제2교시

수리 영역(가형)

大成學力開發硏究所

1. $(\log_3 5+\log_9 5)\log_5 3$의 값은? [2점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

2. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 등식 $AB-A=E$를 만족시키는 행렬 B의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.) [2점]

① -2 ② -1 ③ 1

④ 2 ⑤ 3

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin x\,dx$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 1

4. 함수 $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 부등식 $\frac{1}{g(x)}+2\leq 0$을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

5. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

6. $0 \le x \le \pi$에서 정의된 함수 $f(x)=4\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$의 최솟값은? **[3점]**

① -1 ② $-\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{3}$
④ -3 ⑤ -4

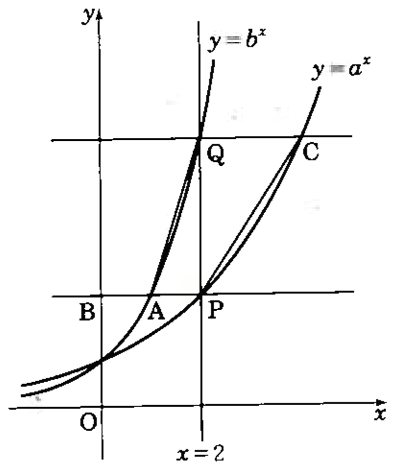
7. 이차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=4$
(나) $f(2-x)=f(2+x)$
(다) $f(2)<0$

무리방정식 $\sqrt{f(|x|)-x}=f(|x|)-x-2$의 실근의 개수는? **[3점]**

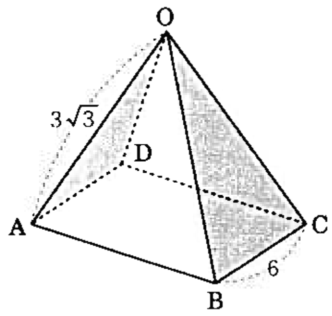
① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

8. 그림과 같이 좌표평면에서 직선 $x=2$가 두 곡선 $y=a^x$, $y=b^x$ $(1<a<b)$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=b^x$과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 하고, 점 Q를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=a^x$과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{PA}=\overline{AB}$이고, 사각형 PCQA의 넓이가 9일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? **[3점]**



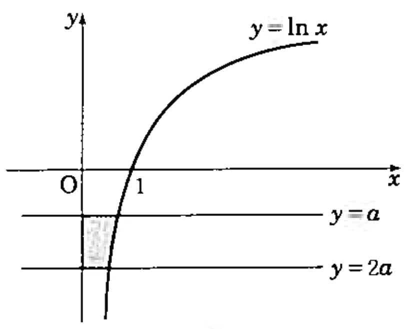
① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 6

9. 그림과 같이 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=3\sqrt{3}$, $\overline{BC}=6$이고, 밑면이 직사각형인 사각뿔 O$-$ABCD가 있다. 평면 OAD와 평면 OBC가 서로 수직일 때, 선분 AB의 길이는? **[3점]**



① $3\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ 6
④ $3\sqrt{6}$ ⑤ 8

10. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=\ln x$와 y축 및 두 직선 $y=a$, $y=2a$로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 $S(a)$라 하자. $a<0$일 때, 함수 $S(a)$의 최댓값은? **[3점]**



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{e}$
④ $\frac{2}{e}$　⑤ $\frac{1}{e^2}$

11. 이차정사각행렬을 원소로 갖는 집합 M을

$$M=\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \middle| \, a,\, b\text{는 0이 아닌 실수}\right\}$$

로 정의하자. 집합 M의 임의의 두 원소 A, B에 대하여 항상 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) **[3점]**

〈보기〉

ㄱ. $AB \neq E$　　ㄴ. $AB \in M$
ㄷ. $AB \neq A$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 어느 도시의 주민을 대상으로 어느 축구 경기의 시청률을 조사하였더니 60%이었다고 한다. 이 도시의 주민 중 임의로 150명을 택할 때, 이 축구 경기를 시청한 사람이 99명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? **[3점]**

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.8	0.2881
1.0	0.3413
1.2	0.3849
1.5	0.4332

