2020. 06. 9번

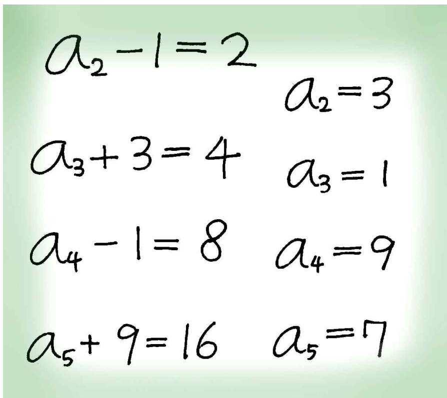
9. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} + (-1)^n \times a_n = 2^n$$

을 만족시킨다. a_5의 값은? [3점]

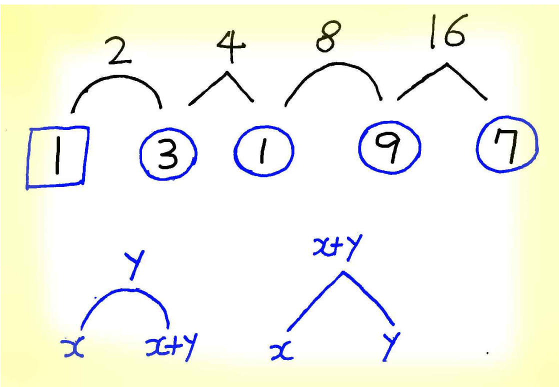
① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

풀이1)



등식의 n에 1부터 순차적으로 대입한 풀이입니다.

풀이2)



a_n은 인접한 항이 특정 수열로 매개되어 있습니다.
인접한 두 항이 매개수열의 합일 때와 차일 때가 교대로 진행됩니다.
매개수열이 단순 합이나 단순 차로 매개되면 시각적으로 한 눈에 나타낼 수 있습니다.

풀이1) 풀이2) 비교

풀이1)은 풀이2)에 비해 지면에 쓸 것들이 많습니다. 연산기호도 여러 번 쓰고, 항도 중복해서 몇 번 쓰게 됩니다. 반면 풀이2)는 문제에서 다루는 항들을 한 번씩만 쓰면 됩니다.

이 문제에서는 풀이과정 자체가 짧기 때문에 둘의 차이가 크게 나지 않지만, 항의 개수를 많이 다루다보면 그 정도에 비례하여 차이가 나게 됩니다.
 2018학년도 9월 19번이 풀이가 너무 길고 어렵다는 의견이 많은데, 아마 풀이1)처럼 고지식하게 대입해서 그럴 것입니다. 2018학년도 9월 19번 문제야말로 풀이2)처럼 매개수열을 먼저 나열하고 규칙에 맞춰서 역순으로 대입해야 빠르게 풀 수 있습니다.

수열을 중간 항부터 첫째항 순서로 역방향으로 구해야 할 때 역시 풀이2)가 풀이1)보다 더 효율적입니다.

2020. 06. 13번

13. 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2 - nx + 4(n-4) = 0$$

이 서로 다른 두 실근 $\alpha, \beta\,(\alpha < \beta)$를 갖고, 세 수 $1, \alpha, \beta$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, n의 값은? [3점]

① 5　　② 8　　③ 11　　④ 14　　⑤ 17

풀이 I)

$\alpha+\beta = n$
$\alpha\beta = 4(n-4)$ 이면 $x = 4$ or $n-4$

$\alpha<\beta$ 이면 공차 > 0, 공차는 자연수

$n-4 > 1$

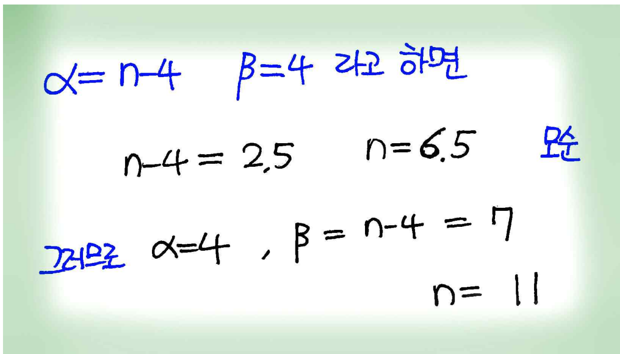
인수분해 vs 근과 계수의 관계

이차방정식의 계수에 문자가 포함되었을 때, 직접 인수분해를 해야 할 때도 있고, 근과 계수와의 관계를 써야할 때도 있는데, 이 문제는 직접 인수분해를 하는 문제입니다. 일차항과 상수항이 각각 무엇과 무엇의 합이면서 무엇과 무엇의 곱인지가 한 번에 보여야합니다. 초등과정의 구구단과 중등과정의 간단한 인수분해는 실전에서 치밀한 논리보다 암기, 감각에 의존해야하는 몇 안 되는 파트입니다.

조건 재해석

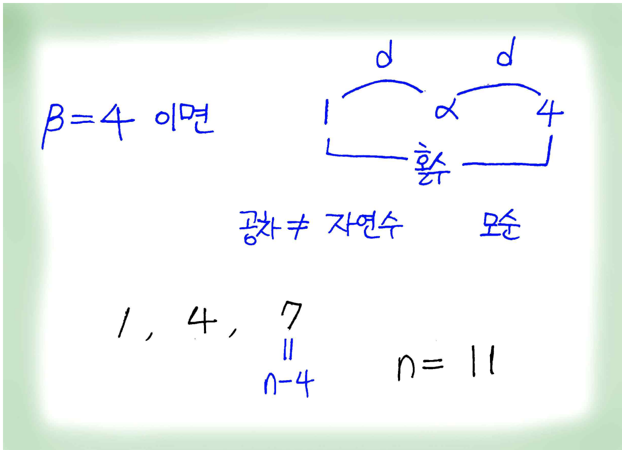
쉬운 문제 치고 조건이 특이하게 생겨납니다.
문제 어디에도 공차에 대한 조건, n의 범위가 명시적으로 적혀있지 않지만, α와 β의 대소관계와 이차식에 포함되어있는 n의 자연수 조건이 어우러져 공차가 자연수임과 n이 4보다 크다는 사실이 필연적으로 밝혀집니다. 사실 α와 β의 대소관계가 주어지지 않더라도 1과 4의 순서 때문에 1, α, β 가 순서대로 등차수열이라는 사실로 같은 결과를 얻을 수 있습니다.

풀이Ⅱ-1)



첫 번째 풀이는 두 케이스 모두 직접 대입을 하는 풀이입니다.
모순 케이스는 n이 자연수가 되지 않아서 모순입니다.

풀이Ⅱ-2)



두 번째 풀이에서는 정수와 홀수, 짝수를 이용한 가벼운 논리로 모순 케이스를 걸러냈습니다.
첫 번째 풀이와 사실 차이는 없지만 수를 직접 대입하지 않았다는 점이 다릅니다.

