

# 수리 영역

## (‘가’형)



종로학평

시간 : 100 분

점수 : 100 점

1.  $\log_2 \sqrt[4]{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$ 의 값은?

[2점]

- ①  $\frac{1}{3}$                       ②  $\frac{2}{3}$                       ③ 1  
 ④  $\frac{4}{3}$                       ⑤  $\frac{5}{3}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 3}{x^2}$ 의 값은?

[2점]

- ①  $-\frac{9}{2}$                       ②  $-\frac{7}{2}$                       ③  $-\frac{5}{2}$   
 ④  $-\frac{3}{2}$                       ⑤  $-\frac{1}{2}$

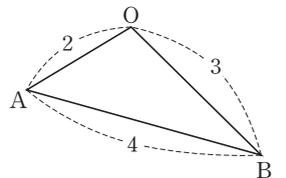
2. 두 행렬  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 에 대하여  $AB = BX$ 일 때,행렬  $X$ 의 모든 성분의 합은?

[2점]

- ① -3                      ② -2                      ③ 0  
 ④ 2                      ⑤ 3

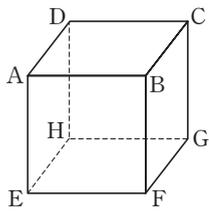
4. 그림과 같이 삼각형 OAB에서  $\overline{OA} = 2$ ,  $\overline{OB} = 3$ ,  $\overline{AB} = 4$ 일 때, 두 벡터  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ 의 내적  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 의 값은?

[3점]



- ①  $-\frac{3}{2}$   
 ② -1  
 ③  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 ④  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 ⑤  $-\frac{1}{2}$

5. 그림과 같은 정육면체 ABCD-EFGH에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]



<보 기>

㉠. $\overline{AE} \perp \overline{BD}$ ㉡. $\overline{AG} \perp \overline{BD}$ ㉢. $\overline{AG} \perp \overline{DF}$
--

- ① ㉠                      ② ㉠, ㉡                      ③ ㉠, ㉢  
 ④ ㉡, ㉢                      ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

6. 함수  $f(x) = \begin{cases} 3^x + a & (x \leq 2) \\ \frac{x \cdot 2^x - 2^{x+1}}{x-2} & (x > 2) \end{cases}$  가  $x=2$ 에서 연속일 때, 상수  $a$ 의 값은? [3점]

① -5                      ② -3                      ③ -1  
 ④ 2                        ⑤ 3

7. 포물선  $y^2=8x$ 의 초점을 지나고  $y$ 축에 평행한 직선과 이 포물선의 교점 중 제1사분면에 있는 점을 P라고 하자. 점 P를 지나고 이 포물선에 접하는 직선과 이 포물선의 준선의 교점의  $y$ 좌표는? [3점]

- ①  $-\frac{1}{2}$                       ②  $-\frac{1}{4}$                       ③ 0  
 ④  $\frac{1}{4}$                         ⑤  $\frac{1}{2}$

8.  $\int_1^e \frac{\ln x^2}{x^2} dx$ 의 값은? [3점]

①  $2 - \frac{4}{e}$                       ②  $2 - \frac{2}{e}$                       ③  $\frac{2}{e}$   
 ④  $2 + \frac{2}{e}$                       ⑤  $2 + \frac{4}{e}$

9. 문방구 진열대에 A, B, C, D, E의 5종류의 필기구가 나열되어 있다. 이 중에서 12자루를 선택하는데 반드시 A는 2자루 이상, B는 3자루 이상, C는 1자루 이상이 되도록 선택하는 경우의 수는? (단, 각 필기구는 12자루 이상씩 있고, 같은 종류의 필기구는 서로 구별되지 않는다.) [3점]

- ① 180                      ② 190                      ③ 200
- ④ 210                      ⑤ 220

10. 양수  $a$ 에 대하여 구간  $[0, a]$ 에서 정의된 연속확률변수  $X$ 의 확률밀도함수가  $f(x) = e^x$ 일 때, 확률변수  $X$ 의 기댓값  $E(X)$ 의 값은? [3점]

