수학 고득점

규토 N제 나형

by 규토

orbi.kr

1. 규토 수학 고득점 N제 오리엔테이션

2. 문제편

3. 해설강의편

1

규토 수학
고득점 N제
오리엔테이션

1.1 책소개

출판하고자 억지로 만든 문제가 아닌 과외학생들을 위해 정성과 애정으로 만든 문제

안녕하세요. 규토입니다. :D 처음 문제를 만들게 된 계기는 어떻게 하면 과외학생들에게 더 양질의 수업을 할 수 있을까 고민하던 중에 자작문제를 만들게 되었습니다. 문제를 풀 수 있니? 가 아닌 이런 것도 있으니 꼭 알아가렴 이라는 마음가짐으로 만들었습니다. 한 문제당 평균 3시간 이상씩 치열하게 고민하면서 문제를 만들었고 어떤 문제들은 하루 종일 고민한 적도 있었습니다. 창작을 하는 과정이 정말 힘든 것은 사실입니다. 그렇지만 만든 문제를 빨리 제자들에게 알려주고 싶은 기쁨과 설렘이 훨씬 더 크기 때문에 계속 만들 수 있었습니다.

한 문제를 풀어도 여러 문제를 푼 것처럼 느껴지는 문제

원래 문제를 만들 때 2~3개의 예제 문제를 적절하게 섞으면 4점짜리 문제가 탄생합니다. 그 2~3개의 예제문제들의 연결 관계를 파악해 풀어내는 것의 난이도에 따라 문제의 난이도가 달라집니다. 보시면 아시겠지만 제 문제들은 대부분 4~5개의 연결 관계를 파악해야 풀 수 있는 문제가 대다수 입니다. 한 문제를 풀더라도 2~3문제를 푼 것 같은 느낌이 드는 것도 이 때문입니다. 그러니 당연히 어려울 수밖에 없습니다. 4~5개의 연결 관계를 계속 해석하다보면 2~3개짜리 연결 관계를 묻는 문제들은 자연스럽게 쉬워질 수밖에 없다고 생각합니다. 수능에서 수학을 치는 이유는 사고력과 논리력을 평가하기 위해서입니다. 단순계산이 아닌 사고력을 측정하는 것입니다. 최대한 사고력을 자극하는 문제들을 만들기 위해 노력했습니다. 총 115문제로 단기간에 수학적 사고력과 문제 해결력을 높일 수 있습니다.

모든 문항마다 테마가 있는 문제

전 문제를 만들 때 항상 테마가 있습니다. 어떤 개념을 알려주고 싶을 때 문제로 그 정보를 전달하려고 노력합니다. 각 문제마다 어떻게 하면 과외학생들에게 효과적으로 내용을 복습하게 하고 사고력을 기를 수 있을까 치열하게 고민했습니다. 틀리셔도 됩니다. 그렇지만 그 개념들을 모조리 흡수해서 확실히 자기 것으로 만들면 다른 문제를 풀 때 큰 도움이 될 수 있다고 생각합니다. 다년간 수능을 치면서 느꼈던 것과 아이들이 생소해 하는 것을 어떻게 하면 전달 할 수 있을까 항상 생각합니다.

4점짜리 자작문제들만 수록

쉽지만 중요한 4점부터 까다로울 수 있는 준킬러급 4점은 물론 어려운 킬러급 4점까지 모두 수록하였습니다. 따라서 1등급, 2등급을 변별하는 문제들만 집중적으로 대비하실 수 있습니다.

기존과 차별화된 해설지

기존의 딱딱한 해설지가 아니라 저자와 소통하는 느낌을 주도록 구어체로 만들었고 저자에게 직접 과외를 받는 느낌이 들도록 구성하였습니다.
① 출제의도 ② 해설 ③ 출제자의 한마디 이렇게 3가지로 구분되어있고 보충이 필요한 부분은 [1] 표시해서 별도로 보충 설명하였습니다. 단순히 문제만 푸는 것이 아니라 복합적으로 학습할 수 있도록 구성하였습니다.

1.2 검토후기

최이고니 / 울산대학교 의학과

안녕하세요. 이번 규토 고득점 N제의 검토를 맡게 된 최이고니입니다. 고3때도 반수를 할 때도 규토 N제의 100%공부법을 따라가며 규토를 풀었던 학생으로서 이번에 검토에 참여하게 되어서 즐거운 마음으로 임했습니다. 수학은 암기와 거리가 멀다고 생각할 수 있지만 적어도 수능수학에 관해서 어느 정도는 암기를 해야 할 부분이 있습니다. 평가원에서 요구하는 사고력 또한 그런 기본적인 암기를 통해 문제를 해석한 뒤에 발휘해야 하는 부분이라고 생각합니다. 규토 N제는 그런 기본적인 암기를 해야 할 부분을 정확하고 친절하게 짚어줍니다. 처음에 문제가 안 풀리더라도 조급해하지 마시고, 책에서 알려주는 여러 테크닉들을 공부하면서 문제를 해석하는 능력을 기르세요! 정말로 당장 풀리지 않아도 괜찮습니다. 쉽게 가려는 유혹을 이겨내시고, 규토 N제 100% 공부법을 따라가며 문제를 해석할 수 있는 능력과 평가원에서 요구하는 사고력 모두를 잡아가시길 바랍니다.

김주은 / 울산대학교 의학과

안녕하세요. 규토 고득점 N제 검토를 맡은 김주은입니다. 점점 진화하는 규토 N제를 보고 있으니 수험생 여러분들이 부러울 따름입니다. 규토 고득점 N제는 킬러 문항을 푸는 데 있어 필요한 것들을 컴팩트하게 다 챙겨줍니다. 실질적으로 수험생의 입장에서 어려운 문제를 봤을 때 가져야 할 사고의 흐름을 잘 적용할 수 있도록 자세하게 보여주고, 틀리기 쉬운 포인트들을 따로 강조하여 그 어느 디테일도 놓치지 않게 해 줍니다. 규토 고득점 N제를 열심히 풀고 규토선생님의 설명을 잘 체화시키고 나면 킬러 문항들을 훨씬 더 잘 다루시게 될 겁니다. 모두들 파이팅하세요!!

