## 수리 영역

### '가' 형

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. ① | 2. ⑤ | 3. ③ | 4. ① | 5. ② |
| 6. ① | 7. ③ | 8. ① | 9. ④ | 10. ② |
| 11. ④ | 12. ② | 13. ⑤ | 14. ② | 15. ③ |
| 16. ④ | 17. ③ | 18. ④ | 19. ⑤ | 20. ② |
| 21. ③ | 22. 8 | 23. 75 | 24. 6 | 25. 99 |
| 26. 25 | 27. 14 | 28. 3 | 29. 19 | 30. 350 |

**1.** $\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{2}}=\left(2\cdot2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \log_2 2^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}$

**2.** $B=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$이므로

$B^{-1}=-\begin{pmatrix}0&-1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$

$\therefore X=B^{-1}AB$

$=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$

따라서, 행렬 $X$의 모든 성분의 합은 3이다.

**3.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos^2x+\cos x-3}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2\cos x+3)(\cos x-1)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2\cos x+3)(\cos^2x-1)}{x^2(\cos x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2\cos x+3)(-\sin^2x)}{x^2(\cos x+1)}$

$=-\dfrac{5}{2}$

**4.** 삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의해

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos(\angle AOB)$

$=2\cdot3\cdot\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot2\cdot3}=-\dfrac{3}{2}$

**5.** ㄱ. $\overline{AE}\perp\overline{AD}$, $\overline{AE}\perp\overline{AB}$이므로 직선과 평면이 서로 수직일 조건에 의해

$\overline{AE}\perp$(평면 ABCD)

이때 선분 BD는 평면 ABCD에 포함되므로

$\overline{AE}\perp\overline{BD}$ ∴ 참

ㄴ. 정사각형 ABCD에서 $\overline{BD}\perp\overline{AC}$이다.

이때 ㄱ에서 $\overline{AE}\perp\overline{BD}$이므로

$\overline{BD}\perp$(평면 AEGC)

이때 선분 AG는 평면 AEGC에 포함되므로

$\overline{AG}\perp\overline{BD}$ ∴ 참

ㄷ. 두 선분 AG, DF는 평행사변형 AFGD의 두 대각선이다.

이때 평행사변형 AFGD는 마름모가 아니므로 두 대각선은 서로 수직이 아니다. ∴ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

**6.** $\lim\limits_{x\to2-0}f(x)=\lim\limits_{x\to2-0}(3^x+a)=9+a$

$\lim\limits_{x\to2+0}f(x)=\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{x\cdot2^x-2^{x+1}}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{(x-2)\cdot2^x}{x-2}=2^2=4$

$f(2)=3^2+a=9+a$

따라서, 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면 $4=9+a$

$\therefore a=-5$

**7.** 포물선 $y^2=8x$의 초점은 $(2,\ 0)$이므로 직선 $x=2$와 포물선의 교점 P의 좌표는 $(2,\ 4)$이다.

따라서, 점 P에서의 접선의 방정식은

$4y=4(x+2)$ 즉, $y=x+2$

이다.

한편, 이 포물선의 준선의 방정식은 $x=-2$이므로 두 직선 $y=x+2$, $x=-2$의 교점의 $y$좌표는 0이다.

**8.** $\displaystyle\int_1^e\frac{\ln x^2}{x^2}dx=\int_1^e\frac{2\ln x}{x^2}dx=2\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$

이때

$\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\ln x+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx$

$=-\dfrac{1}{x}\ln x-\dfrac{1}{x}+C$ ($C$는 적분상수)

이므로

$\displaystyle\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}\right]_1^e$

$=\left(-\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e}\right)-(0-1)$

$=-\dfrac{2}{e}+1$

$\displaystyle\therefore \int_1^e\frac{\ln x^2}{x^2}dx=2\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=2-\frac{4}{e}$

**9.** 먼저 A는 2자루, B는 3자루, C는 1자루를 선택하고, A, B, C, D, E에서 중복을 허락하여 남은 6자루를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

${}_5H_6={}_{5+6-1}C_6={}_{10}C_6={}_{10}C_4$

$=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$(가지)

