15. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
> (나) 함수 $f(x)$는 극댓값 7을 갖는다.

$f(1)=2$일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? [4점]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

(가)에서 $f(x)$는 y축대칭함수이므로 $f(x)=x^4+ax^2+b$라 둘 수 있습니다. 그런데 (나)에서 $f(x)$는 극댓값 7을 갖고 y축 대칭함수면 $x=0$에서 극댓값을 가지므로 $f(x)=x^4+ax^2+7$임을 알 수 있습니다.

마지막에, $f(1)=2$이므로 $f(x)=x^4-6x^2+7$임을 알 수 있습니다.
$f'(x)=4x^3-12x=0$, $x=\sqrt{3}$에서 극솟값을 갖고
$f(\sqrt{3})=-2$이므로 정답은 5번.

16. 두 실수 a, b와 수열 $\{c_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $(m+2)$개의 수
> $a,\ \log_2 c_1,\ \log_2 c_2,\ \log_2 c_3,\ \cdots,\ \log_2 c_m,\ b$
> 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
> (나) 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 항을 모두 곱한 값은 32이다.

$a+b=1$일 때, 자연수 m의 값은? [4점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

> 등차수열이므로 등차수열의 합을 씁시다.
> 그런데 싹다 더하지말고 $\log_2 c_1$ 부터 $\log_2 c_m$까지 더하면,
> $\log_2 c_1 + \cdots + \log_2 c_m = \dfrac{m(\log_2 c_1 + \log_2 c_m)}{2}$입니다.
> 그런데, (나)조건에서,
> $\log_2 c_1 + \cdots + \log_2 c_m = \log_2(c_1 \times \cdots \times c_m) = \log_2 32 = 5$
> 이므로
>
> $\log_2 c_1 + \cdots + \log_2 c_m = \dfrac{m(\log_2 c_1 + \log_2 c_m)}{2} = 5$입니다.
> 등차중항에 의해서 $\log_2 c_1 + \log_2 c_m = a+b = 1$이므로
> $m = 10$임을 알 수 있습니다. 끝

17. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 5^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따른다. 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. $\mathrm{P}(Y \le 2k)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $m \ne 10$) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.8413 ③ 0.9104 ④ 0.9332 ⑤ 0.9772

결국 $x=k$에서 교점이고 두 정규분포의 표준편차가 같으므로 $f(x), g(x)$는 위치만 다른 같은 개형의 곡선입니다.
해서 두 정규분포의 평균 $10, m$의 평균은 k이므로,

$$\frac{10+m}{2}=k. \quad \therefore m = 2k-10$$

$$\mathrm{P}(Y \le 2k) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{(2k)-(2k-10)}{5}\right) = \mathrm{P}(Z \le 2)$$

해서 답은 5번.

18. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \le \frac{(2n)!}{2^n} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{{}_2\mathrm{P}_1}{2^1}=1$이고, (우변)$=\boxed{(가)}$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \le \frac{(2m)!}{2^m}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} + \frac{{}_{2m+2}\mathrm{P}_{m+1}}{2^{m+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} + \frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}\times(m+1)!} \\ &\le \frac{(2m)!}{2^m} + \frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}\times(m+1)!} \\ &= \frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}} \times \left\{ \frac{1}{\boxed{(다)}} + \frac{1}{(m+1)!} \right\} \\ &< \frac{(2m+2)!}{2^{m+1}}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \le \frac{(2n)!}{2^n}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $p+\frac{f(2)}{g(4)}$의 값은? [4점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

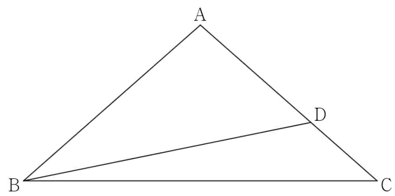
수열 빈칸은 빈칸의 앞뒤를 비교해서 생략된 연산,표현을
추론하는 과정이고 이 앞뒤비교가 안될시 지나온 텍스트에서
근거를 찾아오면 되는 뻔한 추론유형입니다.