송지훈 / 인하대학교 수학과

교육과정이 바뀐 첫해 많은 수험생 분들이 문제집 선정에 어려움을 겪으시리라 생각합니다. 규토 고득점 N제는 이러한 시기에 수험생 분들이 믿고 고르시라고 추천할 수 있는 교재입니다. 수능 수학을 대비하는 데에 기출의 중요성은 누구나 다 아는 사실입니다. 하지만 요즘 시험들은 기출만 본다고 1등급 이상에 도달하기 쉽지 않습니다. 규토 고득점 N제는 1등급 이상을 목표로 하는 수험생분들을 위해 기출에 이미 나왔던 소재 혹은 그에 대한 응용이나 나오지 않았던 소재들을 바탕으로 한 문제들을 수록하여 이를 학습하는 수험생 분들이 1등급 이상으로 도약할 힘을 길러줍니다. 이 교재를 푸시는 수험생 분들은 해당 책을 잘 활용하여 원하는 꿈을 이루시길 기원합니다.

조정아 / 울산대학교 의학과

저는 규토 n제를 이번 가형 검토를 맡게 되면서 문제를 처음 접해보게 되었습니다! 제가 수험생일 때도 익히 들어 알고 있었지만, 기회가 없었죠. 그 때 제가 이 문제집을 풀어봤더라면 킬러문제를 더 손쉽게 푸는데 많은 도움을 받았을 텐데 아쉽네요.ㅎㅎ
여기에 있는 문제들은 평가원 문제들과 여러모로 닮아있고 여러분들의 수능적 사고력을 길러주기에 충분합니다. 푸시면서 까다로운 문제들도 있겠지만 이 문제들을 먼저 접한다는 것이 큰 행운이라고 생각하시고 열심히 공부하시길 바라요~~! 코로나바이러스 때문에 여러분들 많이 지치셨을 텐데 고지가 별로 남지 않았어요! 피이팅입니다!!

박도현 / 성균관대학교 자연과학

안녕하세요, **규토 고득점 N제**의 검토를 맡은 박도현입니다.
수험생 여러분들은 이 책을 구매하실 때 어떤 마음을 가졌습니까? '수학 1등급은 받고 싶은데 어떤 책을 풀지?', '규토 라이트도 다 풀었으니 고득점을 한번 해볼까?', '규토 N제가 그렇게 어렵다고 들었는데, 킬러 대비 겸 한번 풀어볼까?' 등등 있었을 것입니다. 그러나 수험생 여러분들은 자신의 실력을 정확히 아십니까?
고득점 N제 가형은 수학 고정 2등급이상 나형은 고정 1등급이상 또는 라이트 N제를 완벽히 체화한 사람들에게만 보기 적합한 책입니다. **고득점 N제는 어렵습니다.** 기본적인 수학의 개념을 완벽하게 숙지하지 않으면 이 책을 보지 마십시오.
그러나 진입장벽이 높은 만큼, 고득점 N제는 여러분들을 확실히 **고정 1등급으로 올려줄 책**입니다. 킬러문제들은 비주얼, 아이디어, 계산들이 충격과 공포를 주며 수험생 여러분께 거부감을 줍니다. **이 거부감을 극복하게 해주는 책은 바로 규토 고득점 N제입니다.** 순수 자작 문제로만 구성된 고득점 N제는 평가원과 교육청에서 사용하는 킬러 문제들의 유형들을 총집합하였고, 평가원의 최신 트렌드를 항상 따라가는 최고의 퀄리티 문제들로 구성되어 있습니다. 본편보다 2~3배 더 두꺼운 해설편이 규토 고득점 N제의 본질입니다, 왜냐하면 **해설편은 킬러들을 공략하는 방법들을 알려주기 때문입니다.** 즉 '킬러 유형 개념서'입니다. 과외선생님처럼 편안한 어조로 킬러들을 풀 때 가져야 할 마음가짐, 바로바로 생각이 나야 할 문제 풀이 technic들을 알려줍니다. 또한 다른 풀이도 접근하게 해주는 가이드, 해당 문제를 어떻게 변형해서 출제할 수 있는지도 알려줍니다.
킬러문제들은 노력으로 정복할 수 있습니다. 규토선생님의 **〈규토 N제 100% 공부법〉**을 실천하게 된다면, 여러분들도 수학영역 1등급으로 올라설 수 있습니다. 저의 2020 수능 수학 가형 만점을 가져다준 책인 만큼, 규토 고득점 N제는 여러분들에게 수능 당일 꽃길을 걷게 해줄 것임을 저는 확신합니다.

1.4 규토의 생각

규토n제를 구매하신 수험생 여러분 모두 반갑습니다. ~ :D

앞의 오리엔테이션에서는 형식적인 "틀"안에서 이야기를 했다면 이번에는 여러분과 편하고 자유롭게 이야기 해보려고 합니다~

편하게 질문을 받아볼까요~ 오! 저기 빨간 옷 입은 귀여운 여학생 말해보세요!

Q. 규토 고득점 N제 2021 난이도가 어떻게 되나요?

사람마다 느끼는 난이도가 다르겠지만 최대한 객관적으로 말씀드릴게요ㅎㅎ

수학1 : 쉬운 4점~준킬러급 4점 정도이고 삼각함수와 수열위주로 구성되어 있습니다.

수학2 : 다항함수 개형 추론은 반드시 맞게 하겠다는 일념으로 만들었습니다. +_+ !
전반적으로 평가원보다 어렵습니다.

확통 : 진짜 현실적인 난이도로 구성하였습니다. 요번 규토 고득점 n제 2021 확통은 경우의 수, 확률에 대한 감이 떨어질 때 다시 살리는 용도로 만들었습니다. 과한 것은 다 빼고 수능에 걸맞는 난이도로 구성하였습니다. 전체적으로 난이도가 비슷합니다. 1등급과 고득점에 영향을 줄 수 있는 27~28번 준킬러 확률, 경우의 수에 초점을 두었습니다.

답변이 되셨나요? ㅎㅎ 또 없으신가요~ 저쪽 안경 쓴 남학생! 말해보세요~

Q. 기출은 어느 정도 풀고 문제집을 사야하나요?

꼭 기출문제를 체화시키고 보셨으면 좋겠어요. 기출문제를 보자마자 풀이과정이 떠오를 정도 일 때 푸시는 것을 권장합니다. 규토 n제 해설에서 복습으로 추천드린 기출문제가 문제를 풀 당시 떠올랐다면 더할 나위 없이 좋겠죠? ㅎㅎ권장 등급은 나형 1등급(+기출완료)입니다. 그리고 만약 자신이 안정적인 1등급이 나온다면 시간을 재고 푸는 것도 방법이 될 수 있습니다. (킬러의 경우 10~15분 정도 잡고 풀어보세요~)
고득점 가형과 다르게 나형은 라이트 N제와 밀접하게 연계하여 설명하였습니다. (고득점 N제 나형 해설에 같이 보면 좋은 라이트 N제 참고문항과 관련 개념페이지 수록) 나형 1등급 컷인 분들은 라이트 N제를 풀고 고득점 N제로 넘어가시길 권합니다. 빈틈을 메워주고 더욱 더 단단하게 만들어 줄겁니다. 개인적으로 고득점 N제 가기전에 나형분들은 라이트 N제를 하고 가셨으면 좋겠습니다.. 진짜 막힘없이 풀면 3일 컷도 가능합니다. 사실 그렇게 쉽지도 않습니다. 고득점 N제에 넣어도 될 만한 자작문제도 라이트 N제에 다수 수록하였습니다.

