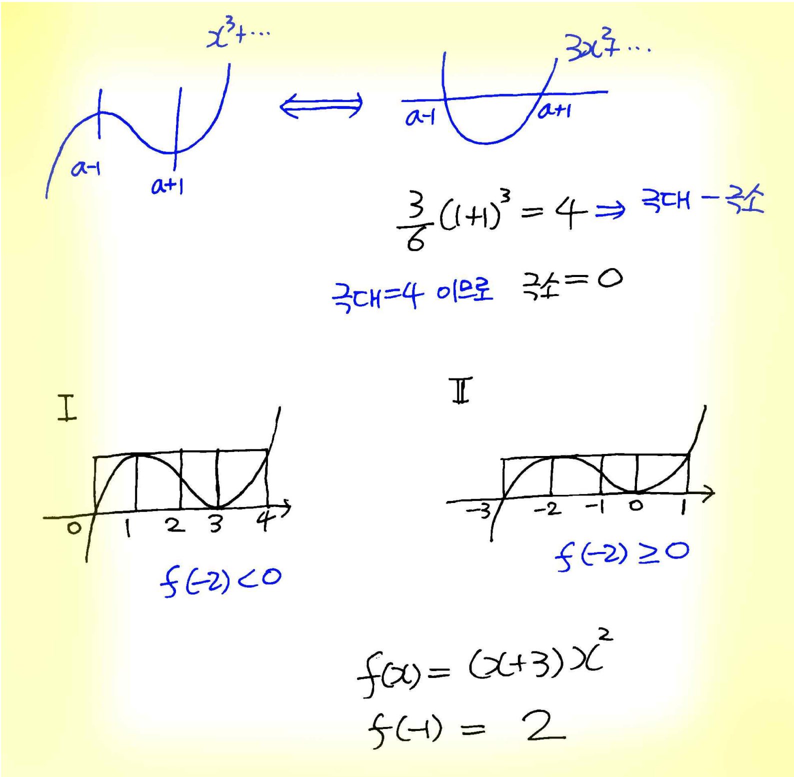
$x=-2$일 때 $\quad x=-2, \; x+3=1 \qquad - \; - \; + \; >0 \qquad a=-1$

$\qquad\qquad\qquad - \; + \; + \; <0$

$$f(-1) = (-1)^2 \times 2 = 2$$

x에 대입할 값이 -3도 아니고 0도 아니기 때문에 x^2과 $(x+3)^2$은 양수가 됩니다.
그러므로 $(x+3)$의 부호와 x에 -2를 대입한 것의 부호만 조사해도 됩니다.

풀이2) <초고속 풀이>



비율관계와 이차함수 넓이공식을 복합적으로 이용한 풀이입니다.

극솟값이 0임을 안 뒤에 Ⅰ Ⅱ 의 그래프를 확정할 수 있는 근거는

- $f(x)$가 상수항이 없어 원점을 지남
- a의 값이 어떤 값이든 극점의 x좌표 차이가 2

입니다. $f(-2)$ 의 부호도 직접 계산하지 않고 그래프 개형으로 확인할 수 있고, 정답 역시 극댓값의 절반으로 구해도 됩니다.

초고난도 고인물 풀이)

$g(x)=x^3-3x$ 이면

g는 $x=1$ 에서 극소 $g(1)=-2$

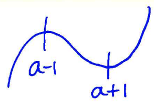
$x=-1$ 에서 극대 $g(-1)=2$

$g(2)=2 \quad g(-2)=-2$

수능 수학에서 가장 만만한 3차 함수가 $y=x^3$이라면,
가장 만만한 '극값을 가지는 3차 함수'는 $y=x^3-3x$ 일 것입니다.
문제를 많이 풀다보면 $y=x^3-3x$ 의 그래프, 극점, 극값에 대한 결과값이 외워질 수 있습니다. 결과값에 너무 의존하는 풀이는 수능에서 지향하는 풀이가 절대 아니므로 이 풀이는 이 문제에서만 통하는 특이한 풀이라고 봐야합니다.