(가)는 $n=1$을 대입해주면 1임을 뻔하게 알 수 있습니다.
(나) 조건으로 뛰어가서 위에 식과 비교하면,
앞수식은 동일하므로 생략. 뒷수식만 비교할 건데,

${}_{2m+2}\mathrm{P}_{m+1} = (2m+2)\times\cdots\times(m+2)$이므로
(나) 조건은 ${}_{2m+2}\mathrm{P}_{m+1}\times(m+1)! = (2m+2)!$ 입니다.

(다)조건으로 뛰어가면, 위에 두식은 더하기 형태인데
아래 수식은 곱형태이므로 위 식을 $\frac{(나)}{2^{m+1}}$로 묶어내서
곱형태로 만들어야함을 알 수 있습니다.
즉 $\frac{(2m)!}{2^m}\times\frac{2^{m+1}}{(2m+2)!}=\frac{1}{(m+1)(2m+1)}$입니다.
($\frac{(나)}{2^{m+1}}$로 묶어내면 남은 것은 $\frac{2^{m+1}}{(나)}$을 곱해준 식만 남으니..)

19. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형 ABC에서 선분 AC를 $5:3$으로 내분하는 점을 D라 하자. $2\sin(\angle\mathrm{ABD})=5\sin(\angle\mathrm{DBC})$일 때, $\dfrac{\sin C}{\sin A}$의 값은? [4점]



① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{11}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{9}{13}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

마지막에 $\sin$만 4번나오므로 누가봐도 사인법칙 활용하는 문항입니다. 문제에서 AC를 $5:3$내분한다 했으므로 $\overline{\mathrm{AD}}=5, \overline{\mathrm{DC}}=3$으로 둘 수 있습니다.

$\angle\mathrm{ABD}=\alpha$라 하고 $\angle\mathrm{DBC}=\beta$라 하면 조건에서 $2\sin\alpha=5\sin\beta$임을 일단 알고 시작합니다.

문제에서 묻는 것은 A, C에 관한 각정보이고, 각 A, C와 마주보는 변은 BD이므로 이 선분의 길이를 l이라 두고 문제를 풀어봅시다.

삼각형 ABD에서 $\dfrac{5}{\sin\alpha}=\dfrac{l}{\sin A}$입니다.

삼각형 DBC 에서 $\dfrac{3}{\sin\beta}=\dfrac{l}{\sin C}$입니다.

즉 $l=\dfrac{5\sin A}{\sin\alpha}=\dfrac{3\sin C}{\sin\beta}$이므로

$\dfrac{\sin C}{\sin A}=\dfrac{5\sin\beta}{3\sin\alpha}=\dfrac{5}{3}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{3}$입니다. 끝

20. 0이 아닌 실수 k에 대하여 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=3(x-k)(x-2k)$$

이다. 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 1 \text{ 또는 } x \ge 4) \\ \dfrac{f(4)-f(1)}{3}(x-1)+f(1) & (1<x<4) \end{cases}$$

의 역함수가 존재하도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위가 $\alpha \le k < \beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

결국, $g(x)$는 $f(x)$를 따라갔다가 $\dfrac{f(4)-f(1)}{3}(x-1)+f(1)$이라는 "$(1,f(1))$을 지나고 두 점 $(1,f(1)),(4,f(4))$의 기울기를 기울기로 갖는 직선"을 따라갔다가 다시 $f(x)$를 타고가는 곡선임을 알 수 있습니다.

그런데. 역함수가 존재해야하므로 항상 증가해야함을 알 수 있습니다.
(처음에 $x \le 1$에서 $f(x)$를 타고가는데 $f(x)$는 첨에 증가하므로)

즉 중간에 갈아탈 직선도 증가해야하고 곧 기울기가 양수인 것을 알 수 있습니다.

그럼 넘 쉽죠? $f(4)-f(1)>0$이여야 합니다.