또 다른 분 계시나요~ 편하게 질문하세요~ 저기 박보영 닮으신 여학생! 말해보세요~

Q. 어떤 식으로 규토 n제를 공부를 해야할까요?

책에 규토 n제 100% 공부법이라고 적어놨어요.(앞에서 봤죠??ㅎ) 효과를 극대화하기 위해서 꼭 그렇게 해보셨으면 합니다. ~아니 꼭! 제발 그렇게 해보셨으면 합니다. 아마 대다수의 학생들이 양치기 용도로 규토 n제를 대할 것 같아요. 여러 커뮤니티를 잘 살펴보면 규토 n제 O일 컷 가능? 이라는 말을 종종 볼 수 있는데요. 이건 정말 미친 짓이라고 생각해요. 문제만 풀면 정말 아무것도 남지 않습니다. 아 뭔가를 해냈구나! 라고 다소 기분만 좋을 뿐입니다. 시간이 지나면 어짜피 기억나지도 않습니다. 바가지에 구멍 뚫어 놓고 물을 들이 부어보세요. 처음에는 막 넘칠 것처럼 보이지만 시간이 지나면 한 방울도 남지 않습니다. 복습도 열심히 하고 치열하게 고민(자기 스스로 논리력과 사고력을 자극해야 합니다)해야 질적 성장이 일어난다고 생각합니다. 규토n제 100% 공부법에 적혀있는 대로 하시는 것이 best입니다. :D

아주 참여도가 좋네요 ㅎㅎ 저쪽에 N수의 포스를 뿜고 계신 아저씨(?!) 장난이고요. 남학생 말해보세요~

Q. 규토 n제 문항의 성격이 궁금합니다!

많은 분들이 오해하고 계시는 부분이 있는 것 같습니다. 규토 n제도 강의 교재입니다. 다만 다른 강의 교재와는 다르게 제가 책 속에 있을 뿐이죠. 그래서 해설편이 문제편보다 3.5배나 더 두껍습니다.
모든 문항들은 과외학생들을 위해서 만든 문제들입니다. 만들 당시에도 "현실성을 추구해서 모의고사 스타일로 만들어야지!" 라는 생각은 1도 하지 않았습니다. 그런 문제집들은 시중에 많으니까요. "어떻게 하면 한 문제를 풀면서 그동안 배웠던 스킬들과 교과개념들을 복습할 수 있게 만들지? 그리고 수능이 요구하는 사고력과 논리력을 향상시킬 수 있는 방법이 없을까?"를 고민한 끝에 만들게 되었습니다. 그렇기에 시중문제들과 달리 2~3개의 연결관계가 아닌 4~5개의 연결관계(+모래주머니 효과)를 풀어내도록 제작하였습니다. (다만 2021개정을 하면서 2020에 수록된 문제 중 퀄리티가 떨어지거나 case가 지나치게 과도한 문항은 삭제시켰습니다.) 애초에 책 표지 뒤에도 써있지만 출판하고자 만든 문제들이 아니기 때문입니다. 그렇기에 문제만 풀고 마는 식, 다시 말해 양치기로만 문제집을 대하는 것은 절대 추천하지 않습니다. 양치기 하려면 다른 문제집을 알아보세요.
규토 n제는 해설을 완전히 정독하고 자기 것으로 만들어야지 규토를 풀었다고 말할 수 있습니다. 애초에 강의교재로 만든 것이니까요. 일종에 분석서? 같은 개념으로 보시면 될 것 같습니다. 제가 직접 만들었기 때문에 출제의도가 무엇이고 그 문제에 사용된 중요한 개념들, 같이 풀어보면 좋을 것 같은 기출문제, 코멘트 등이 자세히 수록되어 있습니다. ㅎㅎ또한 구어체로 만들었기 때문에 해설을 읽다보면 제가 말하는 소리가 들리도록 만들었습니다. 그래서 해설지라고 하지 않고 해설강의라고 변경하였습니다. :D

자 마지막 한 분만 더 받을게요~ 저기 회색 후드티 입고 있는 남학생 ! 말해보세요

Q. 오늘 배송을 받았습니다. 풀어봤는데 수학2가 많이 어려워요. 괜찮을까요?

잘 안 풀리시는 것이 정상입니다 ㅎㅎ 그만큼 많이 성장할 수 있다는 것이니 너무 상심하지마세요~ 최대한 100퍼센트공부법에 적힌대로 해보세요. 보통문제들과는 다르게 한 문제씩 풀어보고 해설에서 배운 내용들을 다른 문제에 적용시켜보세요.(한 번에 여러 문제들을 풀고 한꺼번에 해설을 보시지 마세요.) 그냥 문제만 풀면 아무것도 남지 않아요. 그 문제를 완벽히 체화시키고 넘어가는 것이 좋습니다. 난이도 순서대로 배치했기 때문에 점진적으로 사고를 확장하실 수 있습니다. 그러니 너무 겁먹지 마세요 ㅎㅎ 규토 n제에 있는 문항들은 보통문제(2~3개의 연결관계)와는 다르게 4~5개의 연결관계와 복잡한 case분류를 하도록 제작했습니다. 운동선수들이 모래주머니를 차고 훈련하는 것과 마찬가지 효과를 얻도록 만들었습니다. (지금은 어려우실 수 있지만 나중에 체화하시고 시중문제들을 보시면 답이 너무 그냥 딱 나온다는 인상을 받게 되실 거예요. ㅎㅎ)
그리고 모든 문제들이 손쉽게 풀리면 그게 무슨 도움이 되겠습니까..기분은 좋을 수 있겠죠..그렇지만 틀린 것을 정복할 때! 바로 그때 질적 성장이 일어난다고 생각해요~ 해설도 자세히 써놨으니까(진짜 옆에 앉혀놓고 과외해준다는 생각으로 작성했습니다 흐흐) 이해하시는데 큰 무리는 없을 거예요 ㅎㅎ 화이팅입니다! 너무 기죽지마세요 그게 정상입니다. 양보단 질로 갑시다. 빨리 문제집을 끝내야지 보다는 (진짜 그건 미친짓이라고 생각해요..한번 보고 넘어가면 누누이 얘기하지만 딱히 도움이 되지 않습니다. 약간의 뿌듯함만 있을 뿐이에요.) 질적 성장이 일어날 수 있도록 치열히 고민해보고 복습도하고 (100퍼센트공부법으로 하시는게 베스트입니다. 저도 그렇게 공부했었고 많은 과외학생들의 성장을 눈으로 봤습니다.) 그러셨으면 좋겠어요 ㅎㅎ