**10.** 확률밀도함수의 정의에 의해 $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=1$이므로

$\displaystyle\int_0^a e^xdx=\left[e^x\right]_0^a=e^a-1=1$

$\therefore e^a=2,\ a=\ln2$

$\displaystyle\therefore \mathrm{E}(X)=\int_0^a xf(x)dx=\int_0^a xe^xdx$

$\displaystyle=\left[xe^x\right]_0^a-\int_0^a e^xdx=ae^a-\left[e^x\right]_0^a$

$=ae^a-e^a+1=2\ln2-2+1$

$=2\ln2-1=\ln\dfrac{4}{e}$

**11.** 삼차함수 $f(x)$의 극솟값이 존재하므로

$f'(x)=3x^2+a=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이때 위 방정식의 한 근을 $\alpha(\alpha>0)$라 하면 다른 한 근은 $-\alpha$이고, 극솟값은 $f(\alpha)=\alpha^3+a\alpha+3=-20$에서

$\alpha^3+a\alpha=-23$

따라서, 구하는 극댓값은

$f(-\alpha)=-\alpha^3-a\alpha+3=23+3=26$

**12.** $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x=1-(-1)^n$에서

$n=1$일 때, $a_1x=2$에서 $a_1=\dfrac{2}{x}$

$n=2$일 때, $a_2x^2+a_1x=0$, $a_2x^2+2=0$에서

$a_2=\boxed{-\dfrac{2}{x^2}}$

$n=3$일 때, $a_3x^3+a_2x^2+a_1x=2$, $a_3x^3=2$에서

$a_3=\dfrac{2}{x^3}$

$\vdots$

$\therefore a_n=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2}{x^n}$

그런데, $|x|>1$에서 $\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴한다.

$\displaystyle\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{2}{x^4}+\cdots$

$=\dfrac{\frac{2}{x}}{1-\left(-\frac{1}{x}\right)}=\boxed{\dfrac{2}{x+1}}$

따라서, $f(x)=-\dfrac{2}{x^2}$, $g(x)=\dfrac{2}{x+1}$이므로

$f(4)+g(4)=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{11}{40}$

**13.** 두 일차변환 $f$, $g$를 나타내는 행렬을 각각 $A$, $B$라 하면

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$, $B^{-1}A=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$

이므로

$B^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}A^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}$

일차변환 $g$에 의해 점 $(x,\ y)$가 점 $(x',\ y')$으로 옮겨진다고 하면

$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 즉, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

이므로

$x=-x'+y'$, $y=y'$ …… ㉠

㉠을 $y=2x$에 대입하면

$y'=2(-x'+y')$ 즉, $y'=2x'$

이므로 직선 $y=2x$가 옮겨지는 직선의 방정식은

$y=2x$

따라서, 구하는 직선의 기울기는 2이다.

**14.** $\angle PBA=x$로 놓고 $\overline{AB}$의 중점을 O라 하면

$\angle POA=2x$이므로

$\overline{PH}=3\sin2x$, $\overline{BH}=3+3\cos2x$

$f(x)=\overline{PH}=3\sin2x$로 놓고 이것을 시각 $t$에 대하여 미분하면

$\dfrac{df(x)}{dt}=6\cos2x\cdot\dfrac{dx}{dt}$

여기서 $\overline{BH}=3+3\cos2x=4$인 순간은 $\cos2x=\dfrac{1}{3}$일 때이므로 순간변화율은

$\dfrac{df(x)}{dt}=6\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

**15.** $\dfrac{x^2-ax}{x+a}\geq0$에서 $x(x-a)(x+a)\geq0$, $x\neq-a$

$\therefore -a<x\leq0$ 또는 $x\geq a$ …… ㉠

$(x^2-ax)(x-a)\leq0$에서 $x(x-a)^2\leq0$

$\therefore x\leq0$ 또는 $x=a$ …… ㉡

따라서, ㉠, ㉡에서 동시에 만족시키는 $x$의 값의 범위는 $-a<x\leq0$ 또는 $x=a$이므로 만족하는 정수 $x$가 3개가 되는 경우는 $2<a<3$일 때, $x=0,\ -1,\ -2$이고 $a=2$일 때, $x=0,\ -1,\ 2$이다.