그런데 $f'(x)=3x^2-9kx+6k^2$이므로
$f(x)=x^3-\dfrac{9k}{2}x^2+6k^2x+c$라 둘 수 있습니다.
굳이 $f(x)$를 구해야하는가? 네 그럼 $f'(x)$식은 왜 줬나요
최고차항계수까지 이쁘게.. 보자마자 식으로 하면 되겠구나ㅇㅇ 하면 됩니다.

계산해주면 $k<\dfrac{7}{4}$ 이란 범위를 얻습니다.

또한, $f'(1) \ge 0$이어야 하므로 $k \ge 1$입니다.
종합해주면 $1 \le k < \dfrac{7}{4}$ 계산하면 답은 4번.

21. 두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

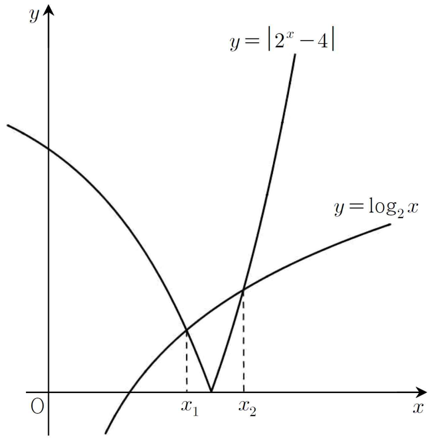
<보 기>

ㄱ. $\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6$

ㄴ. $(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1}) < 3$

ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2} > 8+\log_2(\log_3 6)$

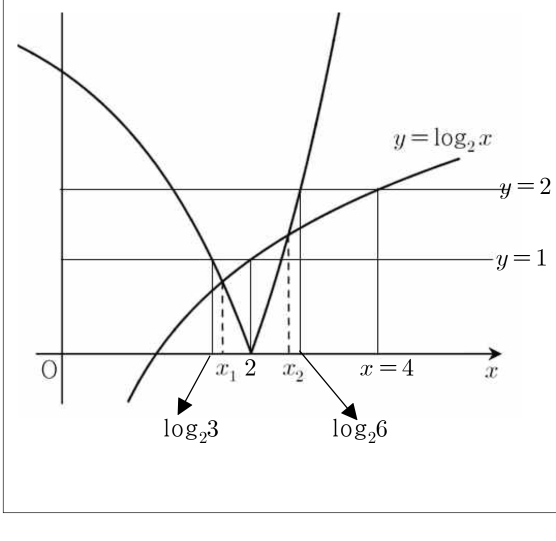
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄱ. O
항상 이런 부등식 문제가 나오면, “비교”문제이므로 모든 값을 하나의 속성으로 통일해서 볼줄 알아야 합니다.

지금 x_1, x_2가 등장했으므로 $\log_2 3$과 $\log_2 6$모두 x값으로 봐줄 수 있어야 합니다. 그런데, $\log_2 3, \log_2 6$은 왜 하필 등장했을까요 왜 하필 이 숫자가 나왔을까요. 항상 무의미한 값은 나올 수 없으므로 왜 하필 저 두 값인지를 빨리 찾아줘야 합니다.

$\log_2 3$은 $\log_2 x$에 $x=3$을 대입해도 되지만 그러면 y값이 됩니다. 우리가 필요한건 $\log_2 3$이라는 “x”값이므로 대입해볼 수 있죠.
대입해보면 $y=|2^x-4|$에서 1이라는 함숫값을 얻습니다.
또한 $x=\log_2 6$을 대입하면 2라는 함숫값을 얻습니다.
아래그림을 참고합시다.



