제 2 교시

주요문항 해설 및 변형

1) [2021학년도 8월 사관학교 가형 20번]
세 상수 a, b, c $(a>0,\ c>0)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}-ax^2+6ex+b & (x<c)\\ a(\ln x)^2-6\ln x & (x\geq c)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$f\left(\frac{1}{2e}\right)$의 값은?

① $-4\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$ ② $-4\left(e^2-\frac{1}{4e^2}\right)$ ③ $-3\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$
④ $-3\left(e^2-\frac{1}{4e^2}\right)$ ⑤ $-2\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$

2) [2021학년도 8월 사관학교 가형 20번]-변형
세 상수 a, b, c에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}e^{3x-3}-\frac{2}{3}ae^{2x-2}+a^2e^{x-1} & (x<c)\\ x^3-(3a-1)x^2+(3a^2-2a)x+b & (x\geq c)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.
[랑데뷰 수학]

> (가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$f(2)$의 값은?

① 2 ② $\frac{20}{9}$ ③ $\frac{22}{9}$ ④ $\frac{24}{9}$ ⑤ $\frac{26}{9}$

3) [2021학년도 8월 사관학교 가형 21번]
함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x |t\sin t|\,dt-\left|\int_0^x t\sin t\,dt\right|$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

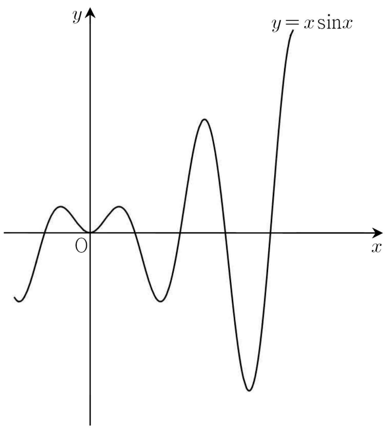
| 보 기 |

ㄱ. $f(2\pi)=2\pi$

ㄴ. $\pi<\alpha<2\pi$인 α에 대하여 $\int_0^\alpha t\sin t\,dt=0$이면 $f(\alpha)=\pi$이다.

ㄷ. $2\pi<\beta<3\pi$인 β에 대하여 $\int_0^\beta t\sin t\,dt=0$이면 $\int_\beta^{3\pi} f(x)dx=6\pi(3\pi-\beta)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



4) [2021학년도 8월 사관학교 가형 21번]-변형
함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x \left|\sin t\, e^{\cos t}\right|dt-\int_0^x \left(\sin t\, e^{\cos t}\right)dt$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
[랑데뷰 수학]

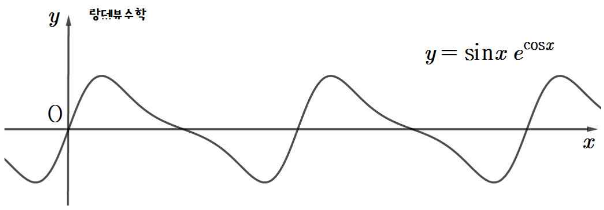
| 보 기 |

ㄱ. $f(2\pi)=2e-\frac{2}{e}$

ㄴ. $2\pi<\alpha<3\pi$인 α에 대하여 $f'(\alpha)=0$이다.

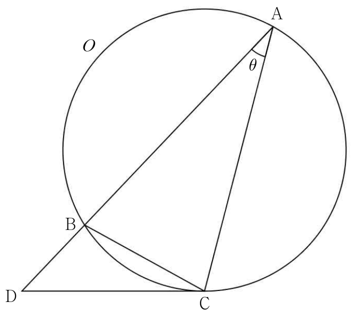
ㄷ. $0<\beta<\pi$인 β에 대하여
$\int_{3\pi}^{3\pi+\beta} f(x)dx-\int_\pi^{\pi+\beta} f(x)dx=3\beta\left(e-\frac{1}{e}\right)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



5) [2021학년도 8월 사관학교 가형 28번]

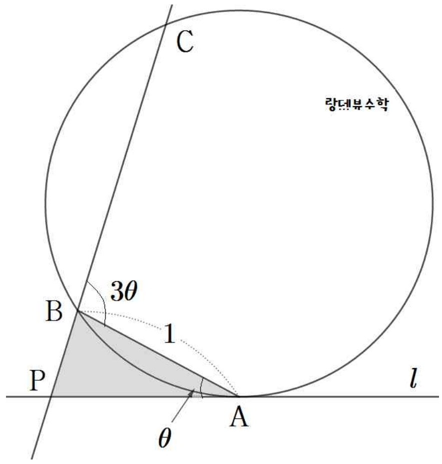
그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=4$인 이등변삼각형 ABC에 외접하는 원 O가 있다. 점 C를 지나고 원 O에 접하는 직선과 직선 AB의 교점을 D라 하자. $\angle CAB=\theta$라 할 때, 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$)



6) [2021학년도 8월 사관학교 가형 28번]-변형1

그림과 같이 원 C위의 점 A에 대하여 $\overline{AB}=1$이 되는 원 위의 점 B가 있다. 점 A에 접하는 접선 l과 현 AB가 이루는 각이 θ라 할 때, $\angle ABC=3\theta$가 되도록 하는 원 C 위의 점을 점 C라 하자. 선분 BC의 연장선이 접선 l과 만나는 점을 점 P라 할 때, 삼각형 ABP의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=a$일 때, $100a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$)

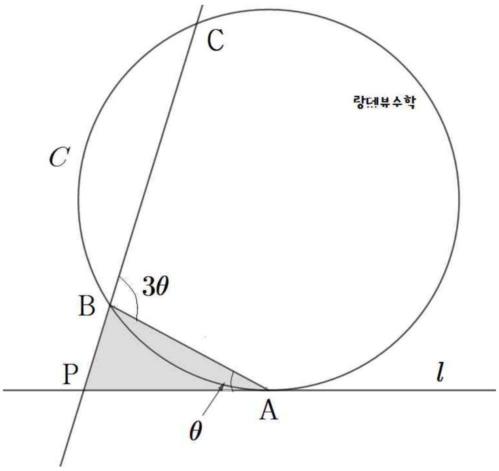
[랑데뷰 수학]



7) [2021학년도 8월 사관학교 가형 28번]-변형2

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 C 위의 점 A에 대하여 점 A에 접하는 접선 l과 이루는 각이 θ인 직선과 원 C 의 교점을 B라 하자. 현 AB에 대하여 $\angle ABC = 3\theta$가 되도록 하는 원 C 위의 점을 점 C라 하고 선분 BC의 연장선이 접선 l과 만나는 점을 점 P라 할 때, 삼각형 ABP의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$)

[랑데뷰 수학]



8) [2021학년도 8월 사관학교 가형 29번]
그림은 여섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 여섯 장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열 할 때, 이웃한 두 장의 카드 중 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 한 번만 나타난 예이다.