$\therefore 2\leq a<3$

**16.** ㄱ. 【반례】 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$일 때,

$AB=A$이고 $A\neq O$이지만 $B^{-1}$은 존재하지 않는다. ∴ 거짓

ㄴ. $A^2=E$에서 $A^2-4E=-3E$

$(A-2E)(A+2E)=-3E$

$\therefore (A-2E)^{-1}=-\dfrac{1}{3}(A+2E)$ ∴ 참

ㄷ. $A^{21}=A^{12}A^9=A^9=E$에서 $A^{12}=A^9A^3=A^3=E$

이때 $A^3=E\iff(A-E)(A^2+A+E)=O$

행렬 $A^2+A+E$의 역행렬이 존재한다고 가정하면 $A-E=O$이므로 가정에 모순이다. ∴ 참

따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**17.** $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_8A_9}=\overrightarrow{OA_9}$

$\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-1\\1&\sqrt{3}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

$=2\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6}&-\sin\frac{\pi}{6}\\\sin\frac{\pi}{6}&\cos\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}$

이므로

$\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-1\\1&\sqrt{3}\end{pmatrix}^8=2^8\begin{pmatrix}\cos\frac{8}{6}\pi&-\sin\frac{8}{6}\pi\\\sin\frac{8}{6}\pi&\cos\frac{8}{6}\pi\end{pmatrix}$

$$=256\begin{pmatrix}\cos\frac{4}{3}\pi & -\sin\frac{4}{3}\pi \\ \sin\frac{4}{3}\pi & \cos\frac{4}{3}\pi\end{pmatrix}$$

$$=256\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_9\\y_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}^8\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

$$=128\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-128\\ -128\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$\therefore\ |\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_8A_9}|$

$=|\overrightarrow{OA_9}|=\overline{OA_9}$

$=128\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}$

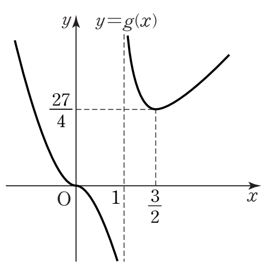
$=128\times 2$

$=256$

**18.** $g(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$로 놓으면 $g'(x)=\dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$이므로

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $\frac{3}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | 0 | $-$ | $\times$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $g(x)$ | ↘ | 0 | ↘ | $\times$ | ↘ | $\frac{27}{4}$ | ↗ |

함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서 $x$축에 접하고, $x=1$에서 불연속이며 $x=\dfrac{3}{2}$에서 극솟값을 갖는다.




따라서, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 곡선 $y=|g(x)|$이다.

ㄱ. 【반례】 $k=\dfrac{3}{4}$일 때, $f'\left(1-\dfrac{3}{4}\right)=f'\left(\dfrac{1}{4}\right)>0$,

$f'\left(1+\dfrac{3}{4}\right)=f'\left(\dfrac{7}{4}\right)>0$이므로

$f'\left(1-\dfrac{3}{4}\right)f'\left(1+\dfrac{3}{4}\right)>0$ ∴ 거짓

ㄴ. $f'(0)=0$, $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$이므로 $x=0$, $x=\dfrac{3}{2}$에서의 접선의 기울기가 0이고, $f(0)=0$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{27}{4}$이므로 두 접선은 서로 다르다. 즉, 기울기가 0인 접선은 2개 존재한다. ∴ 참

ㄷ. $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{27}{4}$이므로 $k>\dfrac{27}{4}$일 때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$는 서로 다른 네 점에서 만난다.

따라서, 구하는 정수 $k$의 최솟값은 7이다. ∴ 참

따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**19.** ㄱ. $(n+1)a_n=na_{n+1}+2$에서 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$$\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n+1}}{n+1}+\frac{2}{n(n+1)},$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=-\frac{2}{n(n+1)}$$

그러므로 수열 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}\right\}$의 제5항은 $-\dfrac{1}{15}$이다. ∴ 거짓

ㄴ. $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=-\dfrac{2}{n(n+1)}$의 우변을 부분분수로 나타내면 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=-\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n+1}$이므로

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{2}{n+1}=\frac{a_n}{n}-\frac{2}{n}$$

$$\therefore\ \frac{a_n}{n}-\frac{2}{n}=\frac{a_1}{1}-\frac{2}{1}=6\ (\because a_1=8)$$

따라서, 수열 $\left\{\dfrac{a_n}{n}-\dfrac{2}{n}\right\}$의 제10항은 6이다. ∴ 참

ㄷ. $\dfrac{a_n}{n}=6+\dfrac{2}{n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(6+\frac{2}{n}\right)=6 \quad \therefore \text{참}$$

따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

**20.** 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$의 두 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-4,\ 0)$이고 장축의 길이는 10이므로

$\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PF}}=10$

이다. 같은 방법으로 $\overline{\mathrm{FR}}=10$이다.