$f'(x)=3x^2-6ax+3(a+1)(a-1)$

$=3(x-(a-1))(x-(a+1))$



$f'(x)$는 $g'(x)$를 $\Delta(a,0)$ 평행이동

$f(x)$는 $g(x)$를 $\Delta(a,k)$ 평행이동

k는 $f(0)=0$ 되도록 하는 적절한 식

$f(x)=(x-a)^3-3(x-a)+k$

$k=a^3-3a=g(a)$

$\underset{4}{f\text{의 극댓값}} = \underset{2}{g\text{의 극댓값}} + \underset{2}{g(a)}$

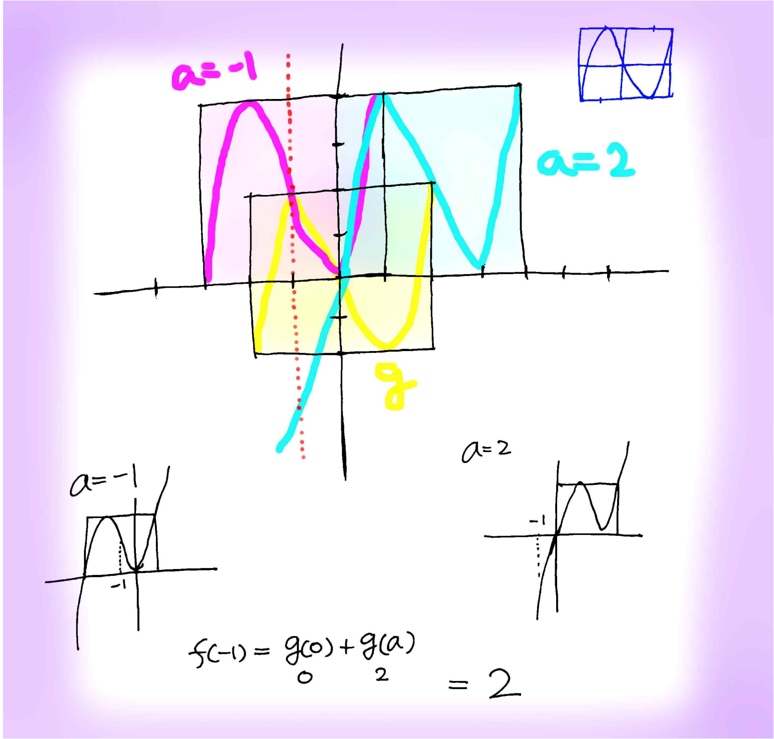
$g(a)=2$

$a=-1$ or 2

$f(x)$는 $g(x)$를 $\begin{bmatrix}\Delta(-1,2) \\ \text{or} \\ \Delta(2,2)\end{bmatrix}$ 평행이동

$f(x)=g(x-a)+g(a)$

이 풀이가 발상을 과하게 요구하는 풀이이긴 하지만,
풀이 초반부 노란색으로 테두리가 칠해진 부분은 발상의 영역이 아닙니다.
$y=3(x-(a-1))(x-(a+1))=3((x-a)-1)((x-a)+1)$ 이
$y=3x^2-3$ 을 x축 방향으로 a만큼 평행이동한 식이라는 것을 볼 줄 알아야 하며,
$f'g'$ 사이의 관계로 fg 사이의 관계를 밝히는 것을 부정적분 문제 풀이의 기초이기 때문에 발상의 영역이 아닙니다.



노란색 $g(x)$ 그래프를 평행이동 시키면
$a=-1$ 일 때 분홍색 그래프가 됩니다. x가 0일 때와 -3이하일 때를 제외하면
함숫값은 양수입니다. 그러므로 $f(-2)$ 역시 양수입니다.
$a=2$ 일 때 청록색 그래프가 됩니다. x가 0 미만일 때 함숫값은 음수입니다.
그러므로 $f(-2)$는 음수입니다.

이 풀이는 앞에서도 말했듯이 결과값에 과하게 의존하며, 그것도 $y=x^3-3x$ 라는 식을 반복적으로 계속 써먹을 수 있는 풀이입니다. 숫자나 식을 조금만 비틀면 이런 풀이가 통하지 않습니다.

<풀이1 추가 설명>

조립제법이 기억이 나지 않을 때 인수분해 하는 법

$a^3 - 3a - 2 = 0$

a에 -1을 대입하면 등식이 성립하므로 좌변은 $(a+1)$을 인수로 가진다.

$$(a+1)(pa^2 + qa + r) = 0$$

최고차항 계수가 1이고, 상수항이 -2 이므로 $p = 1$, $r = -2$ 이다.

$$(a+1)(a^2 + qa - 2) = 0$$

이차항의 계수가 0이 되어야하므로 $1 + q = 0$ $\quad q = -1$

$$(a+1)(a^2 - a - 2) = (a+1)^2(a-2) = 0$$

초고난도 고인물 풀이 추가 설명)

초고난도 고인물 풀이에서의 $g(x) = x^3 - 3x$의 그래프를 통째로 외워버렸다면
$(a+2)(a-1)^2 = 4$의 실근을 매우 쉽게 구할 수 있습니다.

$g(x)$를 극솟값이 0이 되도록 평행이동 시킨 함수 $h(x)$는
$h(x) = 0$ 의 실근이 두 개이고, 그 차이가 3이다.
$h(x)$의 극댓값은 4이고, $h(x) = 4$의 두 실근은 $h(x) = 0$의 두 실근에 1씩 더한 것이다.
그러므로

$$(a+2)(a-1)^2 = 4 \Leftrightarrow (a+1)^2(a-2) = 0$$

이러한 풀이 역시
고인물들이 할 수도 있는 풀이일 뿐이지, 수능 본래의 목적에 부합한 좋은 풀이는 절대 아닙니다.

2020. 09. 21번

21. 함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $h(x)$가 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지면 $\int_0^1 g(x)dx=-1$이다.

ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $g(x)=0$은 열린 구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

<보기를 읽기 전 까지 할 수 있는 생각>

- 식이 일반형이다. 개형으로 풀기는 어렵다.
- 굳이 개형으로 파악하자면 원점에서 접하는 x^3+x^2에 직선 $ax+b$를 얹은 것이다. a,b가 동시에 가변적이기 때문에 추가 조건이 없다면 개형으로 접근하기는 어렵다.

ㄱ. 참

ㄴ. f가 $x=-1$에서 극값 0을 가진다

$\Leftrightarrow$ $f(x)$가 $(x+1)^2$을 인수로 가진다

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 h'(x)dx = h(1)-h(0)$$
$$= 0\times f(1) - (-1)\times f(0)$$
$$= f(0)$$

ㄴ을 재해석하면

$f(x)=(x+1)^2(x-t)$ 이면 $f(0)=-1$ 이다.

ㄱ은 곱의 미분법 공식만 알면 바로 풀 수 있습니다.
ㄱ은 사실상 하나의 선지가 아니라 문제에서 주어진 항등식 조건을 다시 표현한 것이라고 볼 수 있습니다. ㄱ의 힌트가 없다면, 문제가 몇 배는 더 발상적으로 체감될 것입니다.

ㄴ. 은 ㄱ에서 얻은 사실과, 미분과 적분과의 관계를 활용해야합니다.

ㄱㄴㄷ 합답형 문제에는 p이면 q이다. 꼴의 진술을 재해석하면 편한 문제들이 많습니다.
(Ex. 2019. 대수능. 20번 ㄷ)

$(x^2+2x+1)(x-t)$

이차항 계수는 $-t+2=1 \quad t=1$

$f(0) = 1^2 \times (-1) = -1$

$f(x) = x^2(x+1) + \underbrace{ax+b}_{a(x+1)} = (x+1)^2(x-t)$

$x^2+a = (x+1)(x-t) \quad t=1$

$f(x) = (x+1)^2(x-1) \quad f(0) = -1$

$-1-1+t = -1 \quad t=1$

$f(0) = 1^2 \times (-1) = -1$

ㄴ: 참

ㄴ을 3가지 방법으로 풀었습니다.
첫 번째 방법은 계수비교법
두 번째 방법은 $(x+1)$을 묶은 인수분해
세 번째 방법은 삼차식의 근과 계수와의 관계입니다.

ㄷ

$h'(x) = g(x) = 0$

$h(0) = -f(0) = 0$

$h(1) = 0$

롤의 정리에 의해 ㄷ : 참

ㄷ. $g(x)$를 $h'(x)$가 아니라 그냥 $g(x)$인 채로 두고 사이값 정리로 시도를 하기 쉽습니다.
사이값 정리로 시도 할 경우

$$g(0)g(1) = -a(2+a) < 0$$

라는 부등식을 풀게 될 텐데

$a > 0$ 또는 $a < -2$ 일 때 실근이 존재함을 알 수 있을 뿐이지
$-2 \le a \le 0$ 일 때 실근이 존재하지 않는다고 하면 안 됩니다. (☆)
ㄷ의 진위를 판별하려면 $-a(2+a) < 0$ 이 성립하지 않는 a가 적어도 하나라도 존재하는지를 확인해야만 합니다.

여기서 ㄱ을 다시 재사용하여 $g(x)$를 $h'(x)$로 생각하여 평균값 정리로 풀어야합니다.

$h(0)$과 $h(1)$을 구해보면 평균값 정리 중에서도 특수한 상태인 롤의 정리를 사용하면 됨을 알 수 있습니다.

다항함수는 실수 전체에서 연속이고 미분가능하기 때문에 앞에 붙는 조건들은 자동으로 성립한다고 받아들이면 됩니다.

☆

L_1 : p이면 q이다.

L_2 : q이면 p이다.