ㄴ. O
넓이로 가볼까요?
x_2-x_1은 x값 차이이므로 밑변으로 보고
$2^{x_2}-2^{x_1}=(2^{x_2}-4)+(-2^{x_1}+4)$이므로 곡선 $|2^x-4|$에 x_1, x_2를 대입한 함숫값입니다. 이 둘의 합이므로 높이의 합이 되겠네요.
즉 양변을 2로 나눠서 생각하면,
$\dfrac{(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})}{2} < \dfrac{3}{2}$ 이 되고 결국 사다리꼴의 넓이와 $\dfrac{3}{2}$이라는 “넓이”를 비교하게 됩니다.
그런데 밑변 x_2-x_1은 $\log_2 6-\log_2 3$보다 작은 것을 왼쪽그림에서 손쉽게 알 수 있고, 그러므로 1보다 작습니다.
또한 x_1을 대입한 높이는 1보다 작고 x_2를 대입한 높이는 2보다 작으므로 $(2^{x_2}-2^{x_1})<3$임을 확실히 압니다.
그러면 끝. (눈대중으로 하면 안되고 왜 하필 3이라는 값과 비교하는지 확.실.히 나왔어야 합니다.^^)

ㄷ. X
식을 변형하면, $2^{x_1}-4+2^{x_2}-4 > \log_2(\log_2 6)-\log_2(\log_2 3)$ 인 것이 보여야 합니다. 즉 두 함숫값의 차이를 비교한 것이므로 그림에서 너무나 쉽게 틀린 것을 알 수 있습니다.

26. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-10 & (x \le a) \\ \dfrac{x^2+ax+4a}{x-a} & (x>a) \end{cases}$$

가 $x=a$에서 연속일 때, $f(2a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

연속이므로 결국 $a^2-10=\lim_{x\to a}\dfrac{x^2+ax+4a}{x-a}$ 입니다.

그런데, $\lim_{x\to a}\dfrac{x^2+ax+4a}{x-a}$에서 분모가 0이므로 분자도 0입니다.

$\therefore 2a^2+4a=0$, $a=-2, 0$

만약 a가 0이라면, 첫식에서 $-10=0$ 이므로 만족하지 않습니다.

그러므로 $a=-2$이고 식을 다시 써보면, (굳이 확인해보면)

$$a^2-10=\lim_{x\to a}\frac{x^2+ax+4a}{x-a}$$

$-6=\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{x+2}=-6$해서 만족입니다.

$f(2a)=f(-4)=16-10=6$

정답은 6

27. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d+e=10$
(나) ab는 홀수이다.

뭐 여러방법이 있겠으나 현장에서 문제풀 때 잘 모르겠으면
케이스 분류하는게 제일 낫습니다. 케이스 분류하기 위해 예시를
들다가 방향이 보이면 그 방향으로 끌고 가주면 되고
안보이면 쭉 케이스 나눠주면 됩니다. 케이스 나눠서 풀어볼까요

일단 (나) 조건에서 a,b모두 홀수여야함을 당연히 압니다.
또한 c,d,e는 모두 최소 1이므로 (자연수) $c+d+e$는 최소
3입니다.

해서 $a+b$는 최대 7이므로 $a+b=2$, $a+b=4$, $a+b=6$
세 가지 경우가 가능합니다. (a,b 홀수 이므로 $a+b$는 짝수)

1. $a+b=2$
$(a,b)=(1,1)$ 만 가능하고 $c+d+e=8$이므로 ${}_3H_5$

2. $a+b=4$
$(a,b)=(1,3),(3,1)$ 만 가능하고 $c+d+e=6$이므로 ${}_3H_3 \times 2$

3. $a+b=6$
$(a,b)=(1,5),(5,1),(3,3)$만 가능하고 $c+d+e=4$이므로
${}_3H_1 \times 3$

해서 다 더하면 정답은 50

28. 양수 a와 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$일 때, $f(x) = 2x^2 + ax$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = f(x) + a^2$이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 직선 $x = 3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

흠 정말 많이 나온 유형이라 절.대. 틀리면 안되는 문제였습니다.
일단 a가 양수이므로 $f(x)$의 그래프는 $0 \le x \le 1$에서 증가함수입니다.

(나)에서 $f(x) = f(x-1) + a^2$이므로
$1 \le x \le 2$범위에서 그려질 $f(x)$는 기존의 $f(x)$를 x축으로 1만큼 평행이동 후 y축으로 a^2만큼 평행이동해준 함수가 됩니다. 뒷범위도 마찬가지.