$\angle\mathrm{F'PF}=\theta$라 하면 사각형 $\mathrm{F'FQR}$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{F'Q}}\times\overline{\mathrm{FR}}\times\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times 10\times 10\times\sin\theta=50\sin\theta$ …… ㉠

그런데, $\overline{\mathrm{F'P}}=6$, $\overline{\mathrm{F'F}}=8$이므로 삼각형 $\mathrm{F'PF}$에서 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta=\frac{4^2+6^2-8^2}{2\cdot 4\cdot 6}=-\frac{1}{4}$$

이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

이를 ㉠에 대입하면 사각형 $\mathrm{F'FQR}$의 넓이는

$$50\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{25\sqrt{15}}{2}$$

이다.

**21.** $n$단계에서 만들어진 직각이등변삼각형의 세 변의 길이를 $a$, $a$, $\sqrt{2}a$라 하고, 이 직각이등변삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r$라 하면

$$\frac{1}{2}a^2=r\cdot\frac{a+a+\sqrt{2}a}{2}$$

$$\therefore\ r=\frac{a}{2+\sqrt{2}}=\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$$

그러므로 이 원에 내접하는 직각이등변삼각형의 빗변의 길이는 $a(2-\sqrt{2})$이다.

따라서, 주어진 그림에서 이웃하는 닮은 도형의 길이의 비는 $\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$이고 넓이의 비는 $(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$이다.

또한 첫째 어두운 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 2^2-\pi\left\{\frac{2(2-\sqrt{2})}{2}\right\}^2=2\{1-(3-2\sqrt{2})\pi\}$$

이므로 구하는 넓이는

$$\frac{2\{1-(3-2\sqrt{2})\pi\}}{1-(3-2\sqrt{2})}=\frac{1-(3-2\sqrt{2})\pi}{-1+\sqrt{2}}$$

$$=(\sqrt{2}+1)\{1-(3-2\sqrt{2})\pi\}$$

$\therefore\ k=1+\sqrt{2}$

**22.** $a_n=ar^{n-1}$이라 하면 $a_4=ar^3$이고

$a_2a_3a_7=ar\cdot ar^2\cdot ar^6=a^3r^9=(ar^3)^3=512=8^3$

$\therefore\ ar^3=8$

$\therefore\ a_4=ar^3=8$

**23.** $\left(x^2-\dfrac{a}{x}\right)^6$의 전개식에서

$${}_6\mathrm{C}_3(x^2)^3\left(-\frac{a}{x}\right)^3=-20a^3x^6\times\frac{1}{x^3}=-20a^3x^3$$

따라서, $x^3$의 계수는 $-20a^3$이다.

$${}_6\mathrm{C}_4(x^2)^4\left(-\frac{a}{x}\right)^2=15a^2x^8\times\frac{1}{x^2}=15a^2x^6$$

따라서, $x^6$의 계수는 $15a^2$이다.

$-20a^3+15a^2=0$

$\therefore\ a=\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ 100a=75$

**24.** $x\to 4$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

$\therefore\ f(8)=4$

$x+4=t$라 하면

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x+4)-4}{(x-4)(x+4)}=\lim_{t\to 8}\frac{f(t)-f(8)}{(t-8)t}$$

$$=\frac{f'(8)}{8}$$

$$=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ f'(8)=2$

$\therefore\ f(8)+f'(8)=4+2=6$

**25.** $\mathrm{P}(X\le a)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{a-90}{6}\right)=0.9332$

이므로 $\dfrac{a-90}{6}>0$이고

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-90}{6}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{a-90}{6}\right)-\mathrm{P}(Z<0)$

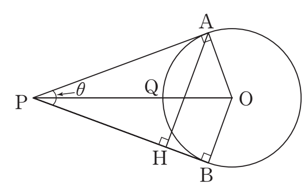
이 성립한다.