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$

이 여섯 장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 일렬로 나열 할 때, 이웃한 두 장의 카드 중 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 한 번만 나타날 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

9) [2021학년도 8월 사관학교 가형 29번]-변형1
그림은 여섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 여섯 장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열 할 때, 이웃한 두 장의 카드 중 오른쪽 카드에 적힌 수가 왼쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 한 번만 나타난 예이다.
[랑데뷰 수학]

$\boxed{6}$ $\boxed{5}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$ $\boxed{3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$

이 일곱 장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 일렬로 나열 할 때, 이웃한 두 장의 카드 중 오른쪽 카드에 적힌 수가 왼쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 한 번만 나타날 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

10) [2021학년도 8월 사관학교 가형 29번]-변형2
그림은 여섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 일곱 장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열 할 때, 이웃한 두 장의 카드 중 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 두 번만 나타난 예이다.
[랑데뷰 수학]

2	1	3	5	4	6	7

이 일곱 장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 일렬로 나열 할 때, 카드 1의 좌, 우에는 각각 적어도 한 장의 카드가 있고 이웃한 두 장의 카드 중 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 두 번만 나타날 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

11) [2021학년도 8월 사관학교 가형 30번]

두 함수 $f(x)=x^2-ax+b$ $(a>0)$, $g(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$에 대하여 상수 k와 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(0)<h(4)$ (나) 방정식 $\lvert h(x)\rvert=k$의 서로 다른 실근의 개수는 7이고, 그중 가장 큰 실근을 α라 할 때 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.

$f(1)=-\frac{7}{32}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+16b$의 값을 구하시오,
(단, $\frac{5}{2}<e<3$이고, $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이다.)

12) [2021학년도 8월 사관학교 가형 30번]-변형

두 함수 $f(x)=x^2-2ax+b$ $(0<a<1)$, $g(x)=(x-1)^2e^x$에 대하여 상수 k $(k\neq 0)$와 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

[랑데뷰 수학]

(가) 방정식 $\lvert h(x)\rvert=k$의 서로 다른 실근의 개수는 6이고, 그중 가장 작은 실근을 α라 할 때 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다. (나) $h(-1)\times h(1)>0$

$\dfrac{f\left(-\frac{1}{e}\right)-f\left(\frac{1}{e}\right)}{k}$의 값을 구하시오,
(단, a, b는 상수이고 $\lim_{x\to-\infty}g(x)=0$이다.)

* 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2021 사관 가형 랑데뷰 Rebuild

1	③	2	③	3	③	4	③	5	8
6	75	7	3	8	259	9	43	10	117
11	6	12	4	13		14		15	
16		17		18		19		20	
21		22		23		24		25	
26		27		28		29		30	

(1) 수험생분들 아래글 건너 뛰고 풀이 바로 보시면 됩니다. 랑데뷰 자료가 도움 되길 바랄뿐입니다.

오타 오류 발견되면 수정해서 올립니다.
수정 자료 올리는 곳은 한곳
cafe.daum.net/baekipsi
랑데뷰 자료실
등업 신청란에 [등업해 주세요] 한마디 남기시면 바로 자료 받을 수 있게 등업 됩니다.
다른 자료도 많답니다.
몰랐다면 받아가십시오.

(2) 수능 수학을 가르치는 전국 선생님들 필독
랑데뷰 프리패스 소개합니다.

⇨ 랑데뷰 2020 제작 올 프리패스 :
[황보백 선생이 2020년 제작하는 모든 문항 한글파일로 제공받습니다.]
① 2021 수능특강 [수학1,수학2,확통,미적분]의 level 3 모든 문항 변형문제
② 3월, 4월, 6월, 7월, 9월, 10월 전국에서 치러지는 교육청 및 평가원 모의고사 주요문항 해설 및 변형문항
③ 2021 수능완성 [수학1,수학2,확통,미적분]의 주요문항
④ 랑데뷰 모든 모의고사 한글파일
가형 4회, 나형 2회 (총 6회) 모의고사 한글 파일을 각 월 별로 제공받습니다. 연간 가형 총 48회 나형 총 24회
주의 ⇨ ①, ②, ③에서 제작되는 문항들은 랑데뷰 모의고사에 출제 될 수도 있습니다.

이 사관학교 자료 또한 ②에 해당되어 한글 파일로 제공됩니다.
선생님들 교재에 넣으셔도 됩니다. 출판 빼고 공유빼고 다 가능한 프리미엄 자료입니다.

⇨ 문항 제작 국가 대표 황보백 선생입니다.
⇨ 내년 완전 새로워지는 수능 대안 없으시잖아요!! 올해 기출 모의고사로 자체 모의고사 치르실 겁니까? 대안 없으시면 바로 랑데부입니다!
(99% 겸손하다 1% 자신 있을 때 글 써서 거만하게 느껴졌다면 죄송해요)

내년에 가격 상승 있습니다.
[기존 프리패스 선생님들께는 할인율 적용해서 동결]

기한이 얼마 안 남아 내년에 프리패스 가입하셔도 됩니다.
그런데 그럼 가격 상승 적용됩니다.
가격 상승 때문에 고문이라는 선생님들도 계십니다.

그래서 프리패스 하프
를 준비중입니다.
가격반
아쉽지만 자료도 반입니다.

문의 : 제 연락처로...(풀이에 달려 있습니다.)
또는 카톡 hbb100

⇨ 랑데뷰 일일학습지 쉬사준킬 관련 – pdf와 한글 파일로 나눠서 판매합니다.
랑데뷰 쉬사준킬은 2020년 3월부터 10월까지 주5일 [월화수목금] 나형 6문항 가형 6문항 또는 8문항 제공되는 수학테스지입니다. 월 20회, 연 160회 제작 계획입니다. 모든 문항은 랑데뷰 수학 연구소에서 그동안 제작해 온 변형 및 자작 문항으로 구성됩니다.
→프리패스와 상관없는 자료입니다.

오타를 줄일 수 있도록 시스템을 갖춰 나가겠습니다.
믿고 애용해 주시는 프리패스 선생님들
올해 건강하시고 좋은 결과 있길 바라겠습니다.