즉 구간이 1씩 커질 때마다 함수 $f(x)$는 a^2만큼 위로 올려져서 그려질텐데, 연속이므로 결국 $f(1^-) = f(1^+)$여야 합니다. $f(x) = 2x^2 + ax$에서 $f(1^-) = 2 + a$
$f(1^+) = f(0^+) + a^2 = a^2$이므로 $2 + a = a^2$이어야 합니다.
$\therefore a = 2$

$\int_0^1 2x^2 + 2x\,dx = \frac{5}{3}$이므로
$$\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{5}{3} + \left(\frac{5}{3} + 4\right) + \left(\frac{5}{3} + 8\right) = 17$$

29. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + cn \ (c\text{는 자연수})$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 각 항 중에서 3의 배수가 아닌 수를 작은 것부터 크기순으로 모두 나열하여 얻은 수열을 $\{b_n\}$이라 하자. $b_{20} = 199$가 되도록 하는 모든 c의 값의 합을 구하시오.
[4점]

$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + cn$에서 $S_n = n^2 + cn$으로 보면,
$S_n - S_{n-1} = 2n - 1 + c = a_n$이 됩니다.

즉, 굳~이 나열하자면 $a_n = 1+c, 3+c, 5+c, \cdots$ 가 되고
c값에 따라 짝수로만 구성되어있거나 홀수로만 구성될 수 있습니다.

그런데 원하는 값이 199이므로 홀수로만 구성이 되야함을
알 수 있습니다.

그런데, b_n이란 수열은 3의 배수를 제거한 수열이므로
홀수 중에서 3의 배수를 제거해줘야 합니다.

항상 예시를 들면서 이해해야하므로, $c = 2$라 하고 예시를 들어봅시다.

$a_n = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 \cdots$
$b_n = X, 5, 7, X, 11, 13, X, 17, 19, X \cdots$

해서 3개 당 1번꼴로 숫자하나가 지워짐을 알 수 있습니다.
이는 곧 3개의 연속된 숫자를 묶으면 1개의 숫자가 지워지고 2개의
숫자만 남는다는 것을 알 수 있습니다.

해서 20번째 항을 구하려면 총 30개의 항이 필요하고
이중 10개가 지워져서 20개의 항만 남습니다.

그런데 다음 두 예시를 봅시다.

1. $c = 2$일 때
$a_n = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 \cdots$
$b_n = X, 5, 7, X, 11, 13, X, 17, 19, X \cdots$

2. $c = 4$일 때
$a_n = 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 \cdots$
$b_n = 5, 7, X, 11, 13, X, 17, 19, X \cdots$

즉 둘다 $b_1 = 5$이지만 a_1은 3과 5로 차이가 있음을
알 수 있습니다.

해서, $b_{20} = 199$가 되게하는 b_n의 b_1값을 만드는 a_1은
두 개가 나온다는 것을 알 수 있습니다.

1. $a_2 = b_1$인 경우 (왼쪽해설에서 첫 번째 예시)
$a_{29} = b_{20}$이므로 $b_{20} = a_1 + 2 \times 28 = a_1 + 56$
즉 $a_1 + 56 = 199$이므로 $a_1 = 143$
그런데 $a_1 = 1 + c$이므로 $c = 142$

2. $a_1 = b_1$인 경우 (왼쪽해설에서 두 번째 예시)
$a_{30} = b_{20}$이므로 $b_{20} = a_1 + 2 \times 29 = a_1 + 58$
즉 $a_1 + 58 = 199$이므로 $a_1 = 141$
그런데 $a_1 = 1 + c$이므로 $c = 140$

그러므로 c의 모든 값의 합은 282^^

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x(x+a)^2 & (x<0) \\ x(x-a)^2 & (x\geq 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+t$의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 최댓값은 5이다.
(나) 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 개수는 2이다.