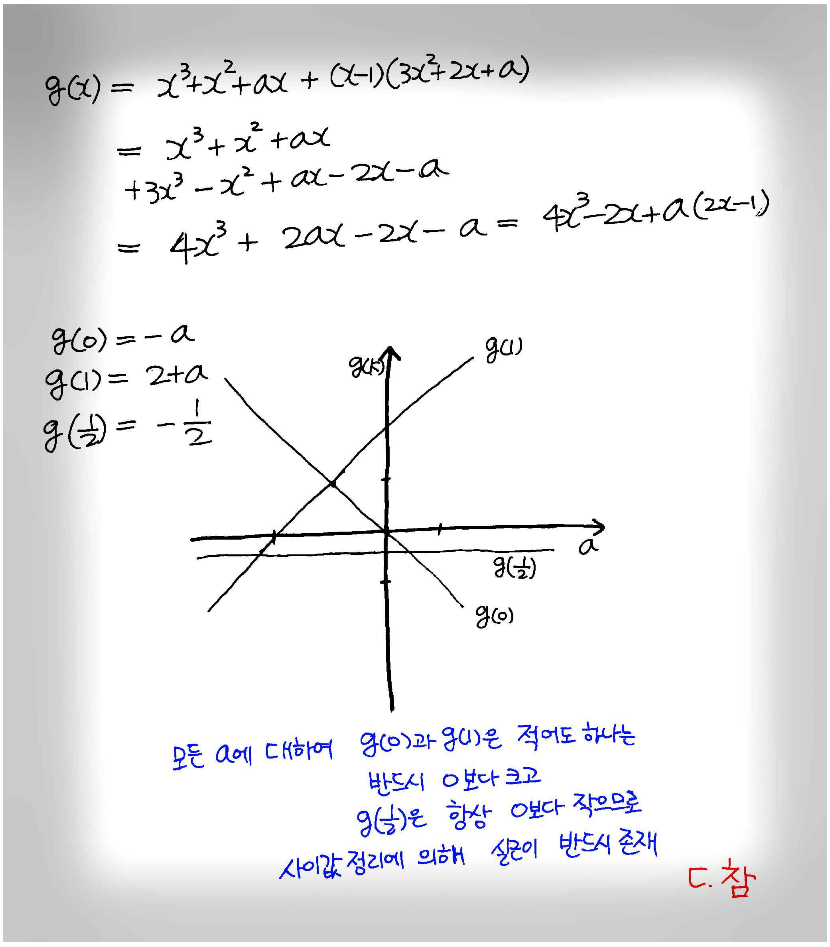
L_3 : $\sim q$이면 $\sim p$이다.

L_4 : $\sim p$이면 $\sim q$이다.

L_1의 역은 L_2, L_2의 대우명제는 L_4
L_1의 대우명제는 L_3, L_3의 역은 L_4

어떤 명제의 참/거짓은 대우명제의 참/거짓과 항상 같다.
하지만 어떤 명제가 참이라고 해서 그 역이 항상 참인 것은 아니다.
그러므로 L_1이 참이라고 해서 L_4가 참인 것은 아니다.

ㄷ 별해)



$b=0$이라 하고 a라는 미정계수만 남긴 채
$g(x)$의 식을 직접 구하면

$$g(x) = 4x^3-2x+a(2x-1)$$ 입니다.

임의의 a에 대하여 항상 $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ 이기 때문에
별해로 풀 수 있는 것입니다.

ㄷ의 별해에서 $(a, g(k))$라는 좌표계를 도입하고 그래프로 판단하는 것은 아주 효율적인 풀이입니다. (2017 대수능 나형 30번에서 가장 어려운 부분이 이를 요구하기 때문에 어렵습니다.)
하지만 ㄷ의 별해 자체는 좋은 풀이가 절대 아닙니다.
만약 $g(x) = p(x)+a\times q(x)$ 에서 $q(x)=0$ 이 되는 x_0에 대해
$g(0)$과 $g(1)$, $g(x_0)$이 모두 부호가 같게 되는 a가 존재하면
역시 못 쓰는 풀이가 되어버립니다. 참인지 거짓인지 알 수 없기 때문입니다.

2020. 09. 30번

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이 점 $(k,\ 0)$에서 만난다. $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

풀이1-Ⅰ)

$$f(x) = (x+1)x(x-1)(x-2) + mx+n \quad \mathrm{I}$$
$$= (x^2-1)(x^2-2x) + mx+n \quad \mathrm{II}$$
$$= x^4-2x^3-x^2+2x+mx+n \quad \mathrm{III}$$

$$f'(x) = \{(\ )(\ )(\ )\times 4\} + m \quad \mathrm{I}$$
$$= 2x(x^2-2x)+(x^2-1)(2x-2)+m \quad \mathrm{II}-①$$
$$= 2x^2(x-2) + 2(x-1)^2(x+1) + m \quad \mathrm{II}-②$$
$$= 4x^3-6x^2-2x+(2+m) \quad \mathrm{III}$$

$$\frac{f(-1)}{-(k+1)} = f'(-1) \qquad \frac{f(2)}{-(k-2)} = f'(2)$$

풀이과정을 보면 처음부터 $(x+1)x(x-1)(x-2)+mx+n$ 꼴로 나타냈습니다.

일반형으로 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 쓰고 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 를 대입하고 연립해서 미정계수들을 구해도 되지만 등차수열 조건을 보고 식을 한 번에 표준형으로 나타내는 실력을 갖추도록 해야합니다.

위의 풀이에서 $f(x)$의 Ⅰ Ⅱ Ⅲ 는 순서대로 전개하는 과정이 맞지만 $f'(x)$는 아닙니다. f로부터 f'를 구할 때 Ⅰ Ⅱ Ⅲ 중 어떤 방법으로 미분할 지는 자유롭게 선택해도 되지만, 모두 연습하도록 합시다.