많은 학생들을 만나 보았는데요. ㅎㅎ 또 다른 궁금한 점(규토 N제 문제 질문 등)이 또 있으시면
eric9579@naver.com 으로 언제든지 메일 보내주세요~ ㅎㅎ

맺음말

지금으로부터 16년 전 중학교 2학년이었던 규토는 "버킷리스트"라는 것을 작성하게 됩니다.

많은 항목들이 있었지만 그 중에서 가장 기억에 남는 것은 바로 저 만의 책을 만드는 것이었습니다.

그로부터 12년 후 규토 수학 고득점 N제를 발간하게 됩니다.

첫 책을 받았을 때의 감동... 아직도 잊을 수가 없네요..ㅠㅠ

벌써 4년이라는 세월이 흘렀네요.

규토 수학 고득점 n제 2017 ⇒규토 수학 고득점 n제 2019 ⇒ 규토 수학 고득점 n제 2020 (가/나)

에 이어 올해 처음 출판되는 규토 수학 라이트 N제 2021 (수1/ 수2/ 확통) 와

규토 수학 고득점 N제 2021 가/나 까지 아주 감개무량하네요. ㅎㅎ

내년에는 규토 수학 라이트 N제 2022 (수1, 수2, 확통, 미적분, 기하), 규토 수학 고득점 N제 (수1+수2, 미적분, 기하)를 모두 출판하는 것이 목표입니다.

계속해서 발전해 나가는 규토n제가 되겠습니다! 내년 개정판은 더 더욱 좋아지겠죠?-_-;;

규토 n제를 푸시는 모든 분들께 감사의 말씀을 전합니다. (_ _)

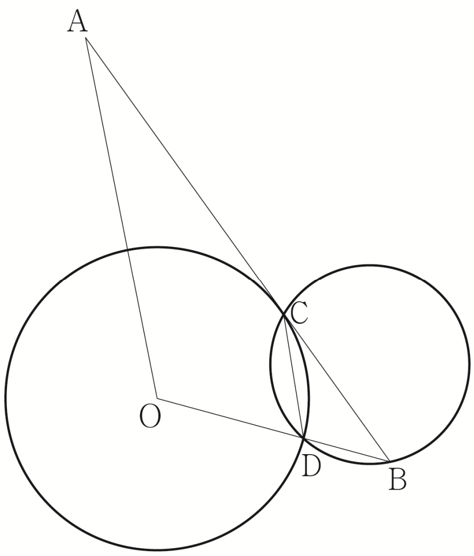
★ 참고

네이버 블로그 (규토의 특별한 수학)를 이웃추가하시거나 오르비에서 (닉네임 : 규토) 팔로우를 하시면

규토 N제에 대한 최신 소식을 누구보다 빠르게 받아 보실 수 있습니다.~

05

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원이 삼각형 OAB의 변 AB에 접한다. 이때의 접점을 C라 할 때, $\overline{AC}=2\overline{BC}$이다. 원과 선분 OB와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 S_1, 삼각형 BCD의 넓이를 S_2라 할 때, $2S_1=15S_2$이다. 삼각형 BCD의 외접원의 넓이는 $k\pi$이다. k의 값을 구하시오.



√ 해설 17p

03

√ 해설 97p

사차함수 $f(x)$는 $f'(3)=f(3)$ 이고, 다항함수 $g(x)$는 $g'(0)=3$ 이다. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq 0) \\ g(x) & (x<0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a<0$, $b<0$ 인 임의의 두 실수 a, b 에 대하여

$$\frac{b}{h(b)-36}=\frac{a}{h(a)-36}$$ 이다.

(나) 함수 $|h(x)|$ 는 $x=p$, $x=3$, $x=4$ 에서만 극솟값을 갖는다.

$\frac{h(8)}{p}$ 의 값을 구하시오.

04

최고차항의 계수가 1이고 $\left(\dfrac{f'(k)}{k}\right)^k = 1\,(k=1,\ 2,\ 3)$을

만족시키는 사차함수 $f(x)$에 대하여 집합 S를

$$S = \left\{ x \mid \int_1^x \{f'(t)-t\}dt = 0 \text{ 이고 } x \neq 3 \right\}$$

라 하고, $n(S)=2$일 때, 집합 S의 모든 원소의 합은?

① $\dfrac{10}{3}$ ② $\dfrac{11}{3}$ ③ $\dfrac{14}{3}$ ④ $\dfrac{17}{3}$ ⑤ $\dfrac{20}{3}$

출제의도

① $\left(\dfrac{f'(k)}{k}\right)^k = 1$ 식을 통해 $f'(2)=2$ or -2 로 case 분류할 수 있는가?
② $n(S)=2$ 조건을 활용할 수 있는가?
③ $f(x)$ 에 관해 식 세우기 !

보충 설명 +α

해설강의

$\left(\dfrac{f'(k)}{k}\right)^k = 1$ (단, $k=1,\ 2,\ 3$) 이라고 했으니까 k에 각각 대입해보면

$f'(1)=1$

$$(f'(2))^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} f'(2)=2 \\ f'(2)=-2 \end{cases}$$

$(f'(3))^3 = 27 \Rightarrow f'(3)=3$

($f'(2)=2$, $f'(2)=-2$가 될 수 있는 것이 point !)

이렇게 case 분류할 수 있겠죠?

① $f'(1)=1,\ f'(2)=2,\ f'(3)=3$
② $f'(1)=1,\ f'(2)=-2,\ f'(3)=3$

① $f'(1)=1,\ f'(2)=2,\ f'(3)=3$

조심하세요!
$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 이니까 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수는 4가 되겠죠?

자 이제 식 세우기를 해봅시다!
$f'(x)=4x^3+ax^2+bx+c$ 라고 두고 문자가 3개이고 식이 3개 이니까
풀 수 있겠죠?
그렇지만 ! 더 효과적으로 식 세우는 방법을 알려드리고자 이 문제를 만들었어요.
일단 $f'(1)=1,\ f'(2)=2,\ f'(3)=3$ 에서 오른쪽 항을 왼쪽으로 넘기면
$f'(1)-1=0,\ f'(2)-2=0,\ f'(3)-3=0$ 이렇게 되겠죠?

