2021학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 변형 문제지

수학 영역
(가 형)

성명	

수험번호						-				

○ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하시오.

파멸하는 자는 자신의 최후를 알고 있다.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 정답에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점, 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

○ 용이 나는 개천을 만들고 있습니다.

우 주 설 모 의 평 가

제 2 교시

수학 영역(가 형)

5지선다형

1. $\sqrt[3]{2}\times 4^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점] $= 8^{\frac{1}{3}}$

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3n}{\cancel{3n-\sqrt{9n^2}}+12n}$ 의 값은? [2점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

3. 첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_5 = a_3 + 12$$

일 때, a_4의 값은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$r^4 = r^2 + 12$

$\Rightarrow r^2 = 4$, $r = 2$ $\therefore a_4 = 8$

4. 6개의 문자 a, a, b, b, c, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 30 ② 45 ③ 60 ④ 75 ⑤ 90

$\frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$

5. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2a_n^2+n^4}{a_n^2+n^2}$의 값은? [3점]

$\frac{0+2+1}{1+0}$

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

6. 두 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2, \log_2 a)$, $(3, \log_4 b)$를 지나는 직선이 원점을 지날 때, $\log_a b$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

$\frac{\log_2 a}{2} = \frac{\log_4 b}{3} = \frac{\log_2 b}{6} \rightarrow a^3 = b$

$\therefore \log_a b = 3$

7. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}+3}$$

에 대하여 함수 $f(x)$의 치역의 집합을 A라 할 때, 집합 A의 원소의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$-3<x<3 \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{3}$

$x=3 \quad f(x)=-\frac{1}{4}$

$x=-3 \quad f(x)=-\frac{1}{2}$

* 이외의 범위 $\Rightarrow \frac{x}{3}>\frac{x}{4}$ 이므로... $f(x)=0$

4

8. 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=e^{2x}\cos x$는 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖고, $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다. $\cos(\alpha+\beta)$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

$f'(x)=e^{2x}\cdot(2\cos x-\sin x)$

$\rightarrow \tan\alpha=\tan\beta=2 \rightarrow \beta=\pi+\alpha$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\cos(\pi+2\alpha)=-(2\cos^2\alpha-1)$
$=\frac{3}{5}$

9. 함수

$$f(x)=\log_2(x^2-2x+3)$$

가 닫힌구간 $[-k, k]$에서 최댓값 5, 최솟값 m을 갖는다. $k+m$의 값은? [3점]

① $\sqrt{30}-2$ ② $\sqrt{30}-1$ ③ $\sqrt{30}$
④ $\sqrt{30}+1$ ⑤ $\sqrt{30}+2$

$f(x)=\log_2\{(x-1)^2+2\}$ ⇒ $x=1$ 대칭이므로,
$x=-k$ 최대.
$x=1$ 최소

$m=\log_2 2=1$
$5=\log_2\{(k+1)^2+2\}$ ⇒ $k=\sqrt{30}-1$

$\therefore k+m=\sqrt{30}$

10. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x^2-x)f(x)=\sin(n\pi x)$$

를 만족시킬 때, $f(0)+f(1)=0$을 만족시키는 9이하의 자연수 n의 개수는? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$f(x)=\frac{\sin(n\pi x)}{x(x-1)}$

by 연속
$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(n\pi x)}{x(x-1)}=-n\pi$
$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(n\pi x)}{x(x-1)}$ ⇒ 미분계수의 정의식
$= n\pi \times \cos(n\pi)$

$\therefore f(0)+f(1)=n\pi(\cos n\pi-1)=0$
⇒ $n=$짝수. $\therefore$ 4개

11. 실수 전체의 집합에서 각각 미분가능한 함수 $f(x), g(x)$에 대하여

$$f(x)g(x) = e^{2x}$$

이다. $\dfrac{f'(0)}{f(0)} = \dfrac{1}{2}$일 때, $\dfrac{g'(0)}{g(0)}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

양변에 take ln → $\ln f(x) + \ln g(x) = 2x$

$$\frac{f'(0)}{f(0)} + \frac{g'(0)}{g(0)} = 2$$

$\frac{f'(0)}{f(0)} = 1/2$

$\therefore \frac{3}{2}$

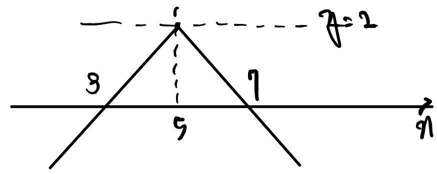
12. 자연수 n이 $2 \le n \le 11$일 때,

$2-|n-5|$

의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? [3점]

↳ '양수'의 '짝수' 제곱근 or '음수'의 '홀수' 제곱근.