① 0.3849　② 0.5762　③ 0.8413
④ 0.8849　⑤ 0.9332

13. 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin ax - x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$이 실수 전체에서 연속이 되도록 하는 양수 a의 최솟값은? **[4점]**

① $\frac{\pi}{2}$　② π　③ $\frac{3}{2}\pi$
④ 2π　⑤ $\frac{5}{2}\pi$

14. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^{n} k(2n+1)=\sum_{k=1}^{n} 3k^2 \cdots(*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

〈증명〉

(1) $n=1$일 때

(좌변)=(우변)=3이므로 등식 $(*)$이 성립한다.

(2) $n=m$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때

등식 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} k(2m+1)=\sum_{k=1}^{m} 3k^2$$

이다.

$n=m+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} k(2m+3)=\sum_{k=1}^{m+1} k(2m+1)+\sum_{k=1}^{m+1}\boxed{\text{(가)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m} k(2m+1)+\boxed{\text{(나)}}+\sum_{k=1}^{m+1}\boxed{\text{(가)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m} 3k^2+3(m+1)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\boxed{\text{(다)}}$$

따라서 $n=m+1$일 때도 등식 $(*)$이 성립한다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(m)$, $h(k)$라 할 때, $f(1)+g(2)+h(3)$의 값은? **[4점]**

① 44 ② 46 ③ 48 ④ 50 ⑤ 52

15. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2,\ \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=3$$

일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? **[3점]**

〈보기〉

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(f(x))}{x}=1$

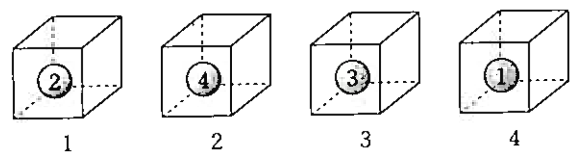
ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)}{\sin f(x)}=1$

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(g(x))}{g(f(x))}=1$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

16. 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적힌 4개의 상자가 차례로 놓여 있고, 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적힌 4개의 공이 있다. 4개의 공을 각 상자에 임의로 한 개씩 넣을 때, 상자에 적힌 숫자와 그 상자 안에 있는 공에 적힌 숫자가 서로 같은 상자의 개수를 확률변수 X라 하자. 예를 들어 다음 그림에서 $X=1$이다.

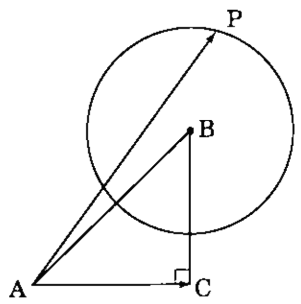


$\mathrm{E}(X)$의 값은? **[4점]**

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{7}{8}$ ③ 1

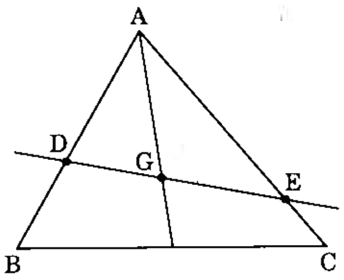
④ $\frac{9}{8}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

17. $\overline{AC}=\overline{BC}=\sqrt{2}$, $\angle C=90°$인 직각이등변삼각형 ABC가 있다. 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$의 최댓값은? **[4점]**



① 2 ② $2+\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $2+2\sqrt{2}$ ⑤ $4+2\sqrt{2}$

18. 그림과 같이 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하고, 변 AB를 $x:(1-x)$로 내분하는 점을 D, 변 AC를 $y:(1-y)$로 내분하는 점을 E라 하자. 세 점 D, G, E가 한 직선 위에 있을 때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$의 값은? (단, $0<x<1$, $0<y<1$이다.) **[4점]**