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-90}{6}\right)=0.9332-0.5=0.4332$

따라서, $\dfrac{a-90}{6}=1.5$이므로

$a=6\times 1.5+90=99$

**26.**




주어진 원의 중심을 O라 하고 선분 OP가 원과 만나는 점을 Q라 하면

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{PO}}=3\sqrt{5}$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=2\sqrt{10}$

이때 $\angle\mathrm{BPA}=\theta$라 하면

$\sin\dfrac{\theta}{2}=\sin(\angle\mathrm{APO})=\dfrac{\overline{\mathrm{AO}}}{\overline{\mathrm{PO}}}=\dfrac{1}{3}$에서

$\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{PA}}\sin\theta=2\sqrt{10}\times\dfrac{4\sqrt{2}}{9}=\dfrac{16\sqrt{5}}{9}$

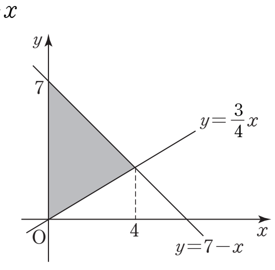
$\therefore\ p+q=9+16=25$

**27.** $1<8^x\le 16^y$, $2^0<2^{3x}\le 2^{4y}$

$\therefore\ y\ge\dfrac{3}{4}x,\ x>0$

$\log_{\frac{1}{7}}(7-x)\le\log_{\frac{1}{7}}y\ (x<7,\ y>0)$

$\therefore\ y\le 7-x$




$7-x=\dfrac{3}{4}x$에서 $x=4$이므로 위의 그림에서 점 $(x,\ y)$가 존재하는 영역의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 7=14$

**28.** 동전을 계속해서 던지면 시행은 언젠가 끝나므로 구하는 확률은 4회 이내에 시행이 끝날 확률과 같다.

(i) 동전을 4번 이하로 던졌을 때 상자에 구슬이 없어서 시행이 끝나는 경우와 그 확률은 다음과 같다.

2개 → 1개 → 0개 : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

$2$개 $\to 1$개 $\to 2$개 $\to 1$개 $\to 0$개 : $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

$2$개 $\to 3$개 $\to 2$개 $\to 1$개 $\to 0$개 : $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(ii) 동전을 4번 이하로 던졌을 때 상자에 구슬이 5개가 들어 있어서 시행이 끝나는 경우와 그 확률은 다음과 같다.

$2$개 $\to 3$개 $\to 4$개 $\to 5$개 : $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

따라서, (i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

$\therefore p+q=3$

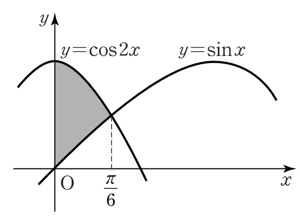
**29.** $\cos 2x=1-2\sin^2 x$이므로 $\sin x=\cos 2x$에서

$2\sin^2 x+\sin x-1=(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$

$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=-1$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

따라서, 주어진 연립부등식을 만족시키는 영역은 그림의 어두운 부분과 같다.




따라서, 구하는 회전체의 부피 $V$는

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos^2 2x-\sin^2 x)dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}-\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4}\sin\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi$$

$\therefore p+q=16+3=19$

**30.** 직선 AB의 방정식은

$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-4}{5-4}=\frac{z-5}{4-5}$

$\therefore \frac{x-3}{2}=y-4=\frac{z-5}{-1}$ …… ㉠

직선 ㉠과 $xy$평면이 만나는 점의 좌표를 $\mathrm{C}(a, b, 0)$이라 하면

$\frac{a-3}{2}=b-4=\frac{0-5}{-1}$

$\therefore a=13, b=9$

$\therefore \mathrm{C}(13, 9, 0)$

한편, 구하는 교선은 $xy$ 평면 위에 놓인 직선이므로 방향벡터를 $(p, q, 0)$으로 놓을 수 있다.

이때 이 교선과 직선 AB는 서로 수직이어야 하므로

$(2, 1, -1)\cdot(p, q, 0)=2p+q=0$

$\therefore q=-2p$

따라서, 이 교선은 점 $(13, 9, 0)$을 지나고 방향벡터가 $(p, -2p, 0)$ 즉, $(1, -2, 0)$인 직선이므로 구하는 교선의 방정식은

$x-13=\frac{y-9}{-2}$, $z=0$

이때 이 직선이 $x$축과 만나는 점의 $y$좌표는 0이므로

$x-13=\frac{0-9}{-2}$에서 $x=13+\frac{9}{2}=\frac{35}{2}$

따라서, 구하는 $x$좌표는 $k=\frac{35}{2}$이다.