- ①  $\ln \frac{3}{e}$                       ②  $\ln \frac{4}{e}$                       ③  $\ln \frac{8}{e^2}$
- ④  $\ln \frac{9}{e^2}$                       ⑤  $\ln \frac{12}{e^2}$

11. 삼차함수  $f(x) = x^3 + ax + 3$ 의 극솟값이  $-20$ 일 때,  $f(x)$ 의 극댓값은? (단,  $a$ 는 상수이다.) [3점]

- ① 17                      ② 20                      ③ 23
- ④ 26                      ⑤ 29

12.  $|x| > 1$ 인 어떤 실수  $x$ 와 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x = 1 - (-1)^n$$

을 만족하는 수열  $\{a_n\}$ 이 있다. 다음은  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴함을 증명하고 그 값을 구하는 과정이다.

<증명>

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x = 1 - (-1)^n \text{에서}$$

$$n=1 \text{일 때, } a_1 x = 2 \text{에서 } a_1 = \frac{2}{x}$$

$$n=2 \text{일 때, } a_2 x^2 + a_1 x = 0 \text{에서 } a_2 = \boxed{\text{(가)}}$$

$$n=3 \text{일 때, } a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x = 2 \text{에서 } a_3 = \frac{2}{x^3}$$

...

$$a_n = \boxed{\phantom{00}} \times \frac{2}{x^n}$$

그런데,  $|x| > 1$ 에서  $\left| \frac{1}{x} \right| < 1$ 이므로  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{\text{(나)}}$$

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각  $f(x)$ ,  $g(x)$ 라 할 때,  $f(4) + g(4)$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{9}{40}$                       ②  $\frac{11}{40}$                       ③  $\frac{13}{40}$
- ④  $\frac{3}{8}$                       ⑤  $\frac{17}{40}$

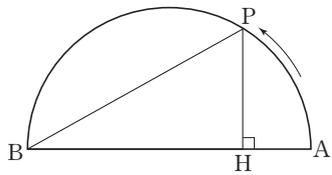
13. 역변환이 존재하는 두 일차변환  $f, g$ 가 있다. 일차변환  $f$ 를 나타내는 행렬이  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ 이고, 일차변환  $g^{-1} \circ f$ 를 나타내는 행렬이  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ 일 때, 일차변환  $g$ 에 의하여 직선  $y=2x$ 가 옮겨지는 직선의 기울기는?

[4점]

- ① -2                      ② -1                      ③ 0  
④ 1                        ⑤ 2

14. 그림과 같이 지름 AB의 길이가 6인 반원에서 점 P가 점 A를 출발하여  $\angle PBA$ 의 크기가 매초  $\frac{1}{4}$ (rad)씩 커지도록 원주 위를 움직이고 있다. 점 P에서 지름 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때,  $\overline{BH}=4$ 가 되는 순간, 선분 PH의 길이의 시간(초)에 대한 순간변화율은?

[4점]



- ①  $\frac{1}{3}$                       ②  $\frac{1}{2}$                       ③  $\frac{2}{3}$   
④  $\frac{3}{4}$                       ⑤  $\frac{4}{3}$

15. 양수  $a$ 에 대하여 연립부등식  $\begin{cases} \frac{x^2-ax}{x+a} \geq 0 \\ (x^2-ax)(x-a) \leq 0 \end{cases}$  을 만족시키는

정수  $x$ 의 개수가 3이 되도록 하는 양수  $a$ 의 값의 범위는? [4점]

- ①  $1 \leq a < 2$                       ②  $1 < a \leq 2$                       ③  $2 \leq a < 3$   
④  $2 < a \leq 3$                       ⑤  $3 \leq a < 4$

16. 두 이차정사각행렬  $A, B$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단,  $E$ 는 단위행렬이고,  $O$ 는 영행렬이다.) [4점]

〈보 기〉

- ㄱ.  $AB=A$ 이고  $A \neq O$ 이면  $B$ 의 역행렬이 존재한다.  
ㄴ.  $A^2=E$ 이면  $A-2E$ 의 역행렬이 존재한다.  
ㄷ.  $A \neq E$ 이고  $A^{21}=A^{12}=E$ 이면  $A^2+A+E$ 의 역행렬은 존재하지 않는다.