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30



양수: $n=4\sim6$ 짝수: 4, 6

음수: $n=2, 7\sim11$ 홀수: 7, 9, 11

$\boxed{\therefore 30}$

13. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, $(a-3)(a-4)(b-5)=0$일 확률은? [3점]

① $\frac{13}{36}$ ② $\frac{7}{18}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{17}{36}$

사건 A: $a=3$ or $a=4$ or $b=5$

$\Rightarrow A^C \Rightarrow a\neq 3$ and $a \neq 4$ and $b \neq 5$.

$P(A^C) = 1 - P(A) = \frac{4}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{9}$ $\therefore P(A) = \frac{4}{9}$

14. $0 \le \theta < 2\pi$일 때, 모든 실수 x에 대하여

$\sin\theta$ 부호 나누기

$$(\sin\theta)x^2 - 2(\cos\theta)x + 3\sin\theta \ge 0$$

이 항상 성립하도록 하는 모든 θ의 값의 범위는 $\alpha \le \theta \le \beta$이다. $\alpha + 3\beta$의 값은? [4점]

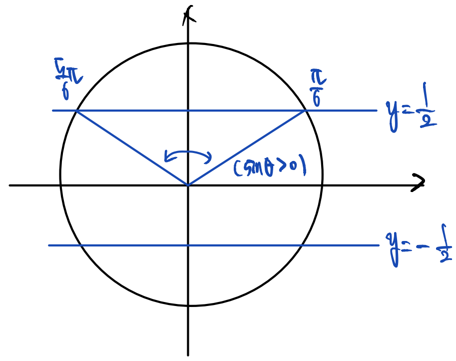
① $\frac{5}{3}\pi$ ② 2π ③ $\frac{7}{3}\pi$ ④ $\frac{8}{3}\pi$ ⑤ 3π

$\sin\theta \le 0 \longrightarrow$ 모든 x에 대해 성립 (X)

$\sin\theta > 0 \longrightarrow D \le 0$

$\rightarrow \frac{D}{4} = \cos^2\theta - 3\sin^2\theta = 1 - 4\sin^2\theta \le 0$

$\Rightarrow \sin\theta \ge \frac{1}{2}$ or $\sin\theta \le -\frac{1}{2}$



$\therefore \alpha + 3\beta = \frac{16}{6}\pi = \frac{8}{3}\pi$

15. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = -\frac{4}{3}, a_2 = -\frac{8}{3}$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n$

을 만족시킨다. 다음은 $\sum_{n=1}^{99} a_n$의 값을 구하는 과정이다.

> $\underline{a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n}$일 때, $\rightarrow -8a_n$
>
> $a_{n+3} = 2a_{n+2} - 4a_{n+1}$이므로, $a_{n+3} = \boxed{-8} \times a_n$이다.
>
> $a_{n+3} + a_{n+4} + \overset{b_{n+3}}{a_{n+5}} = \boxed{-8} \times (\overset{b_n}{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}})$에 대하여
>
> $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = b_n$이라 하면,
>
> $b_{\boxed{3n-2}}$은 공비가 $\boxed{-8}$인 등비수열 이므로, 일반항
>
> $b_{\boxed{3n-2}} = b_1 \times \left(\boxed{-8}\right)^{n-1}$을 얻는다.
>
> 따라서 $\sum_{n=1}^{99} a_n = \sum_{n=1}^{33} b_{\boxed{3n-2}}$ → $a_7 = -\frac{16}{3} + \frac{16}{3} = 0$
>
> → $b_1 = -4$
>
> $= \frac{-\left(2^{\boxed{101}} + 2^2\right)}{9}$
>
> 이다.
>
> $\frac{-4(1-(-8)^{33})}{1-(-8)} = \frac{-(2^{101}+2^2)}{9}$