여기서 $f'(1)\ f'(2)\ f'(3)$ 를 $f'(x)$ 로 변환하면
$-1\ -2\ -3$ 을 $-x$ 라고 쓸 수 있겠네요.

$f'(x)-x=h(x)$ 라고 하면 $h(1)=0,\ h(2)=0,\ h(3)=0$ 을 만족하므로
$(x-1)(x-2)(x-3)$ 을 인수로 가지겠죠? 또한 $f'(x)$가 삼차함수니까 $h(x)$는
당연히 삼차함수가 돼요. 여기서 $-x$ 는 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수에 영향을 끼치지
않으니까 $h(x)$ 의 최고차항의 계수는 4가 되겠죠?
결국 $h(x)$ 는 최고차항이 계수가 4인 삼차함수군요 !
$\therefore h(x)=f'(x)-x=4(x-1)(x-2)(x-3)$

따라서 [1] $f'(x)=4(x-1)(x-2)(x-3)+x$ 라는 식을 세울 수 있어요.

$\displaystyle\int_1^x \{f'(t)-t\}dt=g(x)$ 라고 보면

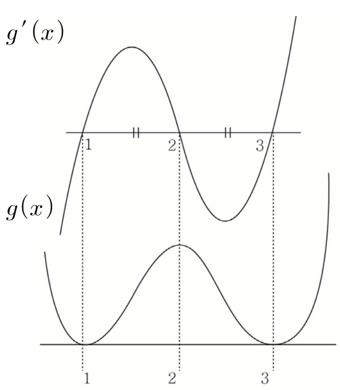
$$S=\left\{x \mid \int_1^x \{f'(t)-t\}dt=0 \text{ 이고 } x\neq 3\right\}$$

$\Rightarrow\ S=\{x \mid g(x)=0 \text{ 이고 } x\neq 3\}$

(기억하세요! 이 technic! $g(x)$ 로 보는 순간 문제를 굉장히 쉽게 접근할 수 있어요.)

$g'(x)=f'(x)-x$ 와 $g(1)=0$ 을 뽑아먹을 수 있겠네요.
(거의 기계처럼 나와야 해요~)

$f'(x)-x=4(x-1)(x-2)(x-3)$ 이기 때문에 그림을 그리면



[2] $g'(x)$가 $(2,\ 0)$ 에 점대칭 되어져 있으니까
x축과 둘러싸인 넓이가 서로 같겠죠?
따라서 $g(x)$를 그리면 $x=2$에 대칭된
사차함수가 나와요.
$g(1)=0$ [3] x축 설정 ! (다음페이지에 설명)

$g(x)=0$ 이 되는 것은 $x=1,3$ 이죠?
그렇지만 $x\neq 3$ 이기 때문에 $x=1$만 돼요.
따라서 $n(S)=1$이니까 조건을 만족하지 않겠죠?

보충 설명 +α

1) 처음에는 어렵지만 계속 연습
하다보면 너무나 당연히
식을 세울 수 있을 거예요.

<참고>
라이트 N제 수2 P.129

ex)
최고차항의 계수가 1인
삼차함수 $f(x)$에 대하여
$f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=6$
$f(x)=?$
한번 적용시켜 보세요.
다음 페이지에 답을 적어
놓을게요.

2) $g'(x)$가 $(2,\ 0)$에 점대칭
되어져 있는 것을 직관적으로
보고 알 수도 있지만 식으로
보이려면 어떻게 해야 할까요?

$f(x)+f(2a-x)=2b$
이 의미하는 것이 $f(x)$ 가
$(a,\ b)$ 에 점대칭 되어 있다는
것이니까
$f(x)+f(4-x)=0$ 만
만족시키면 되겠죠?
$4(x-1)(x-2)(x-3)+$

$4(3-x)(2-x)(1-x)=0$
성립하네요 !

따라서 $(2,\ 0)$에 점대칭
되어져 있다고 할 수 있어요~

<참고>
라이트 N제 수2 문제편 P.131

② $f'(1)=1,\ f'(2)=-2,\ f'(3)=3$

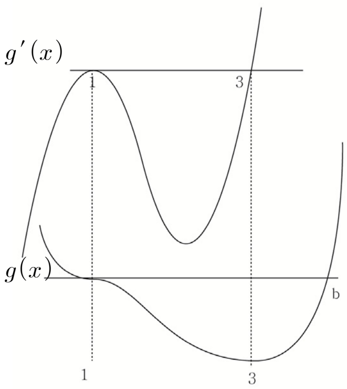
마찬가지로 식을 세워볼까요~ 여기서는 $f'(1)-1=0,\ f'(3)-3=0$ 밖에 없으니까 한 번에 $f'(x)-x$ 를 구할 수는 없어요. 저번에 배운 미지수 technic !을 써볼게요~

$$f'(x)-x=4(x-1)(x-3)(x-a)$$

☆ 여기서 $(x-a)$ 라고 쓴 이유는 ?
$f'(x)-x$ 가 삼차이고 서로 다른 2개의 실근을 갖기 때문에 무조건 실근 하나를 더 가져야 하겠죠?
$f'(2)=-2$ 를 만족해야하니까 $x=2$ 를 대입하면
$f'(2)-2=4(2-1)(2-3)(2-a)$

$f'(2)-2=-4(2-a)=-8+4a$

$-4=-8+4a \Rightarrow a=1$
$\therefore f'(x)-x=4(x-1)^2(x-3)$ case ① 과 마찬가지로
$g'(x)=4(x-1)^2(x-3)$ 그래프를 그리면



$g(1)=0$ x축 설정!

$g(x)$ 에 대해 식을 세워봅시다 ! 나올 때마다 적용시켜주세요~ 미지수 b 놓고 식을 세우면
$g(x)=(x-1)^3(x-b)$
$g'(x)=3(x-1)^2(x-b)+(x-1)^3$

$\quad=(x-1)^2(3x-3b+x-1)$

$g'(3)=0$ 이니까 $b=\dfrac{11}{3}$

결국 구하고자 하는 것은 $g(x)=0$ 을 만족하고 3이 아닌 x값이죠?
따라서 $S=\left\{1,\ \dfrac{11}{3}\right\}$ 가 되겠죠?