아래에 있는 분수식은 접선의 방정식의 변형식입니다.
분수형 변형식은 평균변화율과 미분계수가 같다는 상황을 직관적으로 잘 나타냅니다.
단, 접점에서 분모가 0이 되기 때문에 접점을 다룰 때에는 사용하면 안 됩니다.

k를 구하기 위해 직접 구해야 할 값들은 $f(-1)$, $f'(-1)$, $f(2)$, $f'(2)$ 입니다.

풀이1-Ⅱ)

$f(-1) = -m+n$

$f(2) = 2m+n$

$f'(-1)$, $f'(2)$ 구할 때

Ⅰ로 구하기

$f'(-1) = (-1)(-2)(-3) + m = m-6$

$f'(2) = 3\cdot 2\cdot 1 + m = m+6$

Ⅱ로 구하기

$f'(-1) = -6+0+m$

$f'(2) = 0+6+m$

Ⅲ으로 구하기

$f'(-1) = -4-6+2+2+m = m-6$

$f'(2) = 32-24-4+2 = m+6$

Ⅰ: 도함수의 항이 굉장히 많기 때문에 식 자체를 다루기에는 부적합합니다.
여기서는 숫자를 대입하기만 할 것이고, 대입하는 숫자 또한 $-1, 0, 1, 2$ 라서 대부분의 항이 사라지기 때문에 계산이 더 간단해집니다.

Ⅱ : 전개와 곱의 미분을 혼용한 형태로, 숫자 대입 시 몇몇 항이 사라지기 때문에
계산이 빨라집니다.

Ⅲ : 완전히 전개한 일반형으로 항들이 인수정리에 의해 통째로 사라지는 효과는 기대하기 어렵습니다.

풀이1-Ⅲ) k 구하기

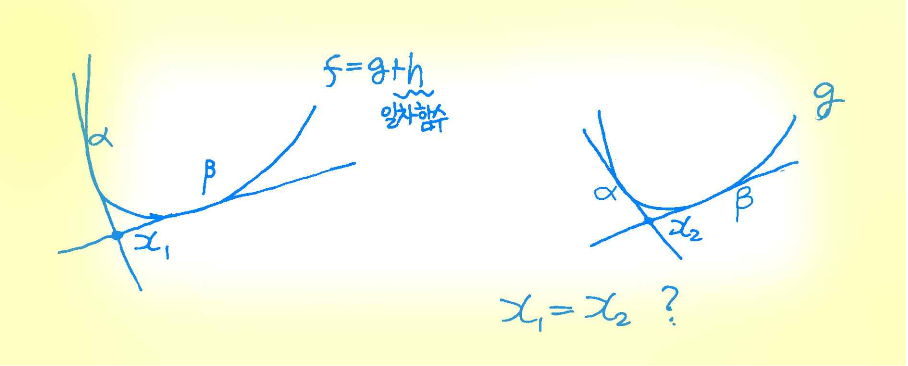
$$f(-1) = -(k+1)f'(-1)$$
$$f(2) = -(k-2)f'(2)$$
$$\Rightarrow \left(f(2) - f(-1)\right) = \left(2f'(2) + f'(1)\right) + k\left(f'(-1) - f'(2)\right)$$
$$3m = 2m+12+m-6 \qquad -12k$$
$$12k = 6 \qquad k = \frac{1}{2}$$

k, m, n 3개의 미정계수, 및 상수가 있기 때문에 계산이 쉽게 풀리지 않을 것이라 생각하기 쉽습니다. n이라는 문자는 f의 상수항이기 때문에 f' 에서는 미분되어 사라집니다. $f(2)$와 $f(-1)$을 빼면 n이라는 문자가 완전히 사라지기 때문에 n을 먼저 없애버리는 방향으로 계산을 하면 됩니다.

$$f(1) = m+n = 20$$
정답: $f(2) = 20+m$
$$20-2m = -\frac{3}{2}(m-6)$$
$$4m-40 = 3m-18$$
$$f(2) = (40-18)+20 = 42$$

f를 미분하면 n은 사라지고
등차수열의 정의를 이용하면 n을 쓸 필요가 없기 때문에
모든 것을 m으로 표현을 합시다.
앞에서 k값을 구했으니까 구한 k를 대입한 접선의 방정식과 연립을 하면 됩니다.

직관 풀이)



[증명]

$$f(x) = g(x) + h(x)$$
$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

$$f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$$
$$f'(\beta)(x-\beta) + f(\beta)$$

$$(f'(\beta) - f'(\alpha))x_1 + (\alpha f'(\alpha) - \beta f'(\beta)) + (f(\beta) - f(\alpha)) = 0$$

