

I. 삼각형 : 삼각형의 오심

다음으로는 삼각형의 오심에 대해 알아보시다. 삼각형의 오심에는 외심, 내심, 무게중심, 수심, 방심이 있습니다. 수심과 방심은 수능에 거의 등장하지 않으므로 이 글에서는 외심, 내심, 무게중심을 위주로 살펴보겠습니다.

3. 외심

외심의 정의는, 삼각형의 **외접원의 중심**입니다. 즉 삼각형 ABC가 주어졌을 때, 점 A, B, C를 모두 지나는 유일한 원의 중심이 외심이 됩니다. 일반적으로 외심은 O로, 외접원의 반지름은 R로 표기합니다. 외심의 성질은 크게 길이에 관한 성질과 각도에 관한 성질로 나눌 수 있습니다.

외심의 길이에 관한 성질은 다음과 같습니다.

- 1) $OA = OB = OC = R$ 이다.
- 2) O는 세 변의 수직이등분선의 교점이다.
- 3) sin 법칙 : $2R\sin A = a$

1)은 외심의 정의로부터 당연히 도출되고, 2)는 1) 성질로부터 증명할 수 있습니다. 사실은, 2)번을 외심의 정의라고 봐도 무방합니다. 삼각형 세 변의 수직이등분선의 교점은 외심으로 유일하기 때문입니다. 2)를 외심의 정의로 볼 경우 1)을 2)번 성질로부터 증명하면 됩니다. 3)은 이미 잘 알고 있을 sin 법칙입니다.

외심의 각에 관한 성질은 다음과 같습니다.

- 1) $\angle AOB = 2\angle C, \angle BOC = 2\angle A, \angle COA = 2\angle B$
- 2) $\angle OBA = \angle OAB = 90 - \angle C$

1)은 원주각과 중심각의 관계를 나타냅니다. 2)는 1)로부터 자연스럽게 증명되는 성질입니다.

4. 내심

내심의 정의는, 삼각형의 **내접원의 중심**입니다. 즉 삼각형 ABC가 주어졌을 때, 삼각형의 세 변 AB, BC, CA에 모두 접하는 유일한 원의 중심이 내심이 됩니다. 일반적으로 내심은 I로, 내접원의 반지름은 r로 표기합니다. 내심의 성질 역시 길이에 관한 성질과 각에 관한 성질로 나누어 생각할 수 있습니다.

내심의 길이에 관한 성질은 다음과 같습니다. 내접원과 BC, CA, AB의 접점을 각각 D, E, F라 둡시다.

- 1) $ID = IE = IF = r$ 이다.
- 2) $2AE = 2AF = b+c-a$, $BF = BD = c+a-b$, $CD = CE = a+b-c$ 이다.
- 3) $AE = AF = \frac{r}{\tan \frac{A}{2}}$

내심의 각에 관한 성질은 다음과 같습니다.

- 1) 내심은 세 각의 이등분선의 교점이다.
- 2) $\angle BIC = 90 + \frac{1}{2} \angle A$

1)은 내심의 다른 정의로 보아도 무방합니다. 2)는 1)로부터 자연스럽게 증명되는 성질입니다.

또한 내심은 삼각형의 넓이와 관련해서도 자주 등장합니다. 삼각형의 넓이를 s라 두면, 다음 식이 성립합니다.

$$s = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

이 성질 역시 자주 사용되니 기억하고 있도록 합시다.

5. 무게중심

무게중심의 정의는, 삼각형 세 중선 (꼭짓점과, 그 대변의 중점을 이은 선)의 교점입니다. 무게중심은 일반적으로 G 로 표기합니다. 무게중심의 성질은 크게 길이에 관한 성질과, 넓이에 관한 성질로 나누어서 볼 수 있습니다.

무게중심의 길이에 관한 성질은 다음과 같습니다. 내접원과 BC , CA , AB 의 접점을 각각 D , E , F 라 둡시다.

$$AG : GD = BG : GE = CG : GF = 2 : 1$$

무게중심의 넓이에 관한 성질은 다음과 같습니다. 이때, $|$ 은 삼각형의 넓이를 의미합니다.

- 1) $|\triangle ABG| = |\triangle BCG| = |\triangle CAG|$
- 2) $|\triangle ABG| : |\triangle BMG| = |\triangle ACG| : |\triangle CMG| = 2 : 1$

여기서 기억해야 할 사실은, 무게중심의 성질 중 길이에 관한 성질과 넓이에 관한 성질은 독립적으로 존재하는 것이 아니라 서로 깊게 연관되어 있다는 점입니다. 무게중심이 등장한다면 반드시 길이의 비율이 쓰일 것이므로 이를 활용하려는 방안을 생각해 보아야 합니다.