답은 ③ $\dfrac{14}{3}$

출제자의 한마디

만약 관성적으로 풀어서 $f'(2)=-2$ 를 보지 못했다면 당황할 수 있는 문제에요.
너무나 당연하지만 막상 긴장상태에서 풀면 보이지 않을 수 있어요.
조심하세요~ 집합 S에 있는 $x\neq 3$ 이라는 조건을 준 이유는 case ①을 제거해 주기 위해서에요. $\displaystyle\int_1^x \{f'(t)-t\}\,dt=g(x)$ 로 바꾸는 technic 도 꼭 챙겨가세요.
계속 식 세우기 문제가 나오고 있죠? 적용시켜 보셨나요?
앞으로도 계속 나오니까 꿈에 나올 정도로 반복해서 적용시켜주세요~
이 문제집에서 식 세우기만이라도 완벽히 알아 가면 문제 풀 때 큰 도움이 될 것이라 생각해요.

보충 설명 +α

3)

① $g(x)=\displaystyle\int f(x)\,dx$

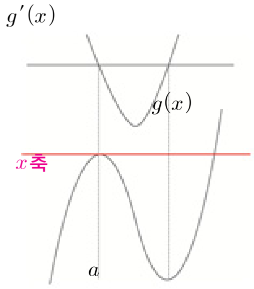
② $g(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$

①, ②차이점은 무엇일까요?

①도 미분하면
$g'(x)=f(x)$ 이고

②도 미분하면
$g'(x)=f(x)$ 에요.
①은 x축이 어디 있는지 모르지만
②는 $g(a)=0$ 임을 토대로
x축을 설정할 수 있어요.

$g'(x)$



<참고>
라이트 N제 수2 P.186

1)

ex)
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
$f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=6$
$f(x)=?$

답은
$f(x)$
$=(x-1)(x-2)(x-3)+2x$

05

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-g(x)}{x-a}=0$
(나) $f(x)-f(4-x)=g(x)-g(4-x)$
(다) $\int_a^2 f'(x)\,dx = \int_a^2 g'(x)\,dx + 16$

$f(6)-g(6)$의 값은? (단, a는 실수이다.)

① 139　② 144　③ 146　④ 148　⑤ 150

출제의도

① $f(x)-g(x)=h(x)$ 라고 보고 조건을 reading 할 수 있는가?
(New 함수 technic !)
② $f(x)-g(x)$ 에 관한 식 세우기 !

해설강의

이 문제의 핵심은 $f(x)-g(x)=h(x)$ 라고 두는 거에요.
(참고로 $f(6)-g(6)$ 의 값은 ? 에서 힌트를 드렸어요. :D 느끼셨나요?)

New 함수 두는 technic ! 기억하세요. 이전에도 $\int_a^x f(t)\,dt=g(x)$ 로 보는 technic 있었죠? 같은 맥락에서 기억해주세요~

$h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수겠지요?

(가) 조건부터 바꿔 봅시다 !

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{x-a}=0$$

[1] 분모가 0으로 가는데 수렴하므로 당연히 분자는 0으로 가겠죠?

보충 설명 +α

1)
$$\begin{cases}\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=a & (a\text{는 상수})\\ \lim_{x\to 0}g(x)=0\end{cases}$$

$\frac{f(x)}{g(x)}=h(x)$ 라 두면

$\lim_{x\to 0}h(x)=a$ 겠죠?

$f(x)=h(x)g(x)$ 라고
변형해서 양변에 극한을
취하면

$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}h(x)g(x)$

$h(x)$, $g(x)$ 는 수렴하니까

$\lim_{x\to 0}h(x)g(x)$
$=\lim_{x\to 0}h(x)\lim_{x\to 0}g(x)$
$=a\times 0=0$

따라서 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$

<참고>
라이트 N제 수2 P.23

크게 몇 가지로 case 분류할 수 있죠?

그래요. ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 이렇게 3가지로 구분할 수 있어요.
$x<0$ 일 때를 살펴볼까요? 자 $x<0$ 일 때는 $(x+a)^2x(x-a)$ 라고 했죠?
이것도 그래프를 그리려고 하니까 a 때문에 난감해요. 따라서 a에 따라 case분류를 해줘야 해요.
case 분류를 해주면 마찬가지로 ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 이렇게 3가지로 구분이 되겠죠?
결국 ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 경우만 case분류하면 되겠네요.

여기서 잠깐 !
"아니 그럼 규토쌤 무조건 이런 문제가 나오면
① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 로 case 분류해야 하나요?"
1) 여러분이 대답해주세요. 아니죠? 그래프를 그리려니까 a 때문에 난감해서 같은 그래프 개형이 나오도록 a의 범위를 case 분류 한 거예요.

이제 A 집합의 의미를 파악해볼게요.

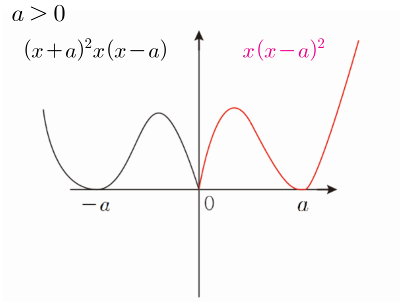
$$A=\left\{t \mid \lim_{x\to t+}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\neq\lim_{x\to t-}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\right\}$$

$x=t$ 에서 우미분계수와 좌미분계수가 다르다는 의미에요.
결국 미분이 불가능한 점의 x좌표가 A집합의 원소가 되겠죠?

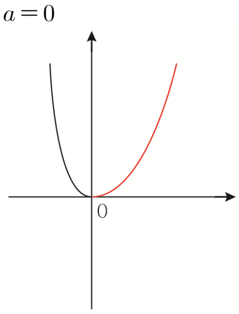
B집합은 $B=\{t \mid f(x)$는 $x=t$에서 극솟값을 갖고 $t\neq0\}$ 라고 했는데요.
극솟값을 가지면서 $t\neq0$ 를 만족해야 해요. 왜 하필 $t\neq0$일까요?
조건을 만족시키는 case를 제거하기 위함이에요~
출제자는 조건을 줄 때는 무엇인가 의도가 있다는 거예요. +_+

이제 a에 따라 case 분류 해봅시다!

① $a>0$



② $a=0$



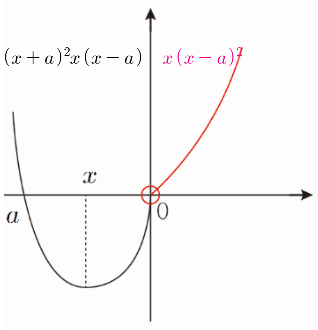
보충 설명 +α

1) $f(x)=(x-1)(x-a)^2$ 이면

① $a>1$
② $a=1$
③ $a<1$

이렇게 3가지로 분류할 수 있겠죠?
이해 되셨나요?