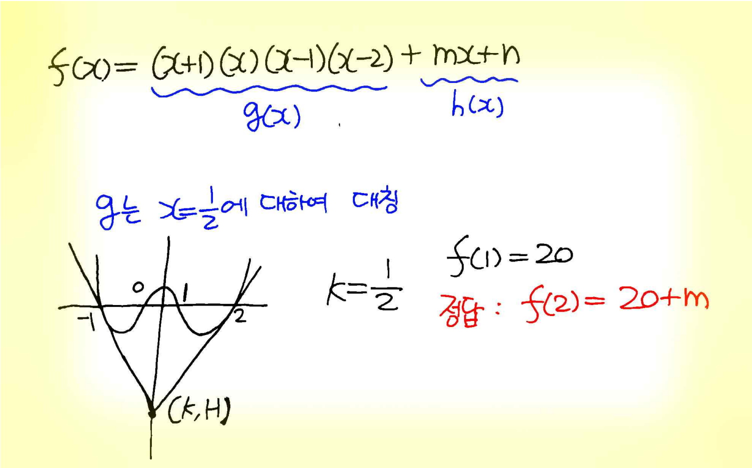
$$x_1 = \frac{(\beta f'(\beta) - \alpha f'(\alpha)) - (f(\beta) - f(\alpha))}{f'(\beta) - f'(\alpha)}$$

$$= \frac{(\beta g'(\beta) - \alpha g'(\alpha)) - (g(\beta) - g(\alpha)) + (\beta h'(\beta) - \alpha h'(\alpha)) - (h(\beta) - h(\alpha))}{(g'(\beta) - g'(\alpha)) + (h'(\beta) - h'(\alpha))}$$

$$= \frac{(\beta g'(\beta) - \alpha g'(\alpha)) - (g(\beta) - g(\alpha))}{g'(\beta) - g'(\alpha)} \qquad \left(\because h'(\alpha) = h'(\beta) = \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha}\right)$$

$$= x_2$$

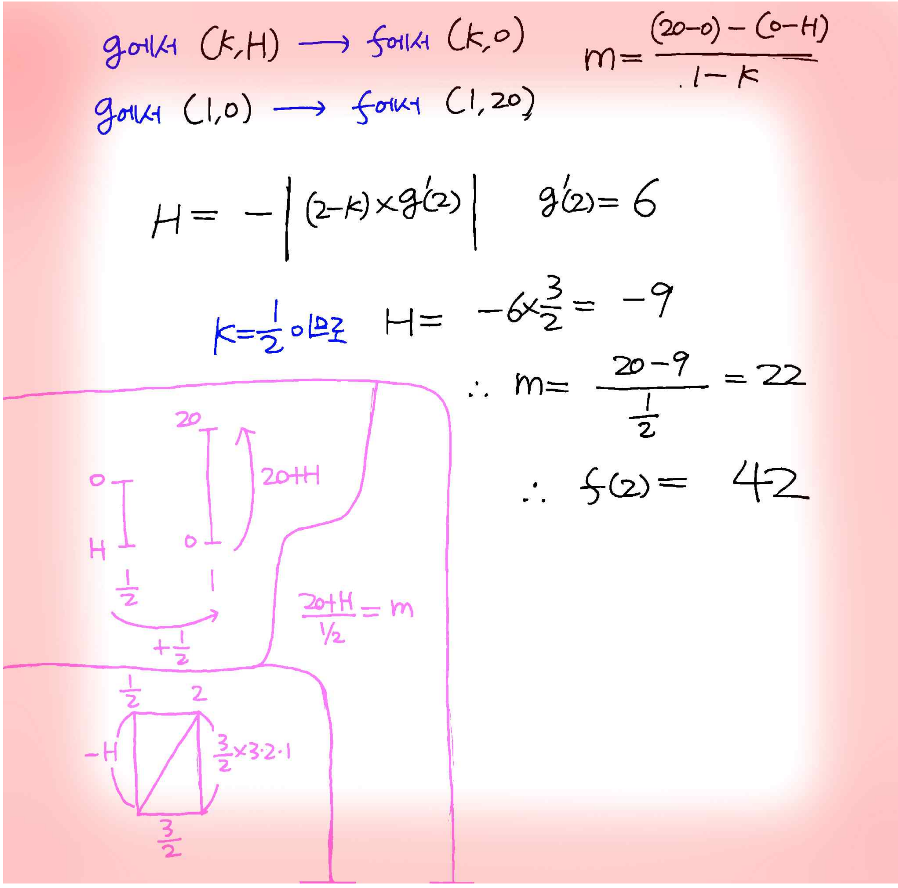
이 사실에 의해 다음과 같이 풀 수 있습니다.



이 다음 과정은 풀이1) 과 똑같이 하면 됩니다.

풀이1)처럼 하지 않고 다음 페이지와 같이 풀이를 이어나갈 수도 있습니다

직관 + 초고난도 풀이)



<사고 과정>

$k=\dfrac{1}{2}$이고, $f(1)=20$ 임을 구한 이후

그래프를 $mx+n$ 에 얹었더니 $(k,\ H)$는 $(k,\ 0)$이 되었다.
그래프를 $mx+n$ 에 얹었더니 $(1,0)$은 $(1,\ 20)$이 되었다.

H에서 0이 되는 정도와 0이 20이 되는 정도의 차이는
$k=\dfrac{1}{2}$이 1이 되는 정도에 m을 곱한 것이다.

H는 평균변화율과 미분계수가 같음으로 구하면 된다.