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ  
④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 일차변환  $f$ 를 나타내는 행렬이  $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ 일 때, 모든 자연수  $n$ 에 대하여 좌표평면 위의 점  $A_n(x_n, y_n)$ 이 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가)  $x_1=1, y_1=0$   
 (나)  $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

이때  $|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \dots + \overrightarrow{A_8A_9}|$ 의 값은? (단,  $O$ 는 원점이다.) [4점]

- ① 64                      ② 128                      ③ 256  
 ④ 512                      ⑤ 1024

18. 함수  $f(x) = \left| \frac{x^3}{x-1} \right|$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>  
 ㄱ.  $k > 0$ 일 때,  $f'(1-k)f'(1+k) < 0$ 이다.  
 ㄴ. 곡선  $y=f(x)$ 에서 기울기가 0인 접선은 2개 존재한다.  
 ㄷ. 방정식  $f(x)=k$ 가 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 정수  $k$ 의 최솟값은 7이다.

- ① ㄱ                      ② ㄷ                      ③ ㄱ, ㄷ  
 ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 수열  $\{a_n\}$ 을

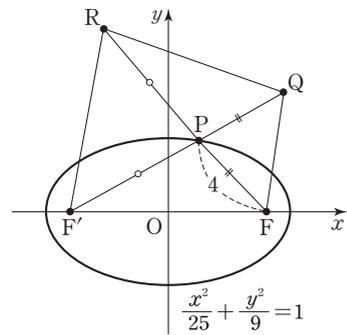
$a_1=8, (n+1)a_n=na_{n+1}+2 (n=1, 2, 3, \dots)$

로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>  
 ㄱ. 수열  $\left\{ \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} \right\}$ 의 제5항은  $\frac{1}{15}$ 이다.  
 ㄴ. 수열  $\left\{ \frac{a_n}{n} - \frac{2}{n} \right\}$ 의 제10항은 6이다.  
 ㄷ.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 6$

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄷ  
 ④ ㄱ, ㄴ                      ⑤ ㄴ, ㄷ

20. 그림과 같이 타원  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점을  $F, F'$ 이라 할 때,  $\overline{FP}=4$ 가 되도록 타원 위에 점  $P$ 를 잡는다. 또, 선분  $F'P$ 의 연장선 위에  $\overline{PF}=\overline{PQ}$ 인 점  $Q$ 를 잡고, 선분  $FP$ 의 연장선 위에  $\overline{PF}'=\overline{PR}$ 인 점  $R$ 를 잡는다. 이때 사각형  $F'FQR$ 의 넓이는? [4점]



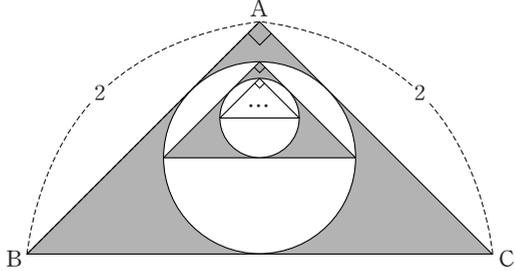
- ①  $10\sqrt{15}$                       ②  $\frac{25}{2}\sqrt{15}$                       ③  $15\sqrt{3}$   
 ④  $15\sqrt{5}$                       ⑤  $15\sqrt{15}$

21.  $\overline{AB}=\overline{AC}=2$ 인 직각이등변삼각형 ABC에 대하여 다음과 같은 단계에 따라 원과 직각이등변삼각형을 그리는 시행을 반복한다.

[1단계] : 직각이등변삼각형 ABC에 내접하는 원을 그리고, 그 원에 내접하는 직각이등변삼각형을 그린다.

[n단계] : (n-1)단계에서 그린 직각이등변삼각형에 대하여 [1단계]와 같은 방법으로 원과 직각이등변삼각형을 그린다.