1) 정답 ③

[풀이 : 황보백]

$$f(x)=\begin{cases}-a\left(x-\dfrac{3e}{a}\right)^2+b+\dfrac{9e^2}{a} & (x<c)\\ a\left(\ln x-\dfrac{3}{a}\right)^2-\dfrac{9}{a} & (x\ge c)\end{cases}$$

에서

$$f_1(x)=-a\left(x-\frac{3e}{a}\right)^2+b+\frac{9e^2}{a}$$

$$f_2(x)=a\left(\ln x-\frac{3}{a}\right)^2-\frac{9}{a}$$

라 하자.

x가 증가함에 따라 위로 볼록인 함수와 아래로 볼록인 함수를 연속되게 연결 한 함수가 역함수가 존재하기 위해서는 실수 전체에서 증가하는 함수여야 한다.

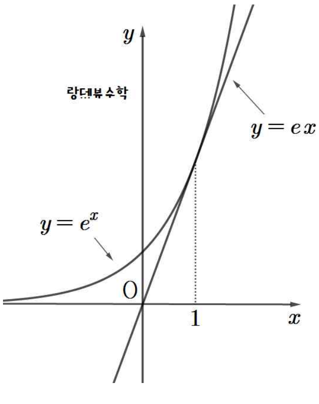
함수 $f_1(x)$는 $x<\dfrac{3e}{a}$에서 증가한다. 따라서 (나) 조건을 만족하기 위해서는 $c\le\dfrac{3e}{a}\cdots$㉠

함수 $f_2(x)$는 $\ln x>\dfrac{3}{a}$, 즉 $x>e^{\frac{3}{a}}$에서 증가한다. 따라서 (나) 조건을 만족하기 위해서는 $c\ge e^{\frac{3}{a}}\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $e^{\frac{3}{a}}\le c\le\dfrac{3e}{a}$이다.

그런데 $\dfrac{3}{a}=x$라 할 때, 좌표 평면에서 두 그래프 $y=ex$와 $y=e^x$는

$x=1$에서 접하고 모든 실수 x에 대하여 $ex\le e^x$이다.



그러므로 $e^x\le c\le ex$을 만족하는 c는 $c=e$뿐이다.

따라서 두 그래프 $f_1(x)$와 $f_2(x)$가 증가하는 부분에서 만나기 위해서는 $e^{\frac{3}{a}}\le c\le\dfrac{3e}{a}$에서 $e^{\frac{3}{a}}=\dfrac{3e}{a}$이어야 한다. 따라서 $\dfrac{3}{a}=1$이다.

$\therefore\ a=3$

따라서

$$f(x)=\begin{cases}-3(x-e)^2+b+3e^2 & (x<e)\\ 3(\ln x-1)^2-3 & (x\ge e)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to e-}f_1(x)=\lim\limits_{x\to e+}f_2(x)$가 성립한다.

따라서 $-3(e-e)^2+b+3e^2=-3$

$b=-3e^2-3$

따라서 $f_1(x)=-3(x-e)^2-3$

$\dfrac{1}{2e}<e$이므로

$f\left(\dfrac{1}{2e}\right)=f_1\left(\dfrac{1}{2e}\right)$

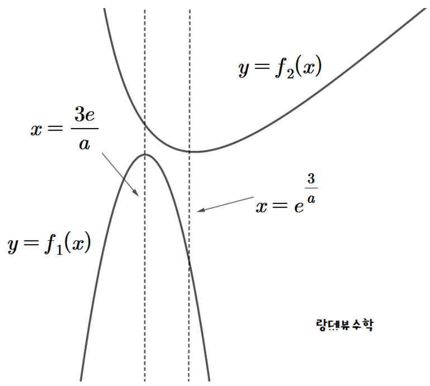
$=-3\left(\dfrac{1}{2e}-e\right)^2-3$

$=-3\left(\dfrac{1}{4e^2}-1+e^2\right)-3$

$=-3\left(\dfrac{1}{4e^2}+e^2\right)$

[랑데뷰팁]

$a\ne3$인 경우는 다음 그림과 같이 $y=f_1(x)$와 $y=f_2(x)$의 그래프는 증가하는 부분으로 연속되게 연결되지 못한다.



2) 정답 ③

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{9}e^{3x-3}-\frac{2}{3}ae^{2x-2}+a^2e^{x-1} & (x<c) \\ x^3-(3a-1)x^2+(3a^2-2a)x+b & (x \geq c) \end{cases}$$

에서

$f_1(x)=\frac{1}{9}e^{3x-3}-\frac{2}{3}ae^{2x-2}+a^2e^{x-1}$

$f_2(x)=x^3-(3a-1)x^2+(3a^2-2a)x+b$

라 하자.

$f_1(x)=\frac{1}{9}e^{3x-3}-\frac{2}{3}ae^{2x-2}+a^2e^{x-1}$에서

$$f_1'(x)=\frac{1}{3}e^{3x-3}-\frac{4}{3}ae^{2x-2}+a^2e^{x-1}$$
$$=e^{x-1}\left(\frac{1}{3}e^{2x-2}-\frac{4}{3}ae^{x-1}+a^2\right)$$
$$=e^{x-1}(e^{x-1}-a)\left(\frac{1}{3}e^{x-1}-a\right)$$

$f_1'(x)=0$의 해는 $e^{x-1}=a$에서 $x=\ln a+1$,

$\frac{1}{3}e^{x-1}-a=0$에서 $x=\ln a+\ln 3+1$이다.

증감표에서

함수 $f_2(x)$는 $x<\ln a+1$에서 증가

$\ln a+1<x<\ln a+\ln 3+1$에서 감소

$x>\ln a+\ln 3+1$에서 증가

임을 알 수 있다.

(나) 조건을 만족하기 위해서는 $c \leq \ln a+1$임을 알 수 있다.…㉠

$f_2(x)=x^3-(3a-1)x^2+(3a^2-2a)x+b$에서

$$f_2'(x)=3x^2-2(3a-1)x+(3a^2-2a)$$
$$=(x-a)(3x-3a+2)$$

$f_2'(x)=0$의 해는 $x=a$ 또는 $x=\frac{3a-2}{3}$

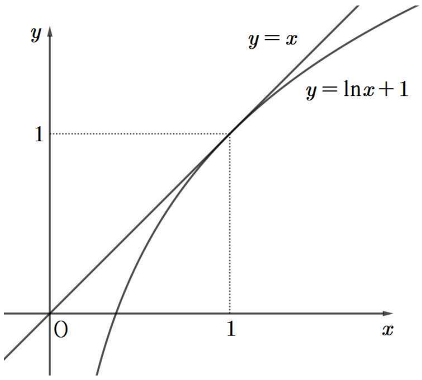
따라서 삼차함수 $f_2'(x)$는 $x<\frac{3a-2}{3}$에서 증가하고 $\frac{3a-2}{3}<x<a$에서 감소, $x>a$에서 증가한다.