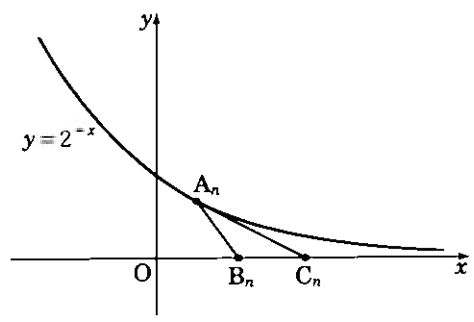


① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

19. 함수 $f(x)=e^{2x}-4ae^{x}+2x$의 극댓값과 극솟값의 합이 -102일 때, 상수 a의 값은? **[4점]**

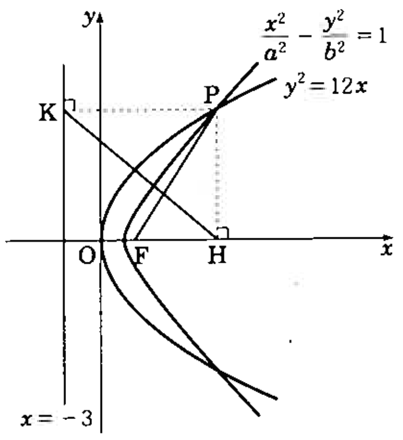
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

20. 그림과 같이 좌표평면에서 함수 $y=2^{-x}$의 그래프 위의 점 A_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$과 x축 위의 두 점 B_n, C_n에 대하여 점 A_n의 x좌표는 n이고 점 A_n, B_n, C_n의 x좌표는 이 순서대로 공비가 2인 등비수열을 이룬다고 한다. 삼각형 $A_nB_nC_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$임을 이용하여 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값을 구하면? **[4점]**



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

21. 그림과 같이 좌표평면에서 포물선 $y^2=12x$와 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(x>0)$이 점 F를 초점으로 공유하고 있다. 두 곡선의 한 교점 P에서 x축 및 직선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 각각 H, K라 하자. $\overline{\mathrm{HK}}=\overline{\mathrm{PF}}+4$일 때, 선분 FH의 길이는? [4점]



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

단답형

22. 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)+\frac{1}{12}$이고, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{24}$일 때, $\mathrm{P}(A)=\frac{q}{p}$이다. $10p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

23. A, B, C, D, E, F의 6명이 원형의 탁자에 둘러앉을 때, A, B는 서로 이웃하고, C, D는 서로 이웃하지 않도록 앉는 방법의 수를 구하시오. [3점]

24. 자연수 n에 대하여 x에 대한 다항식

$$f(x)=(3n^2+n)x^2+(n-1)x+1$$

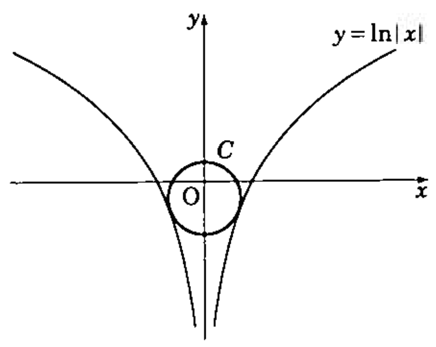
을 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지를 각각 a_n, b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값을 구하시오. [3점]

25. 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환 f에 의해 점 $(1,\ 1)$이 점 $(0,\ 2)$로 옮겨질 때, 일차변환 $(f \circ f)^{-1}$에 의해 점 $(0,\ 2)$가 옮겨지는 점의 좌표는 $(p,\ q)$이다. $10p+q$의 값을 구하시오. [3점]

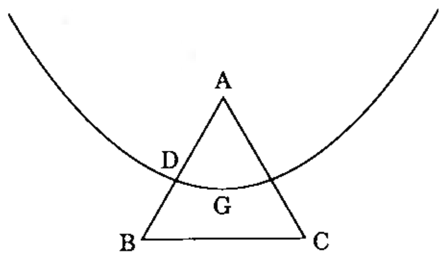
26. 5개의 정수 0, 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 세 수를 택하여 만든 세 자리의 자연수 중에서 임의로 선택한 수가 짝수이었을 때, 이 자연수의 일의 자리의 수가 0일 확률은 p이다. $100p$의 값을 구하시오. [4점]

27. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0$과 평면 $z=4$가 만나서 생기는 도형 위의 한 점을 P라 할 때, 점 $\mathrm{A}(3,\ 6,\ 1)$에 대하여 선분 AP의 길이의 최솟값을 m이라 하자. m^2의 값을 구하시오. [4점]

28. 곡선 $y=\ln|x|$ 위의 두 점 $(t,\ \ln t)$, $(-t,\ \ln t)$에서 접하는 원 C의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t \to +0} \dfrac{10S(t)}{\pi t^2}$의 값을 구하시오. (단, $t>0$) [4점]



29. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하자. 점 G를 꼭짓점으로 하고 점 A를 초점으로 하는 포물선과 변 AB가 만나는 점을 D라 할 때, 선분 AD의 길이는 $p+q\sqrt{3}$이다. $q-p$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]



30. 지면에 수직으로 세워져 있는 과녁을 향하여 과녁으로부터 거리가 1000m만큼 떨어진 지점에서 총을 쏠 때, 총알은 과녁에 수직인 방향으로 등속운동을 한다고 가정하자. 총을 쏜 다음 초고속 카메라를 이용하여 다음과 같이 규칙적으로 총알의 위치를 추적하여 사진을 찍기로 한다.

> 총을 쏜 순간부터 $\frac{1}{2}$초 후에 첫번째 사진을 찍고, 첫번째 사진을 찍은 순간부터 $\frac{1}{4}$초 후에 두 번째 사진을 찍고, 두 번째 사진을 찍은 순간부터 $\frac{1}{8}$초 후에 세 번째 사진을 찍는다. 이와 같이 $(n+2)$번째 찍은 순간과 $(n+1)$번째 찍은 순간의 시간 차는 $(n+1)$번째 찍은 순간과 n번째 찍은 순간의 시간 차의 $\frac{1}{2}$이 되도록 사진을 찍는다. (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8$)

총을 쏜 순간부터 정확히 1초 후에 총알이 과녁에 맞는다고 할 때, 10번째로 사진을 찍은 순간 총알과 과녁 사이의 거리는 $\frac{q}{p}$m이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ **확인 사항**
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제2교시

수리 영역(나형)

大成學力開發研究所

1. $(\log_3 5+\log_9 5)\log_5 3$의 값은? [2점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

2. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 등식 $AB-A=E$를 만족시키는 행렬 B의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.) [2점]

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

3. 함수 $f(x)=2ax^2+3bx+1$에 대하여 $f'(1)=10$, $f'(-1)=2$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. 빨간 공 5개와 파란 공 5개가 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의의 두 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 빨간 공 1개와 파란 공 1개가 나올 확률은? [3점]

① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{28}{45}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

5. 함수 $y=x^3-2x^2+ax+4$의 그래프 위의 점 $(1,\ 5)$에서의 접선이 점 $(3,\ b)$를 지난다. 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

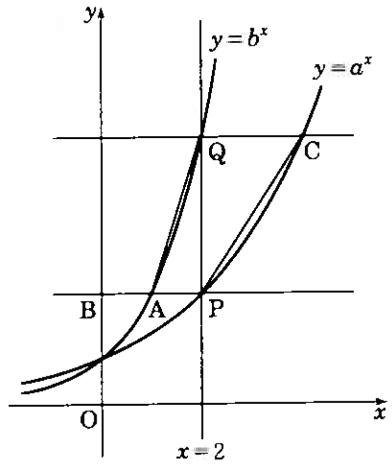
6. 행렬 $\begin{pmatrix} 3^x-12 & -3^{x+1} \\ 9 & 3^{2x} \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않도록 하는 모든 실수 x의 값의 합은? [3점]

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 12

7. 어느 음식점에서 네 종류의 햄버거 A, B, C, D 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하고, 또 네 종류의 디저트 P, Q, R, S 중에서 서로 다른 두 개를 선택한 다음 햄버거와 디저트를 함께 주문하려고 한다. 주문할 수 있는 모든 방법의 수는? (단, 주문하는 순서는 고려하지 않는다.) [3점]