$\therefore 20k=350$

## '나'형

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. ① | 2. ⑤ | 3. ① | 4. ③ | 5. ④ |
| 6. ④ | 7. ① | 8. ② | 9. ④ | 10. ③ |
| 11. ④ | 12. ② | 13. ① | 14. ② | 15. ⑤ |
| 16. ④ | 17. ③ | 18. ⑤ | 19. ⑤ | 20. ⑤ |
| 21. ③ | 22. 8 | 23. 540 | 24. 10 | 25. 2 |
| 26. 6 | 27. 14 | 28. 18 | 29. 205 | 30. 140 |

**1~2.** '가' 형의 1~2번과 동일

**3.**
$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\frac{1}{(2+2)(\sqrt{4}+2)}$$
$$=\frac{1}{16}$$

**4.** $\mathrm{P}(A)=a$, $\mathrm{P}(B)=b$라 하자.

두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이고, $\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)$이므로

$a=2b$ …… ㉠

또, $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{8}$이므로

$ab=\frac{1}{8}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2b^2=\frac{1}{8}$이므로 $b=\frac{1}{4}$이다.

$\therefore a=2b=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

**5.** $\lim_{x\to1}\frac{ax+b}{x-1}=2$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

$a+b=0$ $\quad\therefore b=-a$

$$\lim_{x\to1}\frac{ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{ax-a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}a=a=2$$

$\therefore a=2, b=-2$

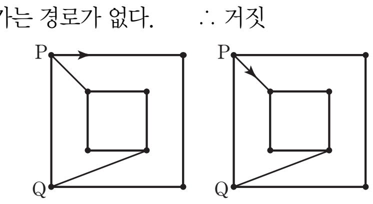
$\therefore a^2+b^2=4+4=8$

**6.**
$$\int_{-1}^{1}k(x+1)(x-1)^2dx=k\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)dx$$
$$=2k\int_0^1(-x^2+1)dx$$
$$=2k\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=\frac{4}{3}k=1$$

$\therefore k=\frac{3}{4}$

**7.** ㄱ. 그래프 $G_1$의 변의 개수가 10이므로 그래프 $G_1$의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분의 합은 20이다. $\therefore$ 참

ㄴ. 그래프 $G_2$에서 점 P를 출발하여 모든 변을 지나 점 Q로 가는 경로가 없다. $\quad\therefore$ 거짓




$G_2$ $\qquad$ $G_2$

ㄷ. 그래프 $G_1$은 어느 한 꼭짓점에서 그 꼭짓점까지 이동할 때, 5개의 변을 지나는 경로가 존재하지 않고 그래프 $G_2$는 존재한다. 따라서, 두 그래프 $G_1$, $G_2$는 서로 다르다. $\quad\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

**8.** A와 B가 가위, 바위, 보를 내는 경우는 다음과 같다.

| A | B |
|---|---|
| 가위 | 가위 |
| 가위 | 바위 |
| 가위 | 보 |
| 바위 | 가위 |
| 바위 | 바위 |
| 바위 | 보 |
| 보 | 가위 |
| 보 | 바위 |
| 보 | 보 |

이때 무승부인 경우는 (가위, 가위), (바위, 바위), (보, 보) 3가지이므로 가위, 바위, 보를 한 번 할 때 무승부일 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

따라서, 5번 중 무승부가 2번일 확률은

${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$

**9.** $x+y+200=1000$에서

$x+y=800$ …… ㉠

$\frac{12}{100}\times x+\frac{15}{100}\times y+\frac{18}{100}\times200=\frac{14.7}{100}\times1000$에서

$12x+15y+3600=14700$

$\therefore 4x+5y=3700$ …… ㉡

두 방정식 ㉠, ㉡을 행렬을 이용하여 나타내면

$\begin{pmatrix}1&1\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}800\\3700\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1\\-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}800\\3700\end{pmatrix}$