(나) 조건을 만족하기 위해서는 $c \geq a$임을 알 수 있다. …㉡

㉠, ㉡에서

$a \leq c \leq \ln a+1$

그런데 $a=x$라 할 때, 좌표 평면에서 두 그래프 $y=x$와 $y=\ln x+1$는 $x=1$에서 접하고 모든 실수 x에 대하여 $\ln x+1 \leq x$이다.



$x \leq c \leq \ln x+1$을 만족하는 $c=1$ 뿐이다.

따라서 두 그래프 $f_1(x)$와 $f_2(x)$가 증가하는 부분에서 만나기 위해서는 $a=1$이어야 한다.

$\therefore\ a=1$

따라서

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{9}e^{3x-3}-\frac{2}{3}e^{2x-2}+e^{x-1} & (x<1) \\ x^3-2x^2+x+b & (x \geq 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}f_1(x)=\lim_{x\to 1+}f_2(x)$가 성립한다.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{9}e^{3x-3}-\frac{2}{3}e^{2x-2}+e^{x-1} & (x<1) \\ x^3-2x^2+x+b & (x \geq 1) \end{cases}$$

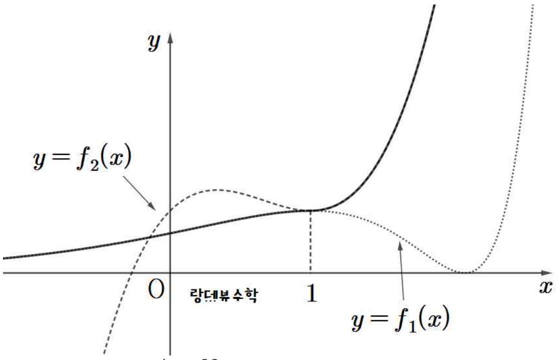
따라서 $\frac{1}{9}-\frac{2}{3}+1=1-2+1+b$

$b=\frac{4}{9}$

따라서

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{9}e^{3x-3}-\dfrac{2}{3}e^{2x-2}+e^{x-1} & (x<1) \\ x^3-2x^2+x+\dfrac{4}{9} & (x \geq 1) \end{cases}$$

이고 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(2)=8-8+2+\dfrac{4}{9}=\dfrac{22}{9}$

3) 정답 ③

[풀이 : 황보백]

① $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin t dt=[t(-\cos t)-(-\sin t)]_0^{\pi}=\pi$

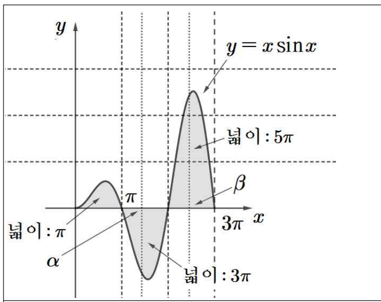
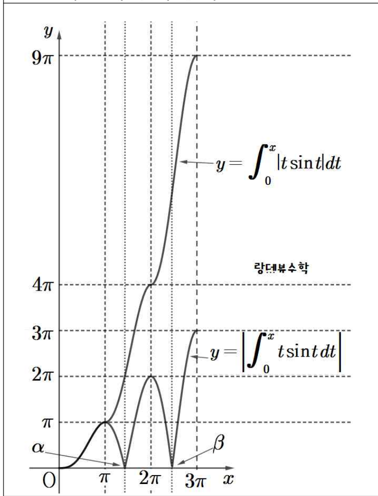
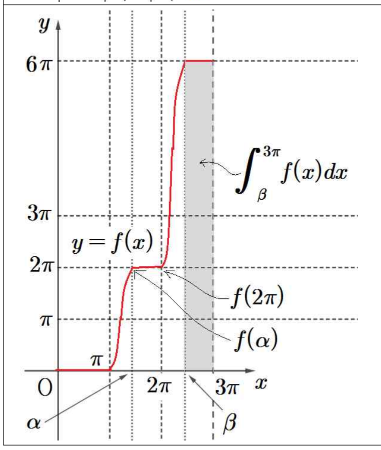
② $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} t\sin t dt=[t(-\cos t)-(-\sin t)]_{\pi}^{2\pi}$

$=-2\pi-\pi=-3\pi$

③ $\displaystyle\int_{2\pi}^{3\pi} t\sin t dt=[t(-\cos t)-(-\sin t)]_{2\pi}^{3\pi}$

$=3\pi+2\pi=5\pi$

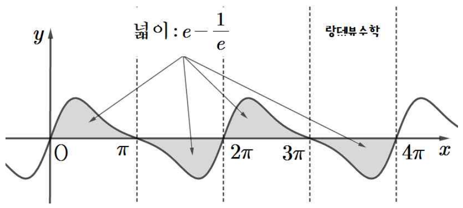
[그래프 추론 ⇨ 랑데뷰 세미나 참고]

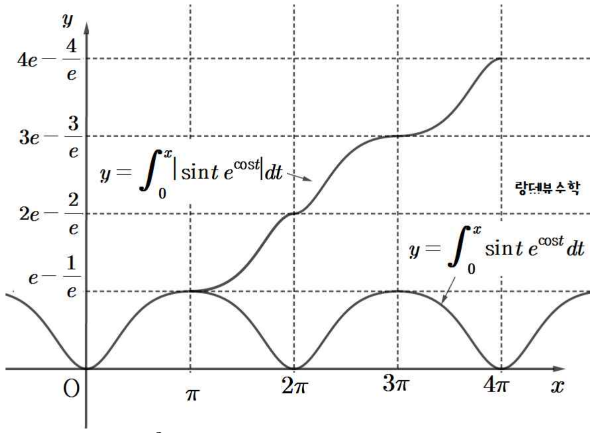
	$\int_0^{\pi} t\sin t\, dt=\pi$ $\int_{\pi}^{2\pi} t\sin t\, dt=-3\pi$ $\int_{2\pi}^{3\pi} t\sin t\, dt=5\pi$
	$y=\int_0^x \lvert t\sin t\rvert dt$ ⇨ $x: 0\to\pi\to2\pi\to3\pi$ $y: 0\to\pi\to4\pi\to9\pi$ 따라서 $(0,\ 0)$, $(\pi,\ \pi)$, $(2\pi,\ 4\pi)$, $(3\pi,\ 9\pi)$을 지나는 그래프 $y=\left\lvert\int_0^x t\sin t\, dt\right\rvert$ ⇨ $x: 0\to\pi\to\alpha\to2\pi\to\beta\to3\pi$ $y: 0\to\pi\to0\to2\pi\to0\to3\pi$ 따라서 $(0,\ 0)$, $(\pi,\ \pi)$, $(\alpha,\ 0)$, $(2\pi,\ 2\pi)$, $(\beta,\ 0)$, $(3\pi,\ 3\pi)$ 을 지나는 그래프
	ㄱ. $f(2\pi)=2\pi$ (참) ㄴ. $f(\alpha)=2\pi$ (거짓) ㄷ. $\int_{\beta}^{3\pi} f(x)dx$ $=6\pi(3\pi-\beta)$ (참)