2020. 06. 15번

15. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3 & (x<0)\\ -2x+2 & (x\geq 0)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}2x & (x<a)\\ 2x-1 & (x\geq a)\end{cases}$$

가 있다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

사고과정 및 풀이)

1) (두 함수의 합성이 아니고) 두 함수의 곱이 연속이 되도록 하는 a

2) 연속이 되는 경우는 두 가지 상황이 있는데
하나는 모든 불연속 후보에 0이 곱해져 강제로 연속이 되는 상황 (Case 1)
다른 하나는 강제로 연속이 되지는 않지만 곱한 값들이 우연히 모두 같아서 연속이 되는 상황 (Case 2)

3) f와 g는 모두 불연속점이 1개이고 둘 다 좌극한$\neq$함숫값$=$우극한 이므로
<Case 2>를 만족하는 상황은 $a=0$일 때이고, 결과적으로 상수항끼리 곱한 값의 상등을 확인하면 된다.

4) $3\times 0\neq 2\times(-1)$ 이므로 <Case 2>의 경우는 불가능. 불연속 후보는 a와 0 2개

5) f와 g는 구간에 따라 식이 다른 불연속함수이고, 두 함수 모두 불연속점 양쪽으로 '기울기가 같고 만나지 않는 일차함수'가 있다. 즉, a가 어떤 값이든 $g(x)$ 단독으로 연속이 될 수 없고 불연속점도 1개밖에 될 수 없다.

6) f의 x절편 $=a$ AND g의 x절편 $=0$ 이 아니면 $f(x)g(x)$는 연속이 될 수 없다.

7) $a=1$ 이고, $g(x)$의 x절편은 0으로 1개뿐이므로 조건에 부합한다.

WARNING)
3) ~ 4) 는 될 수도 있으나 결과적으로 안 되는 상황을 걸러내는 과정입니다.
이 부분을 스킵하지 않아야 올바르게 푼 것입니다.

평가원의 배려)
5)에서 두 함수가 모두 불연속점 양쪽으로 기울기가 같고 만나지 않는 일차함수가 있다는 것을 관찰하는 것이 중요합니다. g가 단독으로 스스로 연속이 되는 상황을 배제하도록 설정한 평가원의 배려입니다. 두 함수의 차이점은 f는 치역이 실수 전체 집합이 아니고, g는 일대일 대응이 아니라는 것입니다. 두 함수 모두 등호가 오른쪽에 포함된 것도 문제가 어렵지 않도록 하는 요소입니다.

g는 식이 고정되어있고, 경계점이 가변적입니다.
현장에서 시험지에 $y=2x$, $y=2x-1$을 실수 전체 범위에서 희미하게 그려놓고 푸는 것이 좋습니다.

2020. 06. 18

18. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & (x<0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g(x)$의 최솟값이 $\dfrac{1}{2}$보다 작을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

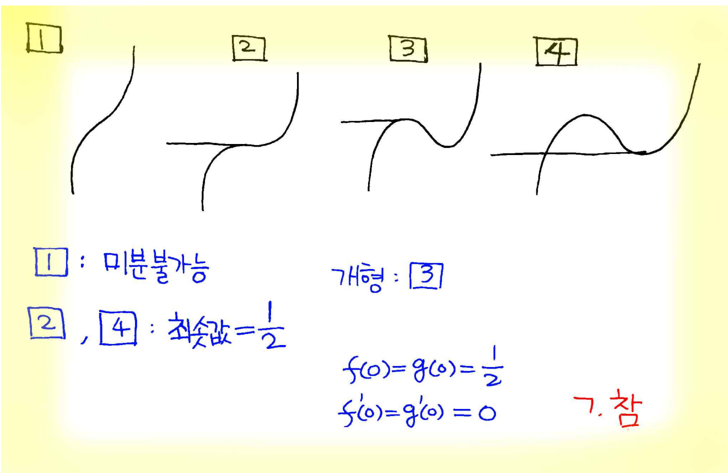
ㄱ. $g(0)+g'(0)=\dfrac{1}{2}$

ㄴ. $g(1)<\dfrac{3}{2}$

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0일 때, $g(2)=\dfrac{5}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이 Ⅰ) <개형 분류, ㄱ>



직접 그림을 그려가며 개형을 분류하여 정하는 것이 최선입니다.
ㄱ은 어떤 개형인지와 별개로 미분가능성으로 진위판별을 해야합니다.

풀이 Ⅱ- 1) <일반형 풀이>

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ $\qquad c=\frac{1}{2}\quad b=0$

$f'(x)=x(3x+2a)$

$x=-\frac{2}{3}a$ 에서 극소, $a<0$

$g(1)=f(1)=1+\frac{1}{2}+a<\frac{3}{2}$ $\qquad$ ㄴ: 참

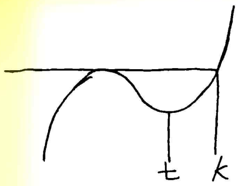
최솟값 $=f(-\frac{2}{3}a)=-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+\frac{1}{2}=0$

$\frac{4}{27}a^3=-\frac{1}{2}\qquad a=-\frac{3}{2}$

$g(2)=8-\frac{3}{2}\times4+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ $\qquad$ ㄷ: 참

다항함수 문제에서 일반형 풀이는 표준형 풀이에 비해 대체로 풀이가 길고 너저분합니다. 이 문제는 최고차항 계수가 정해져있고, 일차항 계수가 0이기 때문에 미정계수가 하나밖에 남지 않아서 일반형 풀이 치고 그 길이가 짧은 것 뿐입니다.

풀이 Ⅱ- 2) <표준형 풀이>



$f(x)=x^2(x-k)+\frac{1}{2}$

$f'(t)=0,\quad t>0$

$f'(x)=3x^2-2kx$

$t=\frac{2}{3}k$

$g(1)=f(1)=1-k+\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$ $\qquad$ ㄴ: 참

최솟값 $=f(t)=\frac{4}{9}k^2(-\frac{1}{3}k)+\frac{1}{2}=0$

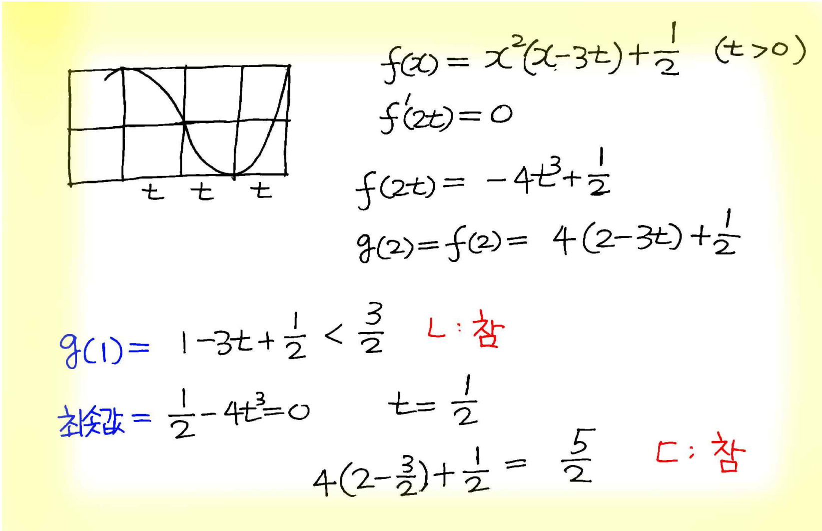
$k=\frac{3}{2}$

$g(2)=f(2)=4(2-\frac{3}{2})+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