③ $a<0$



여기서 point !

$x=0$에서 미분이 불가능해 보이시나요?
보기에는 그렇지만 가능할 수도 있고
불가능할 수도 있어요.
미분가능하려면 $x=0$에서 좌미분계수와
미분계수가 같아야겠죠?
여기서 $x=0$에서 우미분계수는
$y=x(x-a)^2 \Rightarrow y'=(x-a)^2+2x(x-a)$이므로
a^2 이 되겠죠?

좌미분계수는
$y=(x+a)^2x(x-a) \Rightarrow y'=2(x+a)x(x-a)+(x+a)^2(x-a)+(x+a)^2x$
이므로 $-a^3$ 이 되겠죠?
$a^2=-a^3$ 를 만족하는 a값에 한해서 $x=0$에서 미분이 가능해요.
$a^3+a^2=a^2(a+1)$ $a=0$ 와 $a=-1$ 이 나오지만 $a<0$ 이므로 $a=-1$ 만 되겠죠?
따라서 $a=-1$ 이면 A집합은 공집합이 나오겠군요.

이제 조건들을 따져봅시다 !

	① $a>0$	② $a=0$	③ $a<0$	
A집합	$\{0\}$	$\varnothing$	$\{0\}$	$\varnothing$
B집합	2) $\{-a,\ a\}$	$\varnothing$	3) $\{X_1\}$	$\{X_2\}$
조건만족	$A\cup B=B$ (X) $B\neq\varnothing$ (O)	$A\cup B=B$ (O) $B\neq\varnothing$ (X)	$A\cup B=B$ (X) $B\neq\varnothing$ (O)	$A\cup B=B$ (O) $B\neq\varnothing$ (O)

따라서 조건을 모두 만족시키는 case는 ③ $a<0$ 에서 $a=-1$ 일 때 에요.

$$f(x)=\begin{cases} x(x+1)^2 & (x\geq 0) \\ (x-1)^2x(x+1) & (x<0) \end{cases}$$

$f(4)=4\times 25=100$

답은 ① 100

출제자의 한마디

이 문제의 point 는 $f(x)$ 를 그리기 위해 4) a에 따라 case 분류를 하는 것과
③ $a<0$ 에서 a가 -1일 때 미분가능이 됨을 파악하는 것이에요.
이 문제를 만들게 된 계기는 "계산은 최대한 줄이고 사고력으로만 접근하도록
문제를 만들 수 없을까"를 고민하던 중 탄생한 문제에요.
개인적으로 마음에 드는 문제 중 하나입니다~ 여러분도 풀면서 재밌지 않으셨나요?
ㅎㅎ

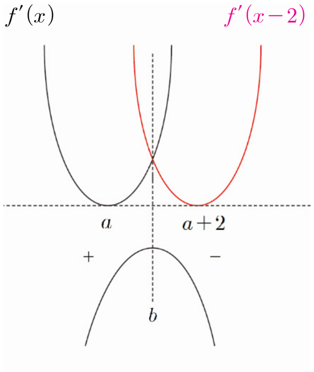
보충 설명 +α

2) $t\neq 0$ 때문에
$\{-a,\ 0,\ a\}$ 가 아니라
$\{-a,\ a\}$ 가 되겠죠?

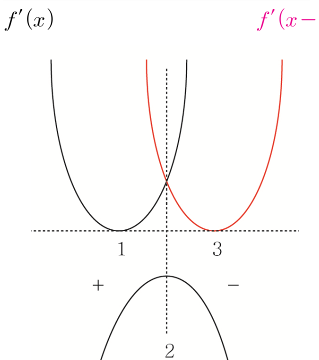
3) $\{X\}$ 에서 X를 직접 구할
수도 있지만 구하는 것을
의도하진 않았어요.

4) <참고>
라이트 N제 수2
문제편 p.199 85번

$f(x)$ 는 삼차함수니까 $f'(x)$ 는 이차함수가 되겠죠?



여기서 $f'(a)$ 의 함숫값은 중요하지 않아요.
$f'(x-2)$ 는 $f'(x)$ 를 x축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프죠? $f'(x)$ 와 $f'(x-2)$ 가 만나는 점을 $x=b$를 경계로 왼쪽은 $f'(x-2)-f'(x)$ 의 부호가 + 가 되고 오른쪽은 - 가되겠죠? 따라서 $g(x)$ 를 그리면 $x=b$에서 극댓값을 갖는 그래프가 나와요.
(가) 조건에서 $x=2$ 에서 최댓값을 가지니까 $b=2$
a 와 $a+2$ 는 $x=2$ 에 대칭이므로
$2a+2=4 \Rightarrow a=1$



따라서 다음과 같은 그래프가 나오겠죠?
$f'(x)= 2(x-1)(x-p)+(x-1)^2$
$f'(x)$ 을 미분해서 $x=1$을 넣으면 0이 되겠죠?
($f'(x)$ 가 $x=1$에서 극솟값을 가지니까요~)
$f''(x)=2(x-p)+2(x-1)+2(x-1)$
$f''(1)=2(1-p)=0 \Rightarrow p=1$
따라서 $f(x)=(x-1)^3$ 가 돼요.

1) 물론 대칭성을 이용하지 않고 식으로 접근해도 Good이에요~

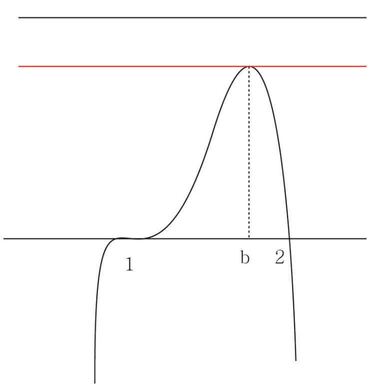
$f(x)=(x-1)^3$ 이니까 $g'(x)=3(x-3)^2-3(x-1)^2=-12x+24$

$$g(2)=\int_2^0 f'(t)\,dt+k=f(0)-f(2)+k=-2+k$$

$$g(1)=\int_1^{-1} f'(t)\,dt+k=f(-1)-f(1)+k=-8+k$$

결국 (나)를 통해 k 의 범위를 알아내면 되겠군요.