※ 참고

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ 에서
$f'(a)=(a-b)(a-c)(a-d)$ 이다.

$f'(x)=(x-a)(x-b)(x-c)+(x-a)(x-b)(x-d)+(x-a)(x-c)(x-d)+(x-b)(x-c)(x-d)$
에 대입하고 항 3개를 지워서 얻을 수도 있지만

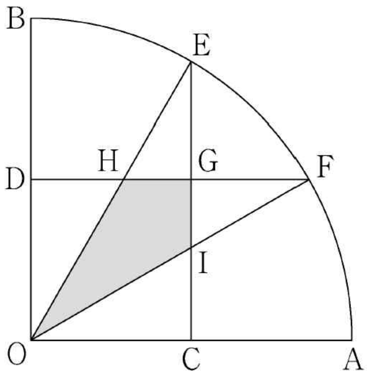
다음과 같이 얻을 수도 있습니다.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-0}{x-a}$$

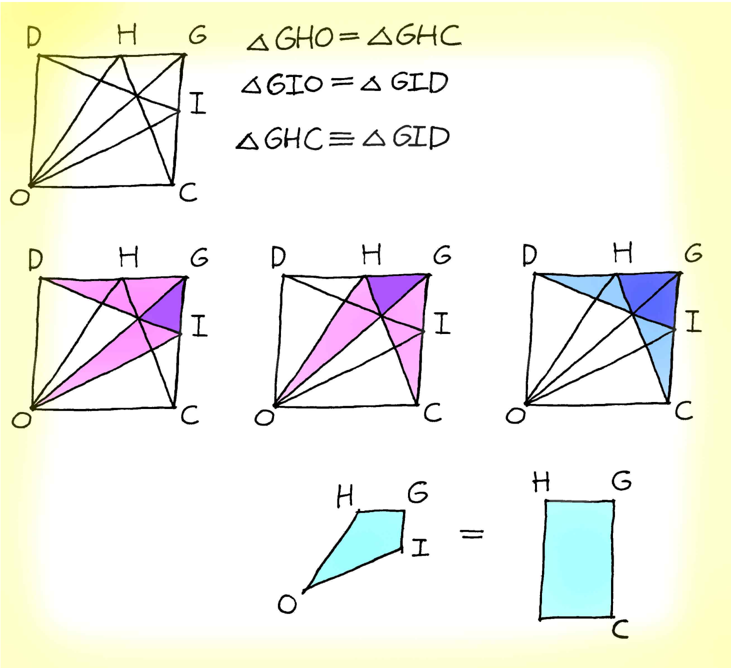
$$=(a-b)(a-c)(a-d)$$

$f'(b)$, $f'(c)$, $f'(d)$ 도 똑같이 구하면 됩니다.
$f'(k)$ $((k-a)(k-b)(k-c)(k-d)\neq 0)$ 일 때에는 어쩔 수 없이
도함수에 직접 대입을 해야합니다.

2020. 09. 18 (보너스)



사각형 OCGD 는 넓이가 1인 정사각형이고,
선분 OE와 선분 OF는 ∠AOB 를 3등분 한다.
사각형 OHGI 의 넓이(A) 와 선분 GI의 길이가
같음을 증명하시오.



$A = \overline{GH} \times \overline{GC}$

$\overline{GC} = 1$, $\overline{GH} = \overline{GI}$ $\qquad$ $A = \overline{GI}$

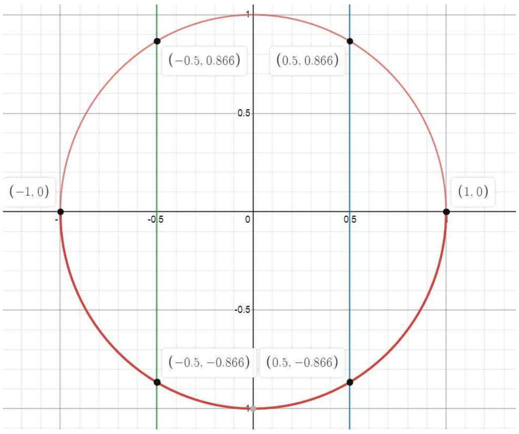
직사각형의 가로가 1이면 세로=넓이 직사각형의 세로가 1이면 가로=넓이	삼각형의 밑변이 2이면 높이=넓이 삼각형의 높이가 2이면 밑변=넓이	사다리꼴의 높이가 2이면 윗변+아랫변=넓이

표에 적힌 내용은 사소하지만 넓이 관련 연산을 빠르게 하는 데 도움이 됩니다.
정적분을 기본 도형으로 계산할 때와, 확률밀도함수 넓이 계산할 때 특히 도움이 됩니다.

원의 N등분

예각중에 특수각인 것은 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ 입니다. 각각 원을 12, 8, 6등분 했을 때의 부채꼴 한 조각의 중심각입니다. 원을 n등분 하는 법을 알아봅시다.