4) 정답 ③
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

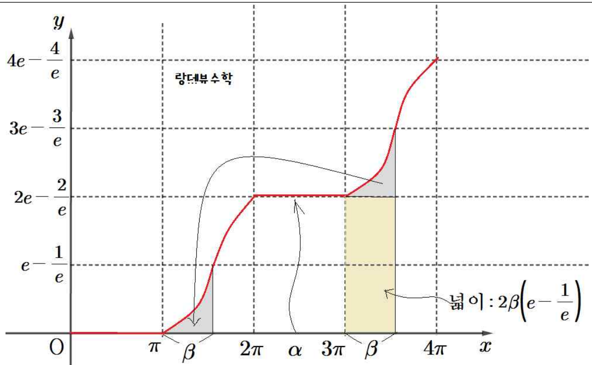
$g(x)=\sin x\, e^{\cos x}$라 할 때, $g(0)=g(\pi)=g(2\pi)=\cdots$이고
$g(2n\pi-x)+g(x)$
$=\sin(2n\pi-x)e^{\cos(2n\pi-x)}+\sin x\, e^{\cos x}$
$=-\sin x\, e^{\cos x}+\sin x\, e^{\cos x}=0$
이므로 함수 $g(x)$는 $(n\pi,\ 0)$에 대칭인 함수이다.
따라서 함수 $g(x)$는 $(\pi,\ 0)$에 대칭이므로 $\int_0^{2\pi}\sin x\, e^{\cos x}dx=0$[계산으로 확인할 수 있다.]
$\int_0^{\pi}\sin x\, e^{\cos x}dx=\int_1^{-1}-e^t dt$
$=\int_{-1}^{1}e^t dt=[e^t]_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}\cdots$㉠
$f(x)=\int_0^x|\sin t\, e^{\cos t}|dt-\int_0^x(\sin t\, e^{\cos t})dt$에서
$f(2\pi)=\int_0^{2\pi}|\sin t\, e^{\cos t}|dt-\int_0^{2\pi}(\sin t\, e^{\cos t})dt$
$=\int_0^{2\pi}|\sin t\, e^{\cos t}|dt=2\int_0^{\pi}(\sin t\, e^{\cos t})dt$
㉠에서 $f(2\pi)=2\left(e-\frac{1}{e}\right)$ (ㄱ.참)

[그래프 추론 ⇨ 랑데뷰 세미나 참고]





ㄱ. $f(2\pi)=2e-\frac{2}{e}$ (참)



ㄴ. $2\pi<\alpha<3\pi$인 α에 대하여 $f'(\alpha)=0$이다. (참)
ㄷ. $0<\beta<\pi$인 β에 대하여
$\int_{3\pi}^{3\pi+\beta}f(x)dx-\int_{\pi}^{\pi+\beta}f(x)dx=2\beta\left(e-\frac{1}{e}\right)$이다.(거짓)

5) 정답 8
[풀이 : 황보백]

$\angle CAB=\theta$, $\overline{AB}=\overline{AC}=4$인 이등변삼각형 ABC에서

$\angle ACB=\angle ABC=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$이므로

사인법칙을 적용하면 $\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=\frac{4}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$

$\therefore\ \overline{BC}=\frac{4\sin\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}\cdots$㉠

삼각형 ACD에서 $\angle ACD=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}+\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$이므로

$\angle ADC=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}+\theta\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta$이므로 사인법칙을 적용하면

$\frac{\overline{CD}}{\sin\theta}=\frac{4}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta\right)}$

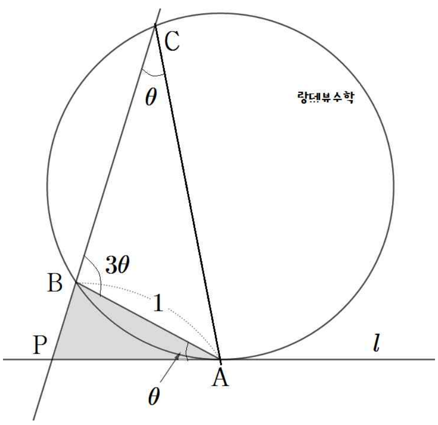
$\therefore\ \overline{CD}=\frac{4\sin\theta}{\cos\frac{3}{2}\theta}\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $S(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{4\sin\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}\times\frac{4\sin\theta}{\cos\frac{3}{2}\theta}\times\sin\theta$이다.

그러므로 $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=8$

6) 정답 75
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

다음 그림과 같이 선분 AC를 그으면 $\angle ACB=\theta$이다.



따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙을 적용하면

$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\overline{AC}}{\sin3\theta}\to\overline{AC}=\frac{\sin3\theta}{\sin\theta}$

한편,

$\angle ABC=3\theta$, $\angle BAP=\theta$이므로 삼각형의 외각의 성질에 의해 $\angle APB=2\theta$이다.

따라서 삼각형 APC에서 사인법칙을 적용하면

$\frac{\overline{PA}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AC}}{\sin2\theta}$

$\overline{PA}=\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}\times\overline{AC}=\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}\times\frac{\sin3\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin3\theta}{\sin2\theta}$

그러므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AP}\times\sin\theta$

$=\frac{\sin3\theta\sin\theta}{2\sin2\theta}$

$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\frac{3}{4}$

$a=\frac{3}{4}$이므로 $100a=75$

[랑데뷰팁]⇨문제를 잘못 출제하였다.[원이 필요 없네요-요즘 상태 안 좋음]

삼각형 PAB에서 $\angle PBA=\pi-3\theta$, $\angle BPA=2\theta$이므로

$\frac{1}{\sin2\theta}=\frac{\overline{PA}}{\sin(\pi-3\theta)}$

$\overline{PA}=\frac{\sin3\theta}{\sin2\theta}$

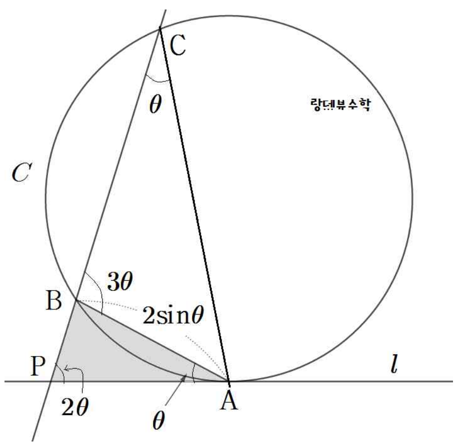
$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AP}\times\sin\theta$

$=\frac{\sin3\theta\sin\theta}{2\sin2\theta}$

$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\frac{3}{4}$

7) 정답 3
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

다음 그림과 같이 선분 AC를 그으면 $\angle ACB=\theta$이다.