$-12(x-1)^3(x-2) \le \dfrac{-2+k}{64}$ 그래프를 그려서 함수로 생각해봅시다~



$y=\dfrac{-2+k}{64}$

일 때 k 최소!

$$y' = -3(x-1)^2(x-2)-(x-1)^3$$
$$= -(x-1)^2(4x-7)$$

따라서 $b=\dfrac{7}{4}$ 겠네요~

$$-12\left(\frac{7}{4}-1\right)^3\left(\frac{7}{4}-2\right) = \frac{81}{64}$$

$$\frac{81}{64} \le \frac{-2+k}{64} \Rightarrow 83 \le k$$

보충 설명 +α

1) 식으로 접근해볼게요~
$f(x)=(x-1)^2(x-p)$
라 두고 미분하면
$f'(x)=(x-1)(3x-2p-1)$
겠죠?

$g(x)$ 도 다항함수이기 때문에 $x=2$ 에서 최댓값을 가지려면 $g'(2)=0$ 를 만족해야 돼요. 따라서 $f'(0)-f'(2)=0$ 이 되는 p 를 찾아주면 되겠죠?

$f'(0)=2p+1$

$f'(2)=5-2p$

$f'(0)-f'(2)=2p+1-5+2p$

$=4p-4$

$\therefore p=1$

“아니 규토쌤 그냥 식으로 접근하면 이렇게 쉬운데 무엇하러 이렇게까지 대칭성을 이용하나요?”

이 문제에서는 식이 굉장히 쉽게 느껴지죠? 그렇지만 $f'(x)$ 가 굉장히 복잡하면 문제를 구하기 어려울 수 있어요. 그 때는 쪼개서 생각하는 것이 훨씬 쉬울 수 있어요. 꼭 두 개다 알아가세요~

자 k의 범위가 나왔네요~ 따라서 $g(1) = -8+k$ 의 최솟값은 75입니다~

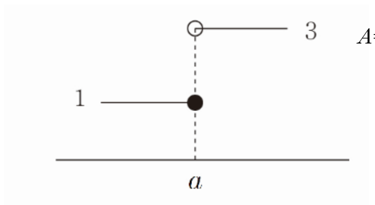
답은 ① 75

출제자의 한마디

$f'(1)=f(1)=0 \Rightarrow (x-1)^2$ 를 통해 $(x-1)^2(x-a)$ 라고 식을 세워보셨나요? 직접 $g'(x)$를 구하지 않고 $f'(x)$ 와 $f'(x-2)$ 로 [2] 쪼개서 생각할 수 있다는 것을 알려주고 싶었어요. 이 문제의 경우 식으로 접근해도 쉽게 구할 수 있지만 $f'(x)$ 가 간단하지 않고 복잡한 함수가 나오면 식으로 접근하기 매우 까다로울 수 있어요. 꼭 기억해 주셨으면 좋겠어요. 앞으로 문제를 풀면 계속 적용시켜주세요~ ㅎㅎ

보충 설명 +α

2) <참고>
라이트 N제 수2
문제편 p.202 88번
문제편 p.203 102번

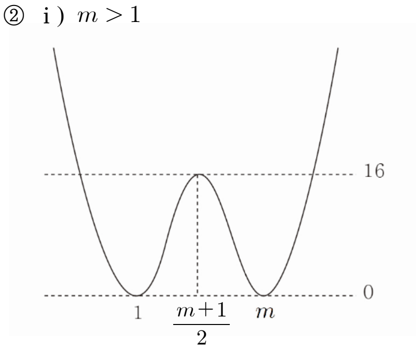


$A=\varnothing$ $B=\{a+16\}$ 이니까 $A=B$ 일 수 없겠죠?

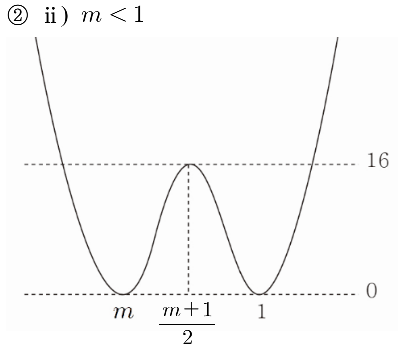
따라서 결국 ! 만족하는 case 는 ②뿐이겠죠?
②개형이면서 $f'(1)=f(1)=0 \Rightarrow (x-1)^2$ 을 만족하는 case는 몇 가지죠?
2가지요? 하하 이 문제를 풀었던 대부분의 학생들이 답을 34 라고 해서 틀렸어요.
흐흐 일부러 실수하라고 34 를 보기에 넣었거든요. 보기에 34가 없었으면 다시 풀었겠지만 34를 보는 순간 아~ 답이구나 하고 찍을 수밖에 없으니까요.
경각심을 주기 위해서 넣었어요. 조심하세요! case는 총 3가지에요~

이제 case분류 해보고 이때까지 배운 식 세우기 technic ! 을 총동원해서 식을 세워봅시다 !

② i) $m>1$



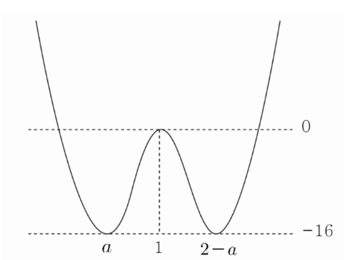
② ii) $m<1$



미지수 technic ! 기억나시죠?
$f(x)=(x-1)^2(x-m)^2$ 여기서 m을 어떻게 찾죠? 2) 극댓값을 갖는 x좌표를 구하면
$f\left(\frac{m+1}{2}\right)=\frac{(m-1)^4}{16}=16 \Rightarrow m=5,\ -3$

따라서 ② i) 는 $f(x)=(x-1)^2(x-5)^2$ 가 나오고
② ii) 는 $f(x)=(x-1)^2(x+3)^2$ 이 나와요.

② iii) 극댓값의 x좌표가 1인 경우



$x=1$ 에 대칭되어 있는 것을 이용해서 식을 세우면 $a<1$ 과 $a>1$ 인 case로 나눌 수 있어요.
저번에 배웠었죠? 해보니까 둘 다 똑같은 식이 나온다는 것을 이미 알고 있으니까 $a<1$ 인 case만 해볼게요.
$f(x)-(-16)=(x-a)^2(x-(2-a))^2$
$f(1)=0$ 이니까
$16=(1-a)^4 \Rightarrow a=-1,\ 3$ 가 나와요.
a는 $a<1$ 니까 $a=-1$이 되겠죠?
따라서 $f(x)=(x+1)^2(x-3)^2-16$ 가 나와요.

보충 설명 +α

2) 물론
$f(x)=(x-1)^2(x-m)^2$
을 미분해서 극댓값을 갖는 x 좌표를 찾을 수도 있지만 대칭성을 이용하면 훨씬 빠르겠죠?