원의 6등분

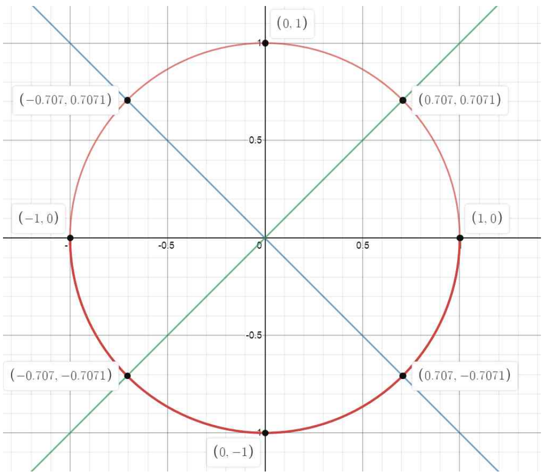


좌표축의 교점이 중심이 되는 원을 그린다.

가로축에 포함된 두 반지름을 수직이등분한다.

원과 가로축의 교점 2개와 두 수직이등분선과 원의 교점 4개가 원을 6등분하는 점이 된다.

원의 8등분

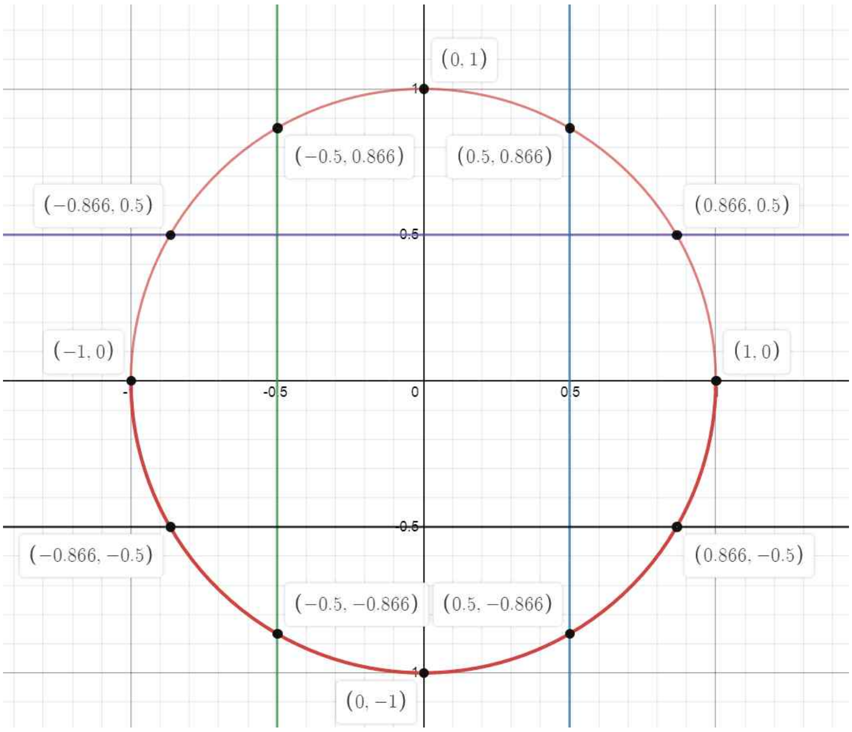


좌표축의 교점이 중심이 되는 원을 그린다.

원의 중심을 그리고 기울기가 1, -1인 직선을 그린다.

좌표축을 포함한 네 직선이 원과 만나는 8개의 점들이 원을 8등분하는 점이 된다.

원의 12등분



좌표축의 교점이 중심이 되는 원을 그린다.

가로축에 포함된 두 반지름을 수직이등분한다.

세로축에 포함된 두 반지름을 수직이등분한다.

원과 좌표축의 교점 4개와 네 수직이등분선과 원의 교점 8개가 원을 12등분하는 점이 된다.

삼각함수 단원에서 단위원으로 문제를 풀 때 이 방법을 사용하면
그림을 더 정확하게 그릴 수 있습니다.

2020. 09. 07

#단항다항의상대성 #평가원의설계 #등차수열은이산적인일차함수

2020. 09. 09

#순수해석의사소통 #지수로그함수에서출제가능

2020. 09. 12

#시그마공식쓰기전에의미먼저

2020. 09. 13

#시각적위치파악 #정규분포표준화의일차함수적해석

2020. 09. 15

#식처리계산법 #빼기함수 #넓이공식

2020. 09. 16

#다양한풀이 #표준형을씁시다 #연립상관관계

2020. 09. 17

#다양한풀이 #넓이공식 #비율관계 #인수분해법

2020. 09. 21

#앞의조건은계속써먹자 #선지재해석 #다양한계산법 #역과대우명제의참거짓 #새로운좌표계도입

2020. 09. 30

#표준형사용 #곱의미분법 #접선의방정식분수형 #일차함수첨가시교점변화

2020. 09. 18(BONUS)

#도형을가지고노는법 #넓이와길이가같을때 #원의6,8,12등분