ㄷ: 참

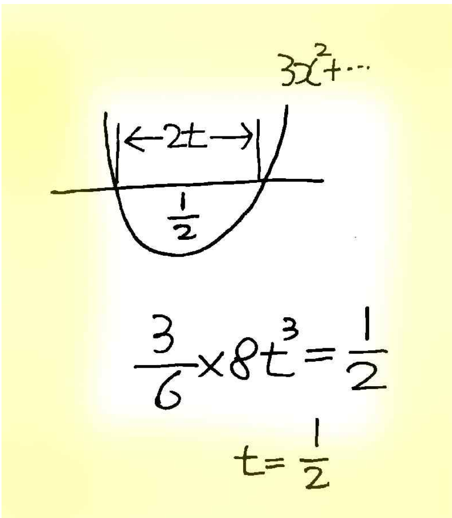
표준형은 인수정리와 평행이동으로 식을 나타낸 것이기 때문에 수식에서 그래프의 형태가 시각적으로 반영이 잘 됩니다.

풀이 Ⅱ- 3) <비율 관계 풀이>



이차함수 넓이공식의 삼차함수에서의 적용

원함수 그래프와 도함수 그래프의 관계를 근거로 당연하게 얻을 수 있는 결과입니다.
아래의 그림은 비율관계 풀이를 알 때 **풀이 Ⅱ- 3)**의 t를 구하는 방법입니다.



2020. 06. 20

20. 다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

> $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}=4$인 자연수 n이 존재한다.

① 12　② 13　③ 14　④ 15　⑤ 16

풀이 Ⅰ)

$g(x)=4x^3-3x^2$ 라고 하자

$f(x)$의 최저차항은 $4x^n$ 이고

최고차항은　$g(x)$의 영향을 받지 않으면 $6x^{n+1}$

$n+1\geq 4$　　$n\geq 3$

$n\geq 3$ 인 모든 n에 대하여　$f(x)=6x^{n+1}+4x^n$

$f(1)=10$

극한의 결과가 $g(x)$의 영향을 받는지 안 받는지가 굉장히 중요합니다. 이런 문제는 $n=1,2,3,4$ 따로따로 생각하기보다 영향을 받을 때와 받지 않을 때 이렇게 두 가지로 먼저 나눈 다음에 개별적으로 세분화하여 생각하는 것이 좋습니다.

WARNING)

f의 최저차항 차수가 n 이고, $f-g$의 최고차항 차수가 $n+1$이라고 해서
$f(x)=ax^{n+1}+bx^n$ 으로 식을 세우고 시작하면 안 됩니다.
항이 2개가 아닐 때도 가능성을 열어 둬야하기 때문에 특정 미정계수를 직접 부여하기 부적합합니다.

풀이 Ⅱ)

g(x)의 영향을 받는다면

$n+1 = 3 \text{ or } 2$

$n = 2 \text{ or } 1$

2차 이하 상쇄

n=2 일 때

$f(x) = g(x) + 6x^3 + \boxed{} + 4x^2$

$= 10x^3 + 4x^2$ $\quad f(1) = 14$

1차 이하 상쇄

n=1 일 때

$f(x) = g(x) + 6x^2 + \boxed{} + 4x$

$= 4x^3 + 3x^2 + 4x$ $\quad f(1) = 11$

$f(1) = 10 \text{ or } 11 \text{ or } 14$ $\quad$ 최대 : 14

WARNING)

$f(1)$의 최댓값을 구하는 문제지만, 같은 조건으로 $f(1)$이 될 수 있는 값들의 합도 물어볼 수도 있고, $\sum_{n=1}^{10} f_n(1)$ 의 값이 정답이 될 수도 있었습니다. n이 얼마일 때 $f(1)$이 몇인지 정확하게 다 구해야만 옳게 푼 것입니다.

정말 당연한 것이지만, 문제를 읽자마자 $f(1)$이 상수항을 포함한 모든 항의 계수라고도 받아들여야합니다.

※ 다항함수 $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ 에 대하여

$f(1) = \sum_{k=0}^{n} a_n$ $\qquad$ $f'(1) = \sum_{k=0}^{n} k a_k$

2020. 06. 24

24. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2, \ \frac{a_5}{a_3} = 9$$

일 때, $\sum_{k=1}^{4} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

풀이 1)

$r^2 = 9 \quad r = 3 \ (\because r > 0)$

$2(1+3+9+27)$

$= 2(10+30) = 80$

풀이 2)

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = \boxed{a_1 + a_2} \xrightarrow{\times r^2} \boxed{a_3 + a_4}$$

$r^2 = 9 \quad r = 3 \ (\because r > 0)$

$(2+6) \times (1+9) = 80$

굉장히 쉬운 예제 수준의 문제라서 둘 중 어떠한 풀이로 풀어도 빠르게 풀리지만, 두 번째 풀이가 첫 번째 풀이에 비해 발상이 어렵다고 생각되면 안 됩니다. 평가원은 등차수열과 등비수열을 묶어서 계산해야만 풀리거나, 묶어서 계산해야 풀이속도가 비약적으로 빨라지는 문제를 10년 가까이 출제해왔기 때문에 묶어서 풀어내는 풀이는 문제를 보자마자 반드시 할 수 있어야합니다.

2020. 06. 28

28. 첫째항이 2이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, a_m의 값을 구하시오. [4점]

(가) $4 < a_2 + a_3 \le 12$
(나) $\sum_{k=1}^{m} a_k = 122$

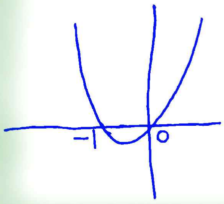
풀이 I)

$2 < r(1+r) \le 6$

$r = r_0$ 이라면

$r_0 + r_1 = -1$ 이 되도록하는 r_1도

$r = r_1$



1×2

2×3

3×4

$r = 2$ or -3

교과서적인 정석 풀이대로라면 이차부등식을 두 번 풀겠지만, r에 대한 이차함수로 받아들이면 직관적으로 빠르게 범위를 구할 수 있습니다. 이차함수의 대칭성 또는 근과 계수의 관계를 이용하면 r을 둘 중 하나만 구하고 다른 하나를 자동으로 얻게 됩니다.

풀이 II - 1)

i) $r=2$ 일 때

$\{a_n\} = 2, 4, 8, 16, \cdots$

$S_m = 2^{m+1} - 2$ 가 되어야한다.

그런데 $122+2$ 인 124는 $2^{\text{정수}}$가 아니므로 불가능

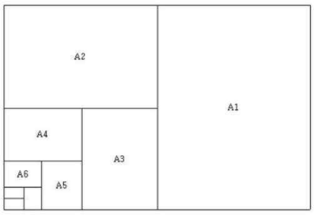
ii) $r=-3$ 일 때

$$S_m = \frac{2(1-(-3)^m)}{1+3} = 122$$

$1-(-3)^m = 244 \qquad (-3)^m = -243$

$m = 5$

$a_5 = 2\times(-3)^4 = 162$



<참고 배경지식>

공비가 2 또는 $\frac{1}{2}$인 등비수열 연속된 항들의 합은

 '가장 큰 항의 두 배에서 가장 작은 항을 뺀 것'

이 사실은 상식처럼 알아두면 편합니다. 용지 사이즈 규격 그림을 보면 직관적으로 이해할 수 있는 사실입니다.