원 C 의 반지름의 길이가 1이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙을 적용하면

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}=2 \to \overline{AB}=2\sin\theta$

한편,

$\angle ABC=3\theta$, $\angle BAP=\theta$이므로 삼각형의 외각의 성질에 의해 $\angle APB=2\theta$이다.

따라서 삼각형 ABP에서 사인법칙을 적용하면

$\dfrac{\overline{PA}}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin2\theta}$

$\overline{PA}=\dfrac{\sin3\theta}{\sin2\theta}\times\overline{AB}=\dfrac{2\sin\theta\sin3\theta}{\sin2\theta}$

그러므로

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PA}\times\sin\theta$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times2\sin\theta\times\dfrac{2\sin\theta\sin3\theta}{\sin2\theta}\times\sin\theta$

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=2\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}\times\frac{\sin3\theta}{\theta}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\right)=2\times\frac{3}{2}=3$

8) 정답 259

[풀이 : 황보백]

다음과 같이 6개의 카드를 담을 수 있는 두 상자 A와 B가 있다고 생각하자.

A	B

두 상자에 여섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6을 담으면 그 수 들은 각 상자에서 크기순으로 자동 배열되고, A 상자의 가장 큰 수가 B 상자의 가장 작은 수 보다 크면 조건을 만족한다.

두 상자에 숫자를 담는 방법의 수 $2^6=64$

A상자의 가장 큰 수 a가 B상자의 가장 작은 수 b보다 작은 경우는

(a, b) ⇨ $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$ 로 5가지

A 상자 또는 B 상자에 여섯 개의 숫자가 모두 담기는 경우는 2가지

전체 경우의 수는 $6!$

따라서 $\dfrac{2^6-(5+2)}{6!}=\dfrac{57}{720}=\dfrac{19}{240}$

$p=240$, $q=19$

$p+q=259$

[다른 풀이]-점화식이용

n장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 일렬로 나열할 때, 이웃한 두 장의 카드 중 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 한 번만 나타나는 경우의 수를 a_n이라 할 때, $a_n=2^n-(n+1)$이다.

$\dfrac{q}{p}=\dfrac{2^6-(6+1)}{6!}=\dfrac{57}{720}=\dfrac{19}{240}$

설명

n장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 일렬로 나열할 때, 이웃한 두 장의 카드 중 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 한 번만 나타나는 경우의 수를 a_n이라 하고 a_{n+1}을 생각해 보자.

예를 들어 $n=3$인 경우

2 1 3
3 1 2
1 3 2
2 3 1

으로 $a_3=4$이다.

이때 숫자 4가 적힌 카드가 추가 되었을 때 다음과 같이 경우가 2배가 된다. (위의 경우에서 숫자 4가 들어갈 수 있는 경우를 생각해 보면 된다.)

2 1 3 ⇨ 2 4 1 3, 2 1 3 4
3 1 2 ⇨ 3 4 1 2, 3 1 2 4
1 3 2 ⇨ 1 3 4 2, 1 3 2 4
2 3 1 ⇨ 2 3 4 1, 2 3 1 4

로 a_3의 각 경우에 $\times2$가 적용된다.

또한, 4 1 2 3, 1 4 2 3, 1 2 4 3 등 4가 들어 갈 수 있는 자리가 $(4-1)$개 (가장 마지막 자리 제외)추가 된다.

따라서 $a_4=2\times a_3+3$

마찬가지로 $a_{n+1}=2a_n+n$

$a_1=0$, $a_2=1$이므로

$a_3=2\times1+2=4$

$a_4=2\times4+3=11$

$a_5=2\times11+4=26$

$a_6=2\times26+5=57$

따라서 $\dfrac{57}{6!}=\dfrac{19}{240}$

$p=240$, $q=19$

$p+q=259$

[랑데뷰팁]-일반항 찾기 (교과외)

$a_1=0$, $a_2=1$, $a_{n+1}=2a_n+n$에서

$a_{n+2}=2a_{n+1}+(n+1)$ 변변 빼면

$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+1$

$b_n=a_{n+1}-a_n$라 두면

$b_1=1$, $b_{n+1}=2b_n+1$에서

$(b_{n+1}+1)=2(b_n+1)$로 변형하면

$b_n+1=2^n$이다.

$b_n=2^n-1$

$a_{n+1}-a_n=2^n-1$

따라서 $\displaystyle a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-1)=\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n-1)=2^n-(n+1)$

$\therefore\ a_n = 2^n - (n+1)$

9) 정답 43
[풀이 : 황보백]

다음과 같이 7개의 카드를 담을 수 있는 두 상자 A와 B가 있다고 생각하자.

A	B

두 상자에 일곱 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7을 담으면 그 수 들은 각 상자에서 크기역순으로 자동 배열되고, A 상자의 가장 작은 수가 B 상자의 가장 큰 수 보다 작으면 조건을 만족한다.
두 상자에 숫자를 담는 방법의 수 $2^7 = 128$
A상자의 가장 작은 수 a가 B상자의 가장 큰 수 b보다 큰 경우는
(a, b) ⇨ $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 5)$, $(7, 6)$ 로 6가지
A 상자 또는 B 상자에 일곱 개의 숫자가 모두 담기는 경우는 2가지
전체 경우의 수는 7!
따라서 $\dfrac{2^7 - (6+2)}{7!} = \dfrac{120}{7 \times 720} = \dfrac{1}{42}$
$p = 42,\ q = 1$
$p + q = 43$

[다른 풀이]-점화식이용
n장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 일렬로 나열할 때, 이웃한 두 장의 카드 중 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 한 번만 나타나는 경우의 수를 a_n이라 할 때, $a_n = 2^n - (n+1)$이다.
$\dfrac{q}{p} = \dfrac{2^7 - (7+1)}{7!} = \dfrac{120}{7 \times 720} = \dfrac{1}{42}$
n장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 일렬로 나열할 때, 이웃한 두 장의 카드 중 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 한 번만 나타나는 경우의 수를 a_n이라 하면
⇨ $a_{n+1} = 2a_n + n$
$a_1 = 0,\ a_2 = 1$이므로
$a_3 = 2 \times 1 + 2 = 4$
$a_4 = 2 \times 4 + 3 = 11$
$a_5 = 2 \times 11 + 4 = 26$
$a_6 = 2 \times 26 + 5 = 57$
$a_7 = 2 \times 57 + 6 = 114 + 6 = 120$

10) 정답 117
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

다음과 같이 7개의 카드를 담을 수 있는 세 상자 A와 B와 C가 있다고 생각하자.