$\therefore a+b=1$

**10.** $\overline{\mathrm{AB}}=\log_2 3-\log_8 3=\frac{2}{3}\log_2 3$

$\overline{\mathrm{CD}}=\log_2 6-\log_8 6=\frac{2}{3}\log_2 6$

그러므로 사다리꼴 ABDC의 넓이를 $S$라 하면

$S=\frac{1}{2}\times3\times\frac{2}{3}(\log_2 3+\log_2 6)$

$=1+2\log_2 3$

**11.** $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n\cdot2^{3n-1}-(n-1)2^{3n-4}$

$=(8n-n+1)2^{3n-4}$

$=(7n+1)2^{3n-4}$ (단, $n\ge2$)

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(7n+1)2^{3n-4}}{n\cdot2^{3n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{7n+1}{8n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{1}{n}}{8}$$
$$=\frac{7}{8}$$

**12.** '가' 형의 12번과 동일

**13.** 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(100, \frac{4^2}{36}\right)$를 따른다.

$\mathrm{P}(99\le\overline{X}\le101.5)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{99-100}{\frac{2}{3}}\le Z\le\frac{101.5-100}{\frac{2}{3}}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.5\le X\le 2.25)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.25)$
$=0.4332+0.4878$
$=0.9210$

**14.** 곡선 $y=k(x^2-1)$이 $x$축과 만나는 점이 $(-1, 0)$, $(1, 0)$이므로

$$S_1=\int_{-1}^{1}k|x^2-1|dx=2k\int_0^1(1-x^2)dx$$
$$=2k\Big[x-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{4}{3}k$$

곡선 $y=(x-k)(x+k)$이 $x$축과 만나는 점이 $(-k, 0)$, $(k, 0)$이므로

$$S_2=\int_{-k}^{k}|(x-k)(x+k)|dx=2\int_0^k(k^2-x^2)dx$$
$$=2\Big[k^2x-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^k=\frac{4}{3}k^3$$

$2S_1=S_2$이므로

$$2\times\frac{4}{3}k=\frac{4}{3}k^3,\ k^2=2$$
$$\therefore k=\sqrt{2}\ (\because k>0)$$

**15.** (가)에서 $\dfrac{a}{1-r}=4\times\dfrac{ar}{1-r^2}$이므로 $r=\dfrac{1}{3}$

(나)에서 $\dfrac{a}{1-r}=-12+\dfrac{a^2}{1-r^2}$

이때 $r=\dfrac{1}{3}$을 대입하면 $3a^2-4a-32=0$

$$\therefore a=4\ (\because a>0)$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\frac{4}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{2}$$

**16.** '가' 형의 16번과 동일

**17.** $\dfrac{1}{4}x^2-1=0$에서 $x=2$ 또는 $x=-2$

점 A의 좌표를 $(a, 0)$ $(0<a<2)$로 놓고,
직사각형 ABCD의 넓이를 $f(a)$라 하면

$$f(a)=2a\Big(1-\frac{1}{4}a^2\Big)=-\frac{1}{2}a^3+2a$$
$$f'(a)=-\frac{3}{2}a^2+2$$

$f'(a)=0$에서 $a=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 또는 $a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$0<a<2$에서 증감표를 조사하면 $a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$에서 극대이면서 최댓값을 갖는다.
따라서, 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$$f\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)=\frac{4}{\sqrt{3}}\Big(1-\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}\Big)$$
$$=\frac{8}{3\sqrt{3}}$$
$$=\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

**18.** ㄱ. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to 2}g(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)f(x)=(2-2)\times 1=0$

$\therefore$ 참

ㄴ. $g(2)=(2-2)f(2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)=0$

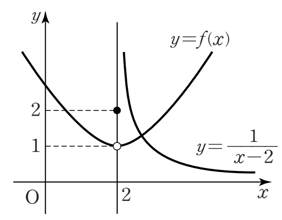
따라서, 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이다. $\therefore$ 참

ㄷ. $g(2)=0\ne 1$

$x\ne 2$일 때 $g(x)=(x-2)f(x)=1$에서

$$f(x)=\frac{1}{x-2}\ (x\ne 2)$$

두 함수 $y=f(x)$와 $y=\dfrac{1}{x-2}$의 교점의 개수가 방정식 $g(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수이다.