풀이Ⅱ-2, 3)

$1+r+r^2+\cdots+r^{m-1} = 61$ 이므로

$1-r^m = 61(1+3) = 244$

$(-3)^m = -243 \quad m=5$

$a_5 = 162$

a_n을 나열하면

$2 \quad -6 \quad 18 \quad -54 \quad \underline{162} \mid -486 \quad \cdots$

162

$r = -3$ 일 때 계산법 세 가지가 있습니다.

첫 번째는 등비수열의 합 공식에 그대로 대입.
두 번째는 양변에 $(1-r)$을 곱하여 곱셈공식으로 계산.
사실 등비수열 합 공식이 곱셈공식으로부터 유도 된 것이기 때문에 **풀이Ⅱ-1)** 과 **풀이Ⅱ-2)** 는 같은 풀이입니다.

세 번째 풀이는 각 항들을 일일이 대입하여 구한 것인데, 등비수열은 r이 1보다 크면 그 크기가 기하급수적으로 증가합니다. 또한, 공비가 음수일 때 부호가 교대로 반전됩니다.

공비가 -3 이기 때문에 숫자를 조금만 나열하다보면 합이 122가 되기 위해서는 마지막 항이 -54도 아니고 -486도 아닌 162라는 것을 직관적으로 알 수 있습니다. 자신의 숫자 감각을 못 믿겠으면 권장하는 풀이는 아니고, 어디까지나 공비의 크기가 1보다 눈에 띄게 크기 때문에 가능한 편법입니다.

<알아두면 편한 거듭제곱들>

2의 거듭제곱
2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024 (2048 4096 8192)

3의 거듭제곱
3 9 27 81 243 729

4의 거듭제곱 : 2의 거듭제곱 짝수번째

5의 거듭제곱
5 25 125 625

6의 거듭제곱 : 6 36 216

7의 거듭제곱 : 7 49 343

8의 거듭제곱 : 2의 거듭제곱 3번째, 6번째, 9번째 ...

9의 거듭제곱 : 3의 거듭제곱 짝수번째

2020. 06. 30 (N)

30. 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

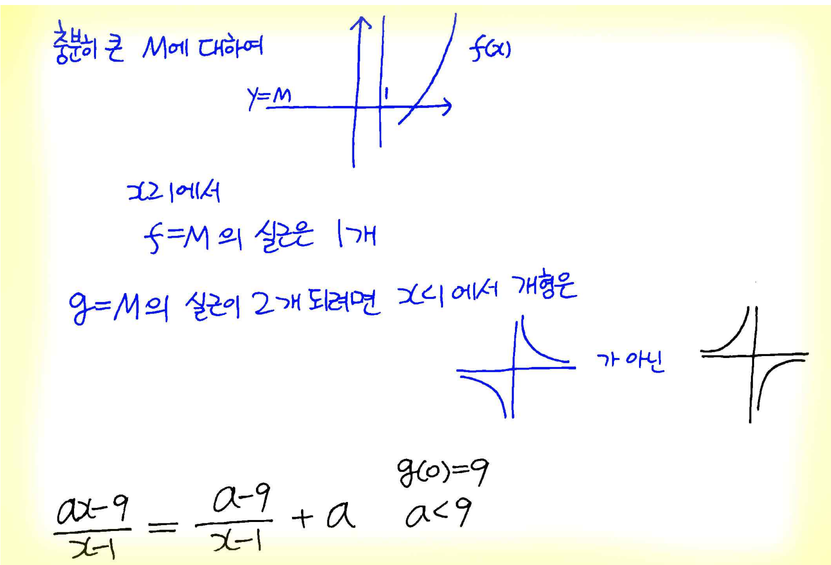
> 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가
> 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 t의
> 값의 집합은 $\{t \mid t=-1$ 또는 $t \geq 3\}$이다.

$(g \circ g)(-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

이 문제는 풀이가 두 part 로 나뉩니다. [part 1] 은 풀이가 한 가지이고 [part 2]는 풀이가 여러 가지로 나뉩니다. [part 2]로 넘어가기 전에 [part 1]에서 얻은 결과들을 먼저 정리하도록 합니다.

[Part 1]

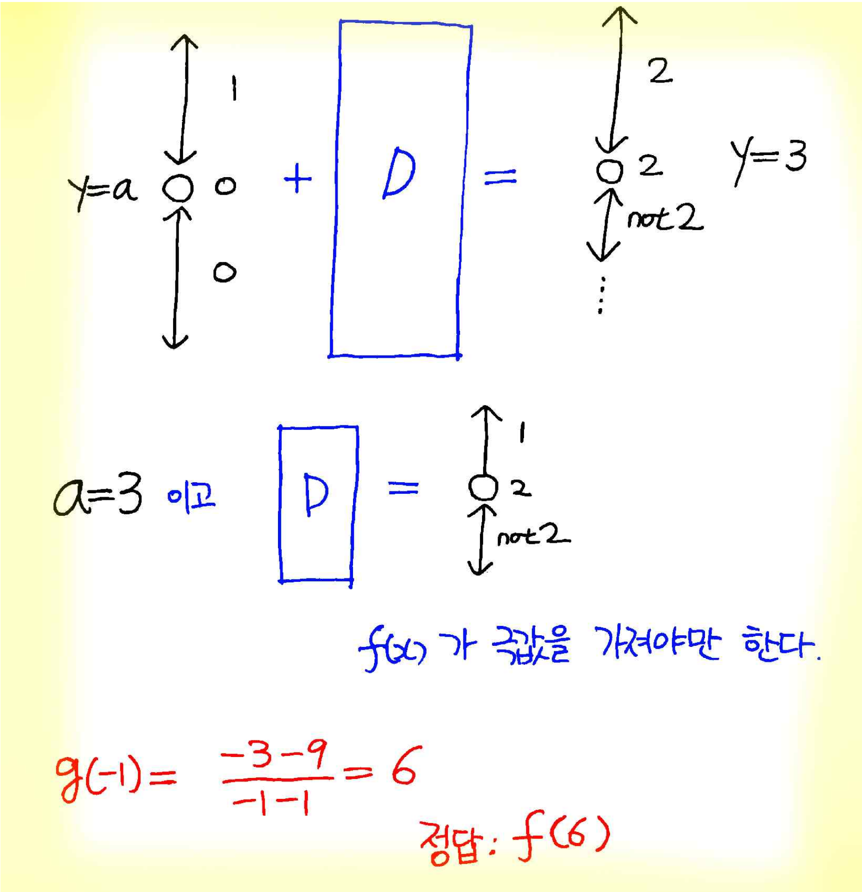
풀이 Ⅰ)



<분수 함수 개형 파악 사고 과정>

함수가 구간에 따라 다른 함수인데
아주 고맙게도, 분수함수의 점근선과 구간 경계가 일치한다.
분수함수가 애매하게 끊길 일 없이 쌍곡선 중 하나의 곡선만 온전하게 남아있다.
곡선의 방향을 먼저 정해야 한다. 그러므로 일반형인 식을 표준형으로 고치자.
3차함수의 최고차항계수 부호 때문에 분수함수의 방향이 결정된다.