A	B	C

세 상자에 일곱 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7을 담으면 그 수 들은 각 상자에서 크기순으로 자동 배열되고, 숫자 1의 좌, 우 에는 각각 적어도 한 장의 카드가 있어야 하므로 숫자 1이 적힌 카드는 상자 B에 넣는다.
상자 A에는 어떤 숫자가 오든 상자 B의 가장 작은 수가 1이므로 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수 보다 큰 경우가 한 번 나타난다.

따라서
B 상자의 가장 큰 수가 C 상자의 가장 작은 수 보다 크면 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수 보다 큰 경우가 두 번째 나타나므로 조건을 만족한다.

세 상자에 1을 제외한 숫자카드 여섯 개를 담는 방법의 수 3^6

B상자의 가장 큰 수 b가 C상자의 가장 작은 수 c보다 작은 경우는
(b, c) ⇨
$(2, 3)$ → 나머지 숫자 카드가 들어갈 수 있는 경우의 수 $2^4 = 16$
$(2, 4)$ → 나머지 숫자 카드가 들어갈 수 있는 경우의 수 $1 \times 2^3 = 8$
$(2, 5)$ → 나머지 숫자 카드가 들어갈 수 있는 경우의 수 $1^2 \times 2^2 = 4$
$(2, 6)$ → 나머지 숫자 카드가 들어갈 수 있는 경우의 수 $1^3 \times 2^1 = 2$
$(2, 7)$ → 나머지 숫자 카드가 들어갈 수 있는 경우의 수 $1^4 = 1$

$(3, 4)$ → 나머지 숫자 카드가 들어갈 수 있는 경우의 수 $2^4 = 16$
$(3, 5)$ → 나머지 숫자 카드가 들어갈 수 있는 경우의 수 $1 \times 2^3 = 8$
$(3, 6)$ → 나머지 숫자 카드가 들어갈 수 있는 경우의 수 $1^2 \times 2^2 = 4$
$(3, 7)$ → 나머지 숫자 카드가 들어갈 수 있는 경우의 수 $1^3 \times 2 = 2$

$(4, 5)$ → 나머지 숫자 카드가 들어갈 수 있는 경우의 수 $2^4 = 16$
$(4, 6)$ → 나머지 숫자 카드가 들어갈 수 있는 경우의 수 $1 \times 2^3 = 8$
$(4, 7)$ → 나머지 숫자 카드가 들어갈 수 있는 경우의 수 $1^2 \times 2^2 = 4$

$(5, 6)$ → 나머지 숫자 카드가 들어갈 수 있는 경우의 수 $2^4 = 16$
$(5, 7)$ → 나머지 숫자 카드가 들어갈 수 있는 경우의 수 $1 \times 2^3 = 8$

$(6, 7)$ → 나머지 숫자 카드가 들어갈 수 있는 경우의 수 $2^4 = 16$

A 상자 또는 C 상자에 여섯 개의 숫자가 모두 담기는 경우는 2가지

전체 경우의 수는 $7!-2\times 6!=6!(7-2)=5\times 6!$

따라서

$\dfrac{3^6-(31+30+28+24+2)}{5\times 6!}$

$=\dfrac{3^6-117}{5\times 6!}$

$=\dfrac{3^4-13}{5\times 80}=\dfrac{68}{5\times 80}=\dfrac{17}{100}$

$p=100,\ q=17$

$p+q=117$

11) 정답 6

[풀이 : 황보백]

(가)에서

$h(0)=f(g(0))=f(0)=b$

$h(4)=f(g(4))=f\left(\dfrac{16}{e^2}\right)$

$b<\dfrac{256}{e^4}-a\times\dfrac{16}{e^2}+b$

$a<\dfrac{16}{e^2}\cdots$㉠이고 $\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{e}<\dfrac{2}{5}$에서 $\dfrac{1}{e^2}<\dfrac{4}{25}$

$a<\dfrac{16}{e^2}<\dfrac{64}{25}<3\cdots$㉡

한편,

$f(x)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+b-\dfrac{a^2}{4},\ f'(x)=2x-a$

$f'(x)=0$의 해는 $x=\dfrac{a}{2}$이다.

$g(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$에서

$g'(x)=2xe^{-\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{2}x^2e^{-\frac{x}{2}}=xe^{-\frac{x}{2}}\left(2-\dfrac{1}{2}x\right)$

함수 $g(x)$는 다음 그림과 같이 $x=0$에서 극솟값 0, $x=4$에서 극댓값 $\dfrac{16}{e^2}$을 갖는 그래프이다.

$g'(x)=0$의 해는 $x=0$ 또는 $x=4$이다.

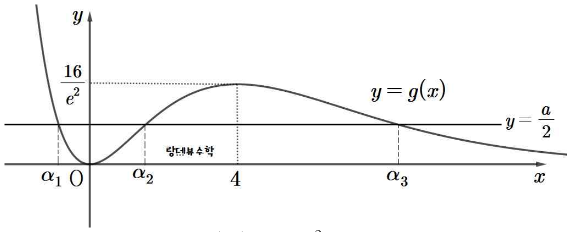
$h(x)=f(g(x))$

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$h'(x)=0$의 해는 방정식 $g(x)=\dfrac{a}{2}$의 해 또는 $x=0$ 또는 $x=4$

㉠에서 a는 $g(x)$의 극댓값 보다 작으므로 $g(x)=\dfrac{a}{2}$의 해의 개수는 3이고 크기순으로 차례로 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$라 하면 다음 그림과 같다.