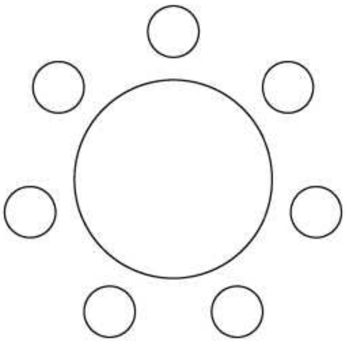
위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+q+f(6)$의 값은? [4점]

-8 101 16

① 105 ② 107 ③ 109 ④ 111 ⑤ 113

16. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

> (가) 1학년 학생끼리는 이웃하지 않는다. A
>
> (나) 2학년 학생끼리는 이웃하지 않는다. B



① 336 ② 360 ③ 384 ④ 408 ⑤ 432

$* \ n(A \cap B) = n(S) - n(A^c \cup B^c) \Rightarrow n(S) = (7-1)! = 720$

$n(A^c \cup B^c) = n(A^c) + n(B^c) - n(A^c \cap B^c)$

$= (6-1)! \times 2! + (6-1)! \times 2! - (5-1)! \times 2! \times 2!$

$= 240 + 240 - 96$

$\therefore n(A \cap B) = 720 - 240 - 240 + 96$

$= \underline{336}$

17. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수는? [4점]

> (가) 4보다 작은 숫자가 적힌 카드들은 카드에 적힌 숫자가 작은 것부터 나열한다.
> (나) 4보다 큰 숫자가 적힌 카드들은 카드에 적힌 숫자가 큰 것부터 나열한다.

위치고정 ↓ 같은 순.

① 120 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 140

1, 2, 3 ⇒ 0

5, 6, 7 ⇒ △

→ 0004△△△

$$\Rightarrow \frac{7!}{3!\,3!} = 140$$

18. 직선 $y=-x+2$가 두 함수 $y=a^x\ (a>1)$, $y=\log_2 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

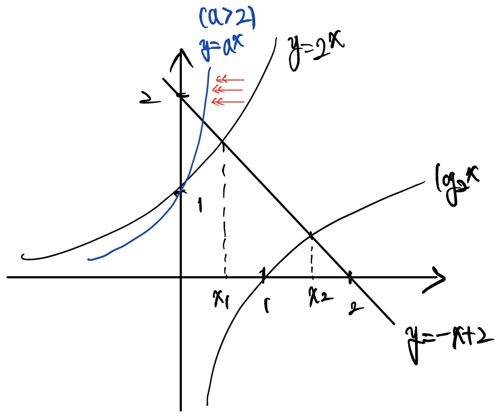
<보 기>

ㄱ. $a=2$일 때, $x_1=y_2$이다. by $y=x$ 대칭 $\begin{cases} x_1=y_2 \\ y_1=x_2 \end{cases}$

ㄴ. $a>2$이면, $x_1+x_2<2$이다.

ㄷ. $a>2$이면, $\dfrac{y_1}{x_2}>\dfrac{y_2}{x_1}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄴ. $a=2$이면 $x_1=y_2=2-x_2 \Rightarrow x_1+x_2=2$
$a>2$이면, $y=a^x$이 y축에 더 가까워지므로,
x_1이 $a=2$ 일때 보다 작아진다. …㉠
$\Rightarrow x_1+x_2<2$ (O)

ㄷ. 주어진 부등식의 양변에 x_1x_2를 곱하면,
x_1y_1 vs x_2y_2
$x_1(2-x_1)$ vs $x_2(2-x_2)$ …㉡

한편, $x(2-x)$는 $x=1$에서 최대인 이차함수.
$x=1$에서 멀어질수록 값이 줄어든다.
$a=2$일때, x_1과 x_2는 $x=1$ 대칭이므로 ㉡에서 등호가 성립.
$a>2$이면, x_1이 감소하므로(㉠) $x=1$에서 더 멀어진다.
따라서 $x(2-x)$의 값도 줄어든다.

$\Rightarrow x_1y_1 < x_2y_2$ … (X)

19. 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3\}$에 대하여 A에서 B로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

A : $f(1) \geq 2$ 이거나 함수 f의 치역은 B가 아니다.