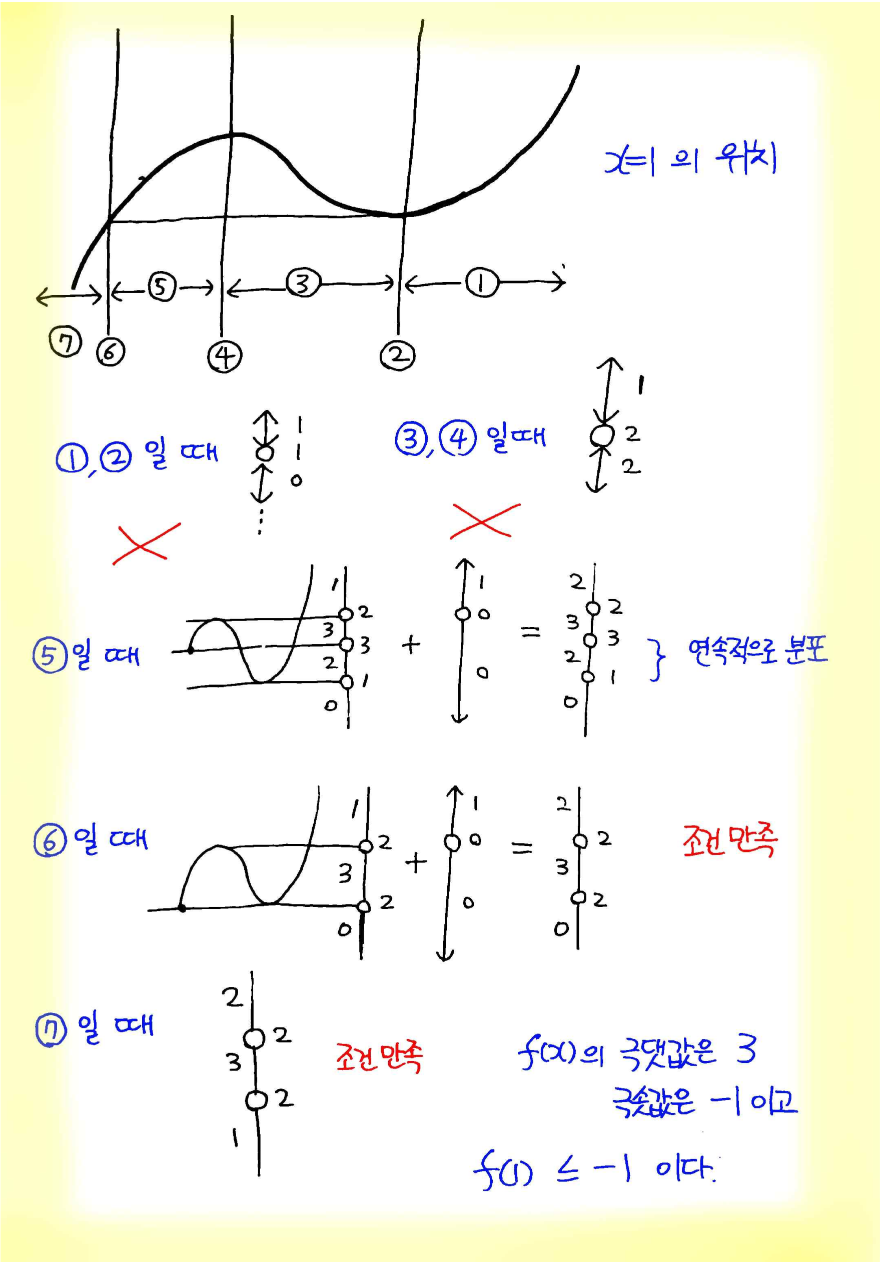
풀이 Ⅱ)



<삼차함수 개형 파악 사고 과정 1>

먼저 삼차함수가 극값을 가지는지를 판단하자.
극값을 가지지 않으면 조건의 $t \geq 3$ 에서 등호가 포함되지 않는다.
그러므로 $f(x)$는 삼차함수를 실수 전체 범위로 확장시켰을 때 $x \geq 1$ 에서 극값을 가져야한다.

풀이 Ⅲ)



<삼차함수 개형 파악 사고 과정 2>

구간의 경계가 삼차함수의 어떤 부분에서 끊기는지에 따라 케이스가 너무 많이 나뉜다. 여기서 시간이 오래 걸릴 것이다.

1~4 는 D의 윗부분이 다르다.
5~7 은 D의 윗부분이 같지만 5는 실근의 개수가 2개인 t가 연속적으로 분포하므로 불가능하다. 가능한 것은 6과 7이다.

WARNING)

[Part 1] 의 가장 올바른 풀이는 이렇게 케이스를 무수히 많이 나누어 엄밀하게 푸는 것입니다. 현장에서 이 문제를 매우 빨리 풀었다는 후기가 많은데, ①~④ 가 안될 것 같은 것이 직관적으로 보였다면 엄밀하지는 않지만 짧은 시간 내에 최선을 다한 풀이라고 할 수 있습니다. 하지만 ⑦이 될 수 있다는 가능성을 남겨두지 않고 ⑥으로 케이스를 단정하면 결과가 어떻든 간에 논리적으로 비약이 심한 풀이입니다.

사실 더 엄밀하게 푼다면 분수함수의 점근선 $y=a$ 가 $y=3$ 이 아닌 $a\neq-1$, $a\neq3$ 일 때와 $a=-1$일 때도 확인을 해봐야합니다. 또는 ①부터 ⑦까지 개형을 전부 그린 다음에 분수함수를 y축 방향으로 움직여서 안되는 것들을 전부 걸러내야합니다. 시간은 오래 걸리겠지만 어떤 방법이든 ⑥과 ⑦만 가능하다는 것을 알게 될 것입니다.

너무 엄밀하게 푸는 것이 시험 현장에서 적절하지 않다 하더라도, 시간이 많을 때 이를 시도할 수 있는 케이스 분류 능력, 피지컬은 가져야 안전합니다.

[Part 1] 에서 얻은 결론

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

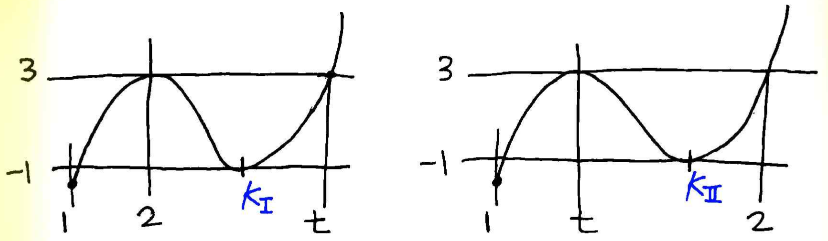
최고차항 계수는 1이다.
$f(2)=3$ 이다.
$f(x)$는 극댓값이 3이고 극솟값이 -1이다.
$f(1)\leq-1$ 이다.