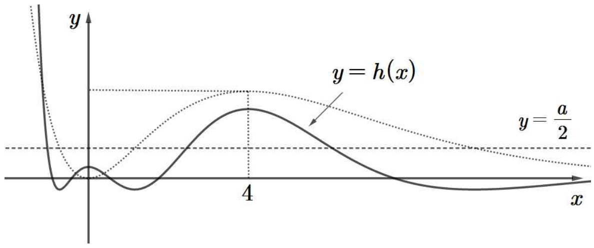
$g(\alpha_1)=g(\alpha_2)=g(\alpha_3)=\dfrac{a}{2}$이므로



$h(\alpha_1)=h(\alpha_2)=h(\alpha_3)=f\left(\dfrac{a}{2}\right)=b-\dfrac{a^2}{4}$

$h(0)=f(0)=b$

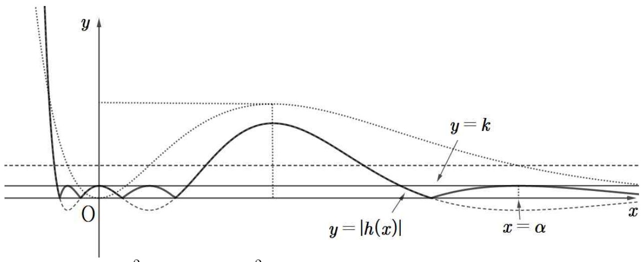
따라서 함수 $h(x)$는 다음 그림과 같다.



(나)에서 방정식 $|h(x)|=k$의 근 중 가장 큰 실근이 $y=h(x)$의 극소점 중 x좌표가 가장 큰 값이므로 $\alpha=\alpha_3$이다. 따라서 $|h(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수가 7이기 위해서는

극댓값 $h(0)=b>0$과 극솟값 $h(\alpha_1)=h(\alpha_2)=h(\alpha_3)=b-\dfrac{a^2}{4}<0$

의 절댓값이 같아야 한다.



즉, $b=-b+\dfrac{a^2}{4}$ 에서 $b=\dfrac{a^2}{8}$이다.

$f(1)=1-a+b=-\dfrac{7}{32}$에서

$1-a+\dfrac{a^2}{8}=-\dfrac{7}{32}$

$a^2-8a+\dfrac{39}{4}=0$

$4a^2-32a+39=0$

$(2a-13)(2a-3)=0$

$a=\dfrac{3}{2}$ 또는 $a=\dfrac{13}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{3}{2}$ $(\because$ ㉡$)$

$b=\dfrac{a^2}{8}$에서

$b=\dfrac{9}{32}$

$\therefore\ f(x)=x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{32}$

그러므로 $a+16b=\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2}=6$

12) 정답 4

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$f(x)=(x-a)^2+b-a^2,\ f'(x)=2x-2a$

$f'(x)=0$의 해는 $x=a$이다.

$g(x)=(x-1)^2e^x$에서

$g'(x)=2(x-1)e^x+(x-1)^2e^x=(x+1)(x-1)e^x$

함수 $g(x)$는 다음 그림과 같이 $x=-1$에서 극댓값 $\dfrac{4}{e}$, $x=1$에서 극솟값 0을 갖는 그래프이다.

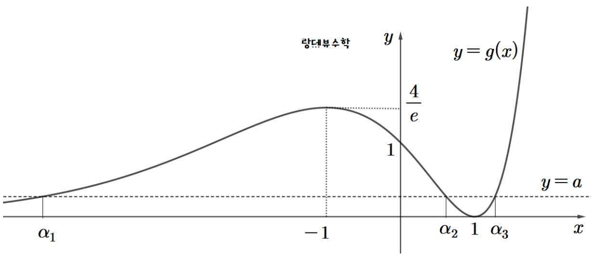
$g'(x)=0$의 해는 $x=-1$ 또는 $x=1$이다.

$h(x)=f(g(x))$

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$h'(x)=0$의 해는 방정식 $g(x)=a$의 해 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

$a\ \ (0<a<1)$는 함수 $g(x)$의 그래프의 y절편 1 보다 작으므로 $g(x)=a$의 해의 개수는 3이고 크기순으로 차례로 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$라 하면 다음 그림과 같다. $(\alpha_1<-1,\ 0<\alpha_2<1<\alpha_3)$



$g(\alpha_1)=g(\alpha_2)=g(\alpha_3)=a$이므로

$h(\alpha_1)=h(\alpha_2)=h(\alpha_3)=f(a)=b-a^2\cdots$㉠

$h(-1)=f(g(-1))=f\left(\dfrac{4}{e}\right)=\left(\dfrac{4}{e}\right)^2-2a\left(\dfrac{4}{e}\right)+b$

$h(1)=f(g(1))=f(0)=b$

(가)에서 $|h(x)|=k$의 여섯 개의 근 중 가장 작은 근이 $y=h(x)$의 극소점의 x좌표이므로 $\alpha=\alpha_1$이다.

따라서 방정식 $|h(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수는 6이기 위해서는

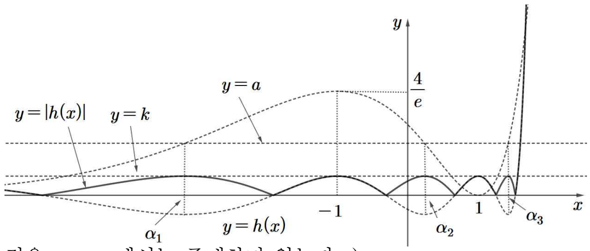
$|h(\alpha_1)|=|h(-1)|=|h(1)|$이어야 한다.

$x\to-\infty$일 때, $g(x)\to0+$이므로

$x\to-\infty$일 때, $f(g(x))\to b-$이다.

즉, $k=b$

⇨ ($y=k$는 함수 $y=h(x)$의 점근선이므로 $y=k$와 $y=h(x)$의 교



점은 $x<\alpha_1$에서는 존재하지 않는다.)

(나)에서 $h(-1)\times h(1)>0$이므로

$\left(\dfrac{4}{e}\right)^2-2a\left(\dfrac{4}{e}\right)+b=b$에서 $\left(\dfrac{4}{e}\right)\left(\dfrac{4}{e}-2a\right)=0$

$\therefore\ a=\dfrac{2}{e}$

$|b-a^2|=b$에서 $b=\dfrac{2}{e^2}$이다.

그러므로 $k=\dfrac{2}{e^2}$

$f(x)=x^2-\dfrac{4}{e}x+\dfrac{2}{e^2}$

$f\left(-\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e^2}+\dfrac{4}{e^2}+\dfrac{2}{e^2}=\dfrac{7}{e^2}$

$f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e^2}-\dfrac{4}{e^2}+\dfrac{2}{e^2}=-\dfrac{1}{e^2}$

$k=\dfrac{2}{e^2}$

따라서 $\dfrac{f\left(-\dfrac{1}{e}\right)-f\left(\dfrac{1}{e}\right)}{k}=\dfrac{e^2}{2}\times\dfrac{8}{e^2}=4$이다.

[랑데뷰팁]

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)=0$에서 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}f(g(x))=\lim_{t\to0+}f(t)=\dfrac{2}{e^2}$

이므로 $x<\alpha$일 때, $y=f(g(x))$와 $y=\dfrac{2}{e^2}$은 만나지 않는다.