$f'(0)$의 값을 구하시오. [4점]

이런 문제는, 늘, 항상, 매우, 많이, 나왔죠
풀이는 두가지로 갔습니다.
1. 곡선& 직선
2. 방정식

1. 곡선&직선
: $f(x)$그리고 $y=4x+t$를 그려가면서 접선인 상황 위주로 체크할 것입니다.

2. 방정식
$f(x)=4x+t$ 의 실근개수가 $g(t)$인데 식 자체를 $f(x)-4x=t$로 해서 $f(x)-4x$ 곡선을 그리고 $y=t$라는 직선을 그려서 푸는 방법입니다. 물론 $f(x)-4x$의 극값 / 점근선 / 구간끝값 이 변화의 포인트가 될 것입니다.

하도 많은 사람들이 1번으로 풀것같아서(사실안봄) 2번으로 가보겠습니다.

$$f(x)-4x=\begin{cases} x(x+a)^2-4x \ (x<0) \\ x(x-a)^2-4x \ (x\geq 0) \end{cases}$$

식을 좀 전개해주면

$$f(x)-4x=\begin{cases} x^3+2ax^2+(a^2-4)x \ (x<0) \\ x^3-2ax^2+(a^2-4)x \ (x\geq 0) \end{cases}$$

가 됩니다.

그런데 일단 교점 개수의 최댓값이 5개 여야 하므로 $x<0$, $x\geq 0$범위에서의 두 곡선 모두 극대 극소가 존재해야 합니다. 또한 불연속점 개수가 2개 나온다는 것은, 결국 "극값"을 두 번만 지난다는 것인데, 곡선은 두 개고 그럼 극값은 총 4개이므로 이 4개의 극값이 모두 다른 것이 아닌 총 2개의 값만 존재해야 함을 압니다.

해서 두 곡선의 극댓값은 서로 같고 극솟값도 서로 같아야 합니다.

그런데 !!! 두함수는 원점대칭관계이므로(x대신 $-x$대입하면 확인) 극댓값이 α라면 극솟값은 $-\alpha$가 나와줘야 합니다.

즉. $x<0$만 보면, $f(x)-4x=x^3+2ax^2+(a^2-4)x$
함수의 극댓값 + 극솟값 =0이므로 $f(x)-4x$의 세 실근 $\alpha, \beta, 0$은 등차수열을 이룹니다.
(혹은 $f(x)-4x$는 $x=\beta$에서 점대칭)

그런데 세 실근의 합 = $-2a$(근과계수와의관계) 이므로
$\alpha=-\dfrac{2a}{3}, \beta=-\dfrac{4a}{3}$가 됩니다. 해서 $f\left(-\dfrac{2a}{3}\right)-4\left(-\dfrac{2a}{3}\right)=0$
임을 이용하면 $a=6$이 됨을 알 수 있습니다.

정답은 , $f'(0)=a^2=36$

★★★★어떤 방법으로 풀든 조건만족하는 개형만 구해주면 그 다음은 연산의 영역이라 각종 꿀tip연산이 많은 문제입니다.
그 중 하나라 보고 여러 풀이를 생각해보세요.

★총평
수능을 준비하는 나형학생들은 반드시 풀어봐야하는 시험지라 생각합니다. 문제 유형부터 구성까지 최근 문제들 중 가장 수능에 가깝다 생각되며 문제 퀄리티 또한 좋습니다(쉽지만^^)

하지만 수능에 가깝다는 것은 곧 대부분 뻔한 유형이다. 라고 바꿔 말할 수 있는만큼, 수능이 완벽하게 준비된 학생일수록 정말 뻔하디 뻔한 시험지라고 느꼈을겁니다. 혹시 그렇게 못느꼈다면. 그렇게 느끼기위한 공부가 먼저아닐까요. 지금 시기일수록 조금 마구잡이의 학습이 진행되는 중일 수 있습니다. 중간중간 잘 정돈해주고, 알맞은 사고과정과 그 사고과정을 적용하는 느낌의 학습. 항상 잊지마시길 바랍니다.