$f(6)$의 값을 구하시오.

풀이가 긴 문제는 이렇게 문제를 재해석하는 것이 이런저런 면에서 좋습니다.

[Part 2]

$f(3)=2$ 이므로 개형은



Ⅰ or Ⅱ

$(x-2)^2(x-t)+3$ $\qquad$ $(x-t)^2(x-2)+3$

$f(2)$가 극댓값과 같다. 식을 표준형으로 쓰기 아주 좋은 조건이다.
하지만 $f(2)$가 극댓값과 같을 뿐이지 $f(2)$가 극댓값이 아닐 수도 있다.
그러니까 케이스를 나눠야한다.

<모순 케이스 걸러내는 방법>

Ⅱ 가 안되는 이유 ①

$k_{\mathrm{II}}=\dfrac{4+t}{3}$ 이므로 $f\left(\dfrac{4+t}{3}\right)=\left(\dfrac{4-2t}{3}\right)^2\left(\dfrac{t-2}{3}\right)+3=-1$

$$\frac{4}{27}(t-2)^3=-4$$

$$(t-2)^3=-27 \qquad t-2=-3$$

$$t=-1$$

$1<t<2$ 에 모순

Ⅱ가 안되는 이유 ②

$$f(1)=-(1-t)^2+3\le -1$$

$$(1-t)^2\ge 4$$

$$|t-1|\ge 2$$

$1<t<2$ 이면 t는 1로부터 2만큼 이상 멀리 떨어질 수 없다.

Ⅱ가 안되는 이유 ③

$\Rightarrow$ 초고속 풀이에 설명

여기에서 극값의 x좌표는 비율관계를 알고 있다는 가정 하에 썼습니다.
비율관계를 알고 내분점을 올바르게 이해했다면 x좌표를 한 번에 구할 수 있습니다.
비율관계를 모른다면 직접 미분해서 구하면 됩니다.

분수식을 대입하면 굉장히 복잡해보이지만, $(t-2)$로 묶을 수 있습니다. 당황해서 안 보인다고 손이 먼저 나가서 전개하면 안 됩니다. 적어도 이 정도는 볼 수 있어야합니다.

I 에서

$f(1) = 1-t+3 \le -1$

$t \ge 5$

$k_{\mathrm{I}} = \frac{2+2t}{3} \quad f\left(\frac{2+2t}{3}\right) = \left(\frac{2t-4}{3}\right)^2\left(\frac{2-t}{3}\right)+3 = -1$

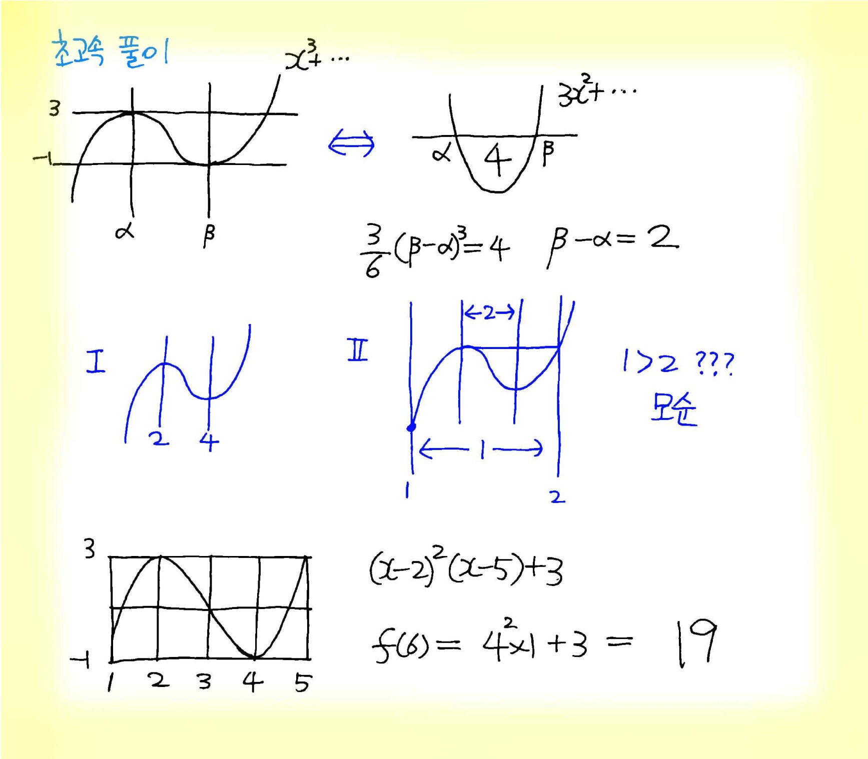
$\frac{4}{27}(2-t)^3 = -4 \quad 2-t = -3$

$t=5$

$f(6) = 4^2 \times 1 + 3 = 19$

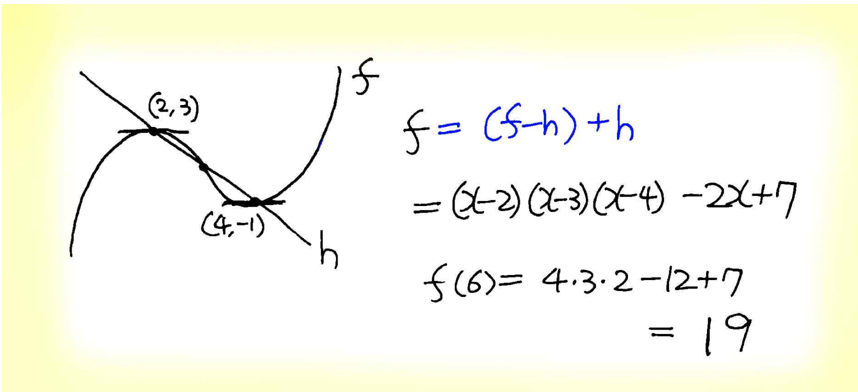
$t=5$ 일 때, $f(1) = -1$ 일 때가 정답입니다.
주관식이기 때문에 어느 정도 예상할 수 있는 결과이지만
[part 1]에서 말했듯이 모든 가능성을 열어두고 이렇게 정확하게 검증해야 올바르게 풀었다고 할 수 있습니다.

초고속 풀이 1)



비율관계와 이차함수 넓이 공식을 모두 사용하면
케이스도 금방 나누고 매우 적은 양의 계산으로 답을 바로 구할 수 있습니다.

초고속 풀이 2)



이차함수 넓이 공식과 빼기 함수를 사용하고 비율관계를 사용하지 않은 풀이입니다.
이차함수 넓이 공식으로 모순 케이스를 걸러내어 극점의 x좌표를 구하고
삼차함수와 일차함수의 합으로 분리하여 $f(x)$의 온전한 식을 구했습니다.