(단,  $n=2, 3, 4, \dots$ )



위와 같은 과정을 한없이 반복할 때, 그림과 같이 각 단계에 만들어지는 직각이등변삼각형과 그 삼각형에 내접하는 원 사이의 어두운 부분의 넓이의 총합은  $k(1-(3-2\sqrt{2})\pi)$ 이다. 이때 상수  $k$ 의 값은? [3점]

- ①  $4-2\sqrt{2}$                       ②  $4+2\sqrt{2}$                       ③  $1+\sqrt{2}$
- ④  $1+2\sqrt{2}$                       ⑤  $2+2\sqrt{2}$

단답형

22. 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_2a_3a_7=512$ 일 때,  $a_4$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 다항식  $(x^2 - \frac{a}{x})^6$ 의 전개식에서  $x^3$ 과  $x^6$ 의 계수의 합이 0일 때,  $100a$ 의 값을 구하시오. (단,  $a$ 는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

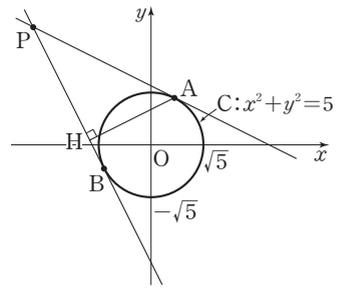
24. 미분가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x+4)-4}{(x-4)(x+4)} = \frac{1}{4}$  일 때,  
 $f(8)+f'(8)$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 연속확률변수  $X$ 가 정규분포  $N(90, 6^2)$ 을 따를 때,  $P(X \leq a) = 0.9332$ 을 만족시키는 상수  $a$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [3점]

[표준정규분포표]

$z$	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

26. 원  $C : x^2 + y^2 = 5$ 의 외부의 점  $P$ 에서 원  $C$ 에 그은 접선의 두 접점을 각각  $A, B$ 라 하고, 점  $A$ 에서 직선  $PB$ 에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하자. 점  $P$ 에서 원  $C$  위의 점까지의 최단거리가  $2\sqrt{5}$ 일 때, 선분  $AH$ 의 길이는  $\frac{q}{p}\sqrt{5}$  ( $p, q$ 는 서로소인 자연수)이다. 이때  $p+q$ 의 값을 구하시오. [4점]



27. 좌표평면에서 두 부등식  $1 < 8^x \leq 16^y$ ,  $\log_{\frac{1}{7}}(7-x) \leq \log_{\frac{1}{7}}y$ 를 모두 만족하는 점  $(x, y)$ 가 존재하는 영역의 넓이를 구하시오. [4점]

28. 2개의 구슬이 들어 있는 상자가 있다. 다음과 같은 방법으로 이 상자에 구슬을 넣거나 이 상자에서 구슬을 꺼내는 시행을 한다.

- (가) 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오면 상자에 한 개의 구슬을 넣고, 뒷면이 나오면 상자에서 한 개의 구슬을 꺼낸다.  
 (나) 상자에 들어 있는 구슬이 하나도 없거나 5개가 되면 시행을 끝낸다.

이 시행이 끝날 때까지 동전을 던진 횟수가 4 이하일 확률은  $\frac{q}{p}$  ( $p, q$ 는 서로소인 자연수)이다. 이때  $p+q$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 좌표평면에서 연립부등식

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ y \geq \sin x \\ y \leq \cos 2x \end{cases}$$

를 만족시키는 영역을  $x$ 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는  $\frac{q}{p}\sqrt{3}\pi$  ( $p, q$ 는 서로소인 자연수)이다. 이때  $p+q$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 좌표공간에서  $A(3, 4, 5), B(5, 5, 4)$ 에 대하여 평면  $\alpha$ 가 다음 두 조건을 만족시킨다.

- (가) 평면  $\alpha$ 는 직선  $AB$ 를 포함한다.  
 (나) 평면  $\alpha$ 와  $xy$  평면의 교선은 직선  $AB$ 와 수직이다.

이때 평면  $\alpha$ 와  $xy$  평면의 교선이  $x$ 축과 만나는 점의  $x$ 좌표는  $k$ 이다.  $20k$ 의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.