그림과 같이 교점이 1개이므로 서로 다른 실근은 1개이다. $\therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

**19.** '가' 형의 19번과 동일

**20.** 임의로 ○, ×를 답할 때,

맞힐 확률은 $\dfrac{1}{2}$, 틀릴 확률은 $\dfrac{1}{2}$

$n$번째 문제 이내에 문제를 맞히어 통과되는 사건을 $A$라 하면

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

이때 $\mathrm{P}(A^C)$는 $n$번째 문제까지 모두 틀리는 확률이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\Big(\frac{1}{2}\Big)^n$$
$$\therefore \mathrm{P}(n)=\mathrm{P}(A)=1-\Big(\frac{1}{2}\Big)^n$$
$$\therefore \mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(2)+\mathrm{P}(3)+\cdots+\mathrm{P}(10)$$
$$=10-\sum_{k=1}^{10}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k$$
$$=10-\frac{\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{2^{10}}\Big)}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=9+\frac{1}{2^{10}}$$

**21~22.** '가' 형의 21~22번과 동일

**23.** $\Big(\dfrac{x}{6}-6\Big)^6$의 전개식에서 $x^2$의 계수는

$${}_6\mathrm{C}_2\times\Big(\frac{1}{6}\Big)^2\times(-6)^4=15\times 36=540$$

**24.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-4}{x^2-1}=3$이므로 $f(1)-4=0$

$\therefore f(1)=4$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-4}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2}f'(1)=3$$

$\therefore f'(1)=6$
$\therefore f(1)+f'(1)=10$

**25.** $\displaystyle\int_0^2(x-1)x^2dx+\int_0^2(x-1)xdx+\int_0^2(x-1)dx$

$$=\int_0^2\{(x^3-x^2)+(x^2-x)+(x-1)\}dx$$
$$=\int_0^2(x^3-1)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{4}x^4-x\Big]_0^2$$
$$=\frac{16}{4}-2=2$$

[다른 풀이]

$$\int_0^2(x-1)x^2dx+\int_0^2(x-1)xdx+\int_0^2(x-1)dx$$
$$=\int_0^2(x-1)(x^2+x+1)dx$$
$$=\int_0^2(x^3-1)dx=\Big[\frac{1}{4}x^4-x\Big]_0^2$$
$$=\frac{16}{4}-2=2$$

**26.** $f(x)=x^3-ax^2+bx$에서 $f'(x)=3x^2-2ax+b$

점 O(0, 0)에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=b=3$

$f'(x)=3x^2-2ax+b=0$에서

$$\frac{D}{4}=a^2-3b=0,\ a^2=9\qquad \therefore a=3\ (\because a>0)$$
$$\therefore a+b=3+3=6$$

**27.** '가' 형의 27번과 동일

**28.** $\log N_p=a-0.9\times 4$ …… ㉠

$\log N_q=a-0.9\times 2.6$ …… ㉡

㉡−㉠에서

$$\log\frac{N_q}{N_p}=0.9\times(4-2.6)=1.26$$
$$\therefore k=\frac{N_q}{N_p}=10^{1.26}=10\times 1.8=18$$

**29.** $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx=k$로 놓으면

$$f(x)=x\int_{-1}^{1}f(x)dx+n=kx+n$$
$$k=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}(kx+n)dx$$
$$=2\int_0^1 ndx=2\Big[nx\Big]_0^1=2n$$
$$\therefore f(x)=2nx+n$$

$y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 $y$축과의 교점은

$$\Big(-\frac{1}{2},\ 0\Big),\ (0,\ n)$$

따라서, $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times n=\frac{1}{4}n$$
$$\therefore S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{40}=\sum_{n=1}^{40}\frac{1}{4}n$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{40(40+1)}{2}$$
$$=5\times 41=205$$

**30.** 제$n$행에 나열된 수의 개수는

$1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k=1+\frac{(n-1)n}{2}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

제1행에서 제9행까지의 나열된 수의 총 개수는

$$\sum_{i=1}^{9}\Big\{1+\frac{(i-1)i}{2}\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}(i^2-i+2)$$
$$=\frac{1}{2}\times\Big(\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}-\frac{9\cdot 10}{2}-18\Big)$$
$$=129$$

이때 $129=25\times 5+4$이므로 제10행의 첫 번째 수는 5이다.

또, 제10행에 나열된 수의 개수는 $1+\dfrac{9\cdot 10}{2}=46$이므로 제10행에 나열된 수들의 합

$(5+4+3+2+1)\times 9+5=140$