① $\frac{19}{27}$ ② $\frac{20}{27}$ ③ $\frac{7}{9}$ ④ $\frac{22}{27}$ ⑤ $\frac{23}{27}$

A^C : $f(1)=1$ and f의 치역$=B$

1 → 1
2
3 2
4 3

치역 = 공역인 함수의 개수
= 치역 원소의 개수로
Case 분류

(가) $f(x)=1$ 인 x가 2, 3, 4 중 0개일때

2, 3, 4 → 2, 3 ⇒ $2^3-2=6$

↳ 전체 경우의 수에서 예외 상황 제외

(가) $f(x)=1$ 인 x가 2, 3, 4 중 1개일때

${}_3C_1 \times 2! = 6$

↓

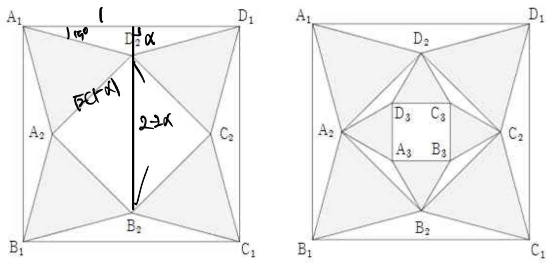
$x=2$로 고정

2 → 1
3 2
4 3

$\therefore P(A) = 1-P(A^C) = 1-\frac{12}{34} = \frac{23}{27}$

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에 네 점 A_2, B_2, C_2, D_2를 네 삼각형 $A_2A_1B_1$, $B_2B_1C_1$, $C_2C_1D_1$, $D_2D_1A_1$이 모두 한 내각의 크기가 $150°$ 인 이등변삼각형이 되도록 잡는다. 네 삼각형 $A_1A_2D_2$, $B_1B_2A_2$, $C_1C_2B_2$, $D_1D_2C_2$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부에 네 점 A_3, B_3, C_3, D_3을 네 삼각형 $A_3A_2B_2$, $B_3B_2C_2$, $C_3C_2D_2$, $D_3D_2A_2$가 모두 한 내각의 크기가 $150°$ 인 이등변삼각형이 되도록 잡는다. 네 삼각형 $A_2A_3D_3$, $B_2B_3A_3$, $C_2C_3B_3$, $D_2D_3C_3$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

$\tan 15° = \alpha = 2-\sqrt{3}$



R_1 R_2

① $5-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ ② $6-2\sqrt{3}$ ③ $7-\frac{5}{2}\sqrt{3}$
④ $8-3\sqrt{3}$ ⑤ $9-\frac{7}{2}\sqrt{3}$

$r=\frac{\sqrt{2}(1-\alpha)}{2}=\frac{1-\alpha}{\sqrt{2}}$ $a=4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\{\sqrt{2}(1-\alpha)\}^2=2\sqrt{3}(1-\alpha)^2$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r^2} = \frac{2\sqrt{3}(1-\alpha)^2}{1-\frac{(1-\alpha)^2}{2}} = 2\sqrt{3}\times\frac{1}{\left(\frac{1}{(1-\alpha)^2}-\frac{1}{2}\right)}$

$* \ \frac{1}{(1-\alpha)^2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{(\sqrt{3}-1)^2}-\frac{1}{2}$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}-1\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}}\times\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)}$
⇓
역수 $=\frac{2(-1+\sqrt{3})}{3-1}=\sqrt{3}-1$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = 6-2\sqrt{3}$

21. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = \log_3 \sqrt[3]{\frac{3(2n+1)}{2n-1}} = \frac{1}{3}\left(\log_3 3 + \log_3(2n+1) - \log_3(2n-1)\right)$$

이다. 다음 조건을 만족시키는 자연수 l의 최솟값을 구하시오. [4점]

> $\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 l이하의 자연수가 되도록 하는 서로 다른 자연수 m의 개수는 2이다.

① 39 ② 42 ③ 45 ④ 48 ⑤ 51

$$S_m = \sum_{1}^{m} a_k = \frac{1}{3}\left(m + \log_3(2m+1)\right)$$

$\Rightarrow 2m+1 = 3^n \rightarrow S_m = \frac{1}{3}\left(\frac{3^n-1}{2} + n\right)$ = 자연수이려면… → 이 수이 3의 배수이면 됨.

→ 등비수열의 합

$$* \quad \frac{3^n-1}{2} + n = \frac{3^n-1}{3-1} + n = (n+1) + \underbrace{3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}}_{n \geq 2\text{이면 3의 배수}}$$

⇓

$n = 3$의 배수 -1 이면 o.k

→ $n = 2, 5, 8, \cdots$

m의 개수가 2개일때, l의 최소 ⇒ $n=5$일때 S_m의 값.