적분을 사용한 별해)

$$f'(x) = 3(x-2)(x-4)$$
$$= 3x^2 - 18x + 24$$
$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + C$$
$$f(6) = 6^2(-3) + 6^2 \cdot 4 + C$$
$$f(2) = 4(2-9+12) + C = 3$$
$$36 - 20 = f(6) - 3 \qquad f(6) = 19$$

이차함수 넓이 공식으로 케이스를 걸러내어 극점의 x좌표를 구하면 $f'(x)$를
온전하게 얻을 수 있습니다. $f(2)=3$임을 알고 있기 때문에 남은 풀이과정은
부정적분 교과서 예제와 같아집니다.

일반적으로 부정적분을 풀 때 적분상수를 직접 구하지만
여기서는 직접 구하지 않고 바로 소거하였습니다.

소거할 때에는 C 를 좌변과 우변 중 같은 쪽에 놓고 두 식을 빼도 되지만
C 를 좌변과 우변 서로 다른 쪽에 놓고 두 식을 더해도 소거됩니다.

내분점과 외분점

수능 간접범위로서 내분점과 외분점을 배울 때, 대부분은 $\dfrac{mx_1+nx_2}{m+n}$, $\dfrac{mx_1-nx_2}{m-n}$ 와 같은 공식만 외우고 넘어가는 경우가 많습니다. 내분외분 이론을 행렬, 벡터 등등 다른 연산체계에서 다룰 때에는 수식으로 표현을 해야할 때가 있지만, 인문계열 수험생의 교과과정 내에서 다루는 수직선이나 좌표평면에서의 내분외분에서는 직관적인 연산이 더 빠른 경우가 더 많습니다.

$\mathrm{A}(16)$과 $\mathrm{B}(65)$를 $3:4$로 내분하는 점 $\mathrm{X}(x)$의 위치를 구하시오.

$sol1)$

공식에 대입하면 $\dfrac{3\times65+4\times16}{3+4}=\dfrac{195+64}{7}=\dfrac{14^2+7\times9}{7}=28+9=37$

$sol2)$

16에 49를 더하면 65. 49을 $3:4$로 쪼개면 21과 28 이므로 $16+21=37$

두 번째 풀이가 더 직관적이고, 있는 그대로의 의미가 시각적으로 와닿는 풀이입니다.
만약 두 수의 간격이 약수배수 관계가 아닐 경우는 어떻게 할까요?

$\mathrm{A}(-3)$과 $\mathrm{B}(5)$를 $5:4$로 내분하는 점 $\mathrm{X}(x)$의 위치를 구하시오.

$sol)$

5와 -3의 차이는 8이고 $5+4=9$이므로 최소공배수는 72이다.

$-3=\dfrac{-27}{9}$, $5=\dfrac{45}{9}$ 72를 $5:4$로 쪼개면 40과 32 $\dfrac{45-32}{9}=\dfrac{13}{9}$

물론 이 계산은 그냥 공식에 대입하는 것이 더 빠릅니다.

내분과 외분은 방향성의 차이가 있습니다.
내분과 외분 모두 $m:n$과 $n:m$ 은 다른 의미와 결과를 가집니다.
수직선 위의 내외분 대상인 두 점 $\mathrm{A}(a)$와 $\mathrm{B}(b)$ $(a<b)$가 있을 때 영역은 A의 왼쪽영역(L), A와 B사이의 영역(M), B의 오른쪽 영역(R), 이렇게 세 가지 영역으로 분할할 수 있습니다.

내분점은 m과 n의 대소비교와 관계없이 M영역에만 위치합니다.
하지만 외분점은 m과 n의 상대적 크기에 따라 L영역 또는 R 영역 중 하나에 위치하게 됩니다.
M영역의 점은 m과 n의 대소비교에 의해 A와 B 어떤 것에 더 가까울지 결정이 됩니다.

반면 L영역의 점은 반드시 A와 더 가깝고, R영역의 점은 반드시 B와 더 가깝게 됩니다.

세 점 A, B, C 가 순서대로 수직선 위에 있습니다. $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} = m : n$ 입니다.
이를 다음과 같이 진술할 수 있습니다.

- B는 A와 C를 $m : n$으로 내분하는 점이다.
- A는 B와 C를 $m : (m+n)$으로 외분하는 점이다.
- C는 A와 B를 $(m+n) : n$으로 외분하는 점이다.

세 진술은 완전히 동등합니다. 세 점 중 하나를 미지수처럼 다루는 것이 아니라 상수처럼 다룰 수 있다면 동등한 다른 진술로 치환을 하여 해석해도 좋습니다.

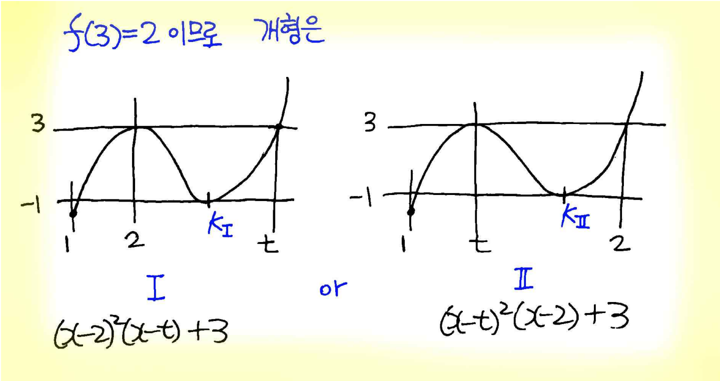
내분과 외분의 중첩

3과 8을 $2 : 3$으로 내분하면 5입니다.

3을 $3+0$으로, 8을 $0+8$로 분리해보겠습니다.

3	2.4	1.8	1.2	0.6	0
0	1.6	3.2	4.8	6.4	8
3	4	5	6	7	8

이렇게 두 개의 내분을 중첩한 것과 결과가 같아집니다.
내분과 외분의 중첩은 내외분 대상이 성격이 다를 때 쓰는 것이 좋습니다.
다시 30번 문제로 돌아가서 봅시다.



$\dfrac{mx_1+nx_2}{m+n}$ 이 공식의 형태가 아예 생각나지 않는다고 합시다. 그럼에도 내분의 직관적인 의미를 가지고 구할 수 있습니다. 둘 중 하나가 문자이고 다른 하나가 숫자이기 때문에 바로 구하기가 어렵다면 중첩을 이용하면 됩니다.

$\frac{6}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
0	$\frac{t}{3}$	$\frac{2t}{3}$	t
		$\frac{2t+2}{3}$	

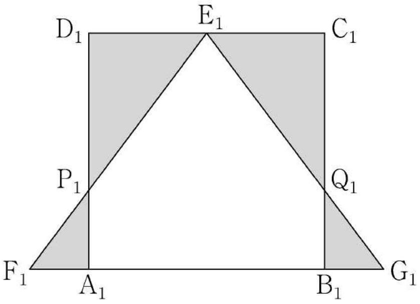
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{3}$
t	$\frac{2t}{3}$	$\frac{t}{3}$	0
		$\frac{4+t}{3}$	

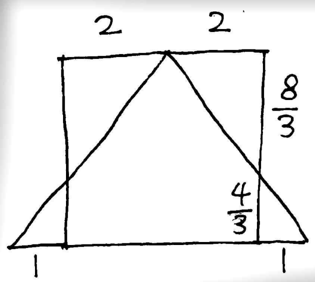
2020. 06. 17번 (보너스)

오른쪽 그림에서 다음이 알려져 있다.