∴ l의 최소 $= S_m = \frac{1}{3}(121+5) = 42.$

단답형

22. 다항식 $(1+2x)^4$에서 x^3의 계수를 구하시오. [3점]

1 3

$2^3 \cdot {}_4C_1 = 32$

$2R = 30$

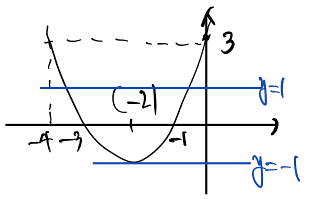
23. 반지름의 길이가 15인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $\sin B = \frac{1}{5}$일 때, 선분 AC의 길이를 구하시오. [3점]

$\overline{AC} = 2R\sin B = 6.$

24. 무한수열 $\left\{(x+2)(x^2+4x+3)^{n-1}\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수를 구하시오. [3점]

$x=-2$ ⇒ 수렴.

$x\neq-2$ ⇒ $-1<x^2+4x+3\le1$ ⇒ $-1, -3$



∴ 3개

25. 곡선 $x^3-y^3=e^{xy}$ 위의 점 $(0, a)$에서의 접선의 방정식은 점 $(b, 1)$을 지난다. $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

$x=0$ ⇒ $a=-1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-ye^{xy}+3x^2}{xe^{xy}+3y^2} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3}b-1=1$ ⇒ $b=6$

∴ $a+b=5$

26. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k=-14$, $S_{k+2}=-11$을 만족시키는 자연수 k에 대하여 $S_{2k+2}=39$일 때, 자연수 k의 값을 구하시오. [4점]

$a_{k+2}+a_{k+1}=3$

⇒ $a_{k+3/2}=\frac{3}{2}$

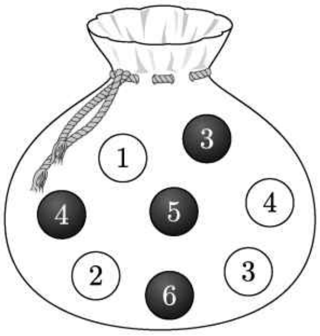
$S_{2k+2}=(2k+2)\cdot a_{k+3/2}=39$

$=3(k+1)$

∴ $k=12$

27. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀있는 검은 공 4개가 들어있는 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 없을 때 3 또는 4가 적힌 공이 존재할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

같X ∩ 3 or 4 존재 / 같X



① ② ③ ④
△3 △4 △5 △6

같X

(I) 3, 4 ф 2개 뽑기.

$({}_4C_2 - 2) \times {}_4C_2 = 24$

분자.

③ ④
△3 △4 에서 2개 뽑기 − 같은거 뽑기

(II) 3, 4 ф 1개 뽑기

$({}_4C_1) \times {}_4C_3 = 16$

③ ④
△3 △4 ф 하나.

(III) 3, 4 ф 0개 뽑기

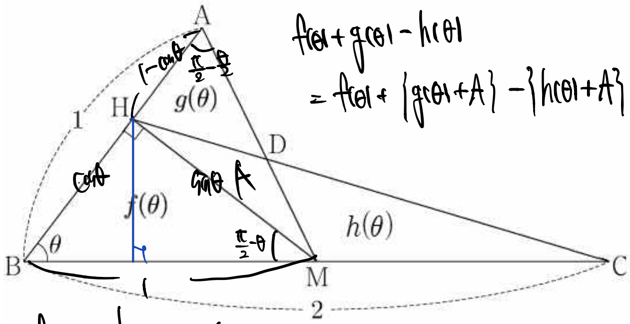
${}_4C_4 = 1$

$\therefore \frac{40}{41}$ 81

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 두 선분 AB, BC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 HC가 선분 AM과 만나는 점을 D라 하자. $\angle ABC=\theta$라 할 때, 삼각형 BMH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 ADH의 넓이를 $g(\theta)$, 삼각형 CDM의 넓이를 $h(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)-h(\theta)}{\theta^3} = a$ 일 때, $80a$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



$f(\theta)+g(\theta)-h(\theta)$
$= f(\theta) + \{g(\theta)+A\} - \{h(\theta)+A\}$

$f(\theta) = \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta$

$g(\theta)+A = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2 \cdot \cot\frac{\theta}{2}$

$h(\theta)+A = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$

$\therefore a = \lim_{\theta\to 0+} \frac{1}{2} \times \frac{(1-\cos\theta)^2}{\theta^3 \times \tan\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{4}$

$80a = 20$

29. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to Y$의 개수를 구하시오. [4점]

A: | 함수 f의 치역의 임의의 원소 a, b에 대하여 $a-b \neq 2$이다. |
|---|

A^C: 〃 어떤 〃 $a-b=2$ 이다.