사각형 $A_1B_1C_1D_1$은 한 변의 길이가 4인 정사각형
점 E_1은 선분 C_1D_1의 중점
$\overline{F_1G_1} = 6$, $\overline{E_1F_1} = \overline{E_1G_1}$

색칠 된 부분의 넓이를 구하시오.

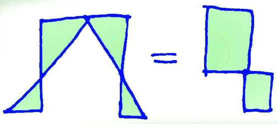




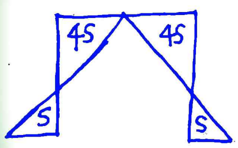
$\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$

$\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

$\frac{8}{3} + \frac{8}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$

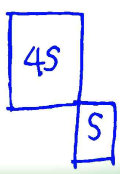


$2 \times \frac{8}{3} + 1 \times \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$



$S = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

$10S = \frac{20}{3}$



$S = \frac{4}{3} \times 1$

$5S = \frac{20}{3}$

위에서부터 **풀이 1), 2), 3), 4)** 라고 하겠습니다.

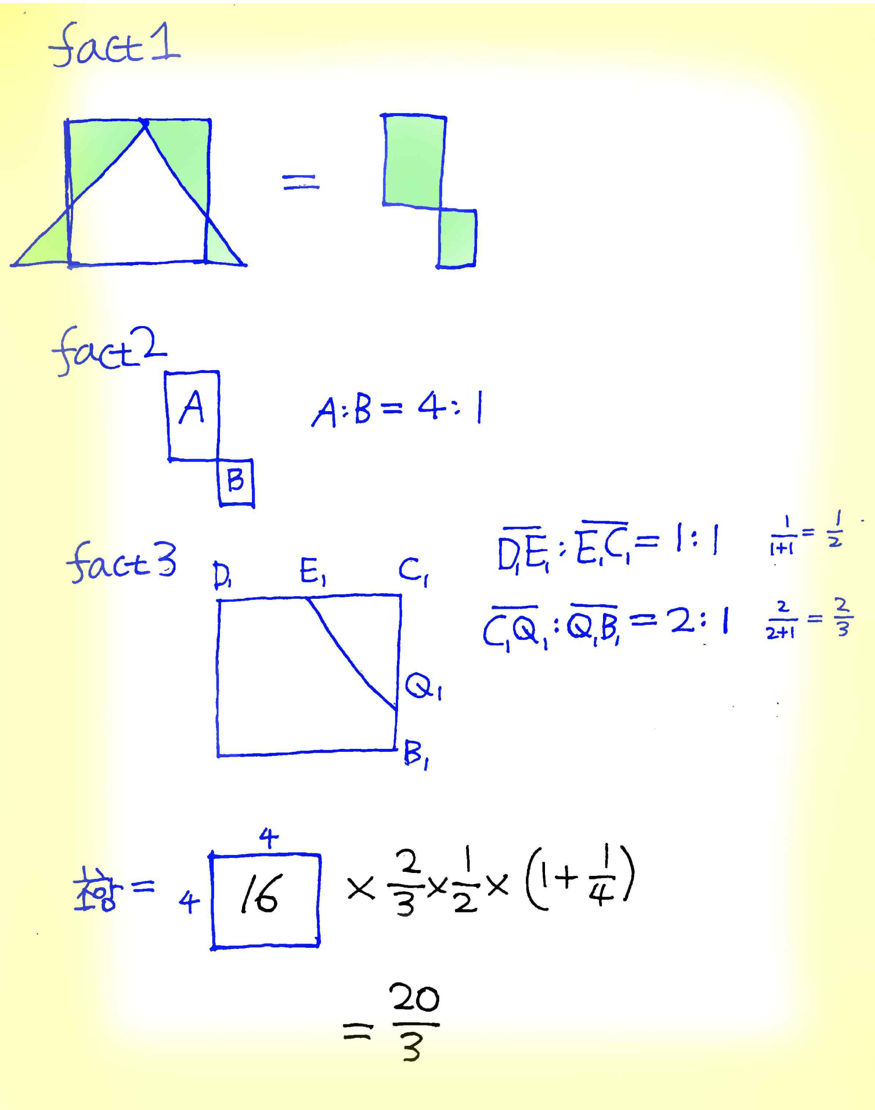
풀이1)
삼각형들의 밑변과 높이를 전부 다 구한 다음에 삼각형 넓이공식에 정직하게 대입하여
삼각형 4개의 넓이를 합했습니다.

풀이2)
서로 합동인 직각삼각형 두 개를 일찍이 합쳐 직사각형 두 개를 더하는 풀이입니다.
직사각형의 가로와 세로는 직접 구하여 대입했습니다.

풀이3)
S를 먼저 설정하고 삼각형들이 닮음이므로 닮음비를 먼저 안 다음에
S를 직접 구했습니다. S를 직접 구할 때에는 삼각형 넓이공식에 정직하게 대입하였습니다.

풀이4)
풀이2)와 풀이3)을 합친 것과 같습니다.
직각삼각형 4개를 직사각형 2개로 인식하고 대표문자 S를 설정한 다음에
작은 직사각형 넓이를 구하였습니다.

고인물 풀이)



풀이1)부터 풀이4) 까지는 선분들의 길이를 직접 구하는 과정이 포함되어있습니다.
고인물 풀이는 쪼개진 선분의 길이를 구하지 않고 모든 것들을 비율로 해석하여
덧셈이 아닌 곱셈만을 사용해서 연산하는 풀이입니다.

fact 1) 4개의 직각삼각형을 2개의 직사각형으로 받아들이자.
fact 2) 닮음비가 2:1 인 직사각형 넓이 비는 4:1
fact 3) 큰 직사각형의 가로 세로 길이는 정사각형 변에 적절한 상수를 곱한 것이다.

정사각형에서 $\frac{1}{3}$을 떼어내고 거기에서 또 절반을 잘라낸 것이 큰 직사각형.

큰 직사각형에다가 자기 자신의 $\frac{1}{4}$만큼을 더한다는 것은 자기 자신에다가

$\frac{5}{4}$를 곱하는 것과 같다.

이렇게 사고를 거치면 초항은 정사각형에 적절한 상수를 연쇄적으로 곱한 것이라고 할 수 있습니다.

2020. 06. 09

#매개수열 #시각화를하자

2020. 06. 13

#숨겨진조건 #논리로풀기

2020. 06. 15

#논리적으로빈틈없는풀이흐름

2020. 06. 18

#여러가지풀이비교 #표준형선호 #비율관계 #넓이공식

2020. 06. 20

#의미있게케이스나누기

2020. 06. 24

#등차등비묶어서보기

2020. 06. 28

#대수와그림혼용 #여러가지계산법

2020. 06. 30

#엄밀한판단 #모순걸러내기 #비율관계 #넓이공식 #빼기함수
#적분상수소거법 #내분과외분의올바른이해

2020. 06. 17(BONUS)

#도형을가지고노는법 #곱셈이더편하다