⇒ 분류의 point가 2개라고 느껴져야 한다.

편의상 치역의 원소 차이를 d라 하면, 분류 point는

$\boxed{\text{치역의 원소 개수} \oplus d=2\text{의 개수}}$

(i) 치역원소 3개, $d=2$ 2개

→ (1,3,5), (2,4,6), (3,5,7), (4,6,8) 조합 ⊕ X에게 나눠주기.

$_4C_1 \times 3! = 24$

(ii) 치역원소 3개 $d=2$ 1개.

$d=2$ 1개 조합 ⇒ (1,3 / 2,4 / 5,7 / 6,8) ⇒ $_4C_1 \times {}_5C_1 \times 3! = 120$

→ 이 네가지 경우는 남은 치역 원소 1개를 선택할때, 선택이 금지된 원소가 1개씩 존재. (ex. 1,3의 경우 5는 금지. (i)에서 사용)

$d=2$ 1개조합 (3,5 / 4,6) ⇒ $_2C_1 \times {}_4C_1 \times 3! = 48$

이 경우는 선택금지 원소가 2개임. (ex. (3,5)의 경우, 1과 7 금지)

(iii) 치역원소 2개, $d=2$ 1개 ($d=2$ 2개는 당연히 X)

(1,3), (2,4), ⋯, (6,8) ⇒ (1,3)으로 고정시키고 분배.

1 2 3 / 1 3 ⇒ 치역=공역 ⇒ 2^3-2

→ $_6C_1 \times (2^3-2) = 36$

∴ $n(A) = n(U) - n(A^C) = 8^3 - 24 - 120 - 48 - 36$

$= 512 - 228 = \boxed{284}$

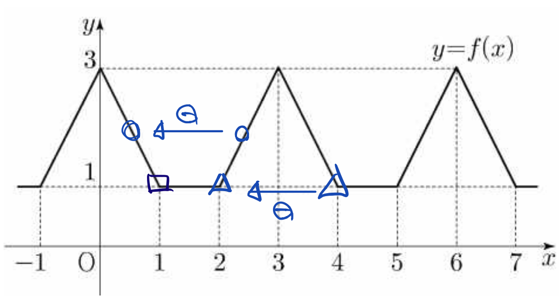
30. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0 < x \le 3$일 때, $f(x) = |x-1| + |x-2|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3) = f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

f(x)의 그래프를 평행이동시켜서 교점을 찾는 방법을 쓰자.

$$g(x) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{h \to 0+} \left| \frac{f(x+2+h) - f(x+h)}{h} \right| & (f(x) = f(x+2)) \Rightarrow ① \\ \displaystyle\lim_{h \to 0+} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| & (f(x) \neq f(x+2)) \Rightarrow ② \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린구간 $(0, 30)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (n은 자연수)라 할 때,

$n + \sum_{k=1}^{n} g(a_k)$의 값을 구하시오. [4점]



① ⇒ $\displaystyle\lim_{h \to 0+} \left| \frac{f(x+2+h) - f(x+2)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|$

		극한값	함숫값 = $g(a_k)$	
① ○ :	(0,3) 구간내 1개 존재	2	4	⇒ 불연속
①② △ :	(0,3) 구간내 1개 존재	0/2 (②의 범위)	2 (①의 범위)	⇒ 불연속.
② □ :	(0,3) 구간내 1개 존재	2 or 0	0	⇒ 불연속

(0,3)에 하나씩 존재 ⇒ (0,30)에서는 10개.

$n = 10+10+10 = 30$ $\sum_1^n g(a_k) = (4+2) \times 10 = 60$ $\boxed{\therefore 90}$

2021학년도 우주설 6월 변형 모의평가

발행일 : 2020년 6월 27일
펴낸이 : 정재민(우주설)

지은이 : 정재민(우주설)

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.