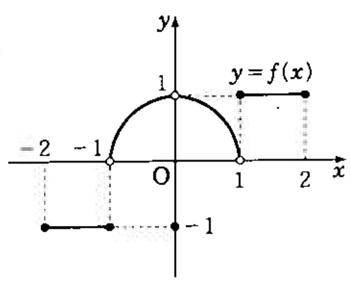
① 40 ② 60 ③ 80
④ 100 ⑤ 120

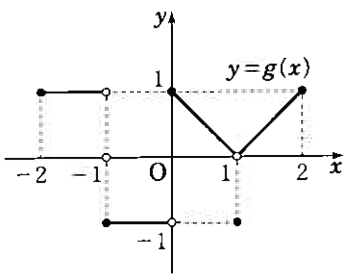
8. 그림과 같이 좌표평면에서 직선 $x=2$가 두 곡선 $y=a^x$, $y=b^x$ $(1<a<b)$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=b^x$과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 하고, 점 Q를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=a^x$과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{PA}=\overline{AB}$이고, 사각형 PCQA의 넓이가 9일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? [3점]



① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 6

9. 닫힌 구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]





〈보기〉

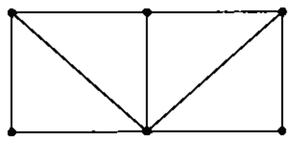
ㄱ. $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} g\left(-1+\frac{1}{n}\right)=-1$

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 오른쪽 그림과 같은 그래프에 n개의 변을 추가하여 만든 그래프를 G라 하자. 그래프 G의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합이 30일 때, n의 값은? [3점]



① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

11. 이차정사각행렬을 원소로 갖는 집합 M을

$$M=\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \middle|\, a,\ b\text{는 0이 아닌 실수}\right\}$$

로 정의하자. 집합 M의 임의의 두 원소 A, B에 대하여 항상 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

〈보기〉

ㄱ. $AB \neq E$ ㄴ. $AB \in M$

ㄷ. $AB \neq A$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 확률변수 X의 확률질량함수가

$$P(X=n)=\frac{a}{\sqrt{4n+2\sqrt{4n^2-1}}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12)$$

일 때, $P(5 \le X \le 12)$의 값은? (단, a는 상수) [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

13. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 (0, 2)를 지난다.
(나) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 -2를 갖고, $x=3$에서 극댓값을 갖는다.

함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

14. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^{n} k(2n+1)=\sum_{k=1}^{n} 3k^2 \cdots (*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

〈증명〉
(1) $n=1$일 때
(좌변)=(우변)=3이므로 등식 $(*)$이 성립한다.
(2) $n=m$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때
등식 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} k(2m+1)=\sum_{k=1}^{m} 3k^2$$

이다.
$n=m+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} k(2m+3)&=\sum_{k=1}^{m+1} k(2m+1)+\sum_{k=1}^{m+1} \boxed{(가)}\\&=\sum_{k=1}^{m} k(2m+1)+\boxed{(나)}+\sum_{k=1}^{m+1}\boxed{(가)}\\&=\sum_{k=1}^{m} 3k^2+3(m+1)^2\\&=\sum_{k=1}^{m+1}\boxed{(다)}\end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$일 때도 등식 $(*)$이 성립한다.
그러므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(m)$, $h(k)$라 할 때, $f(1)+g(2)+h(3)$의 값은? [4점]

① 44 ② 46 ③ 48 ④ 50 ⑤ 52

15. 어느 질병에 대한 예방접종을 실시하였을 때, 예방접종을 받은 사람 중 $\frac{19}{20}$가 항체가 형성되었고, 예방접종을 받지 않은 사람 중 $\frac{3}{100}$이 항체가 형성되었다고 한다. 예방접종을 받은 사람이 전체의 $\frac{1}{5}$인 어떤 집단에서 임의로 한 명을 택하여 검사를 하였더니 항체가 형성되어 있었을 때, 이 사람이 예방접종을 받았을 확률은? [3점]

① $\frac{147}{214}$ ② $\frac{95}{107}$ ③ $\frac{193}{214}$
④ $\frac{98}{107}$ ⑤ $\frac{199}{214}$

16. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(2-x)=f(2+x)$이다.
(나) $f(0)=0$, $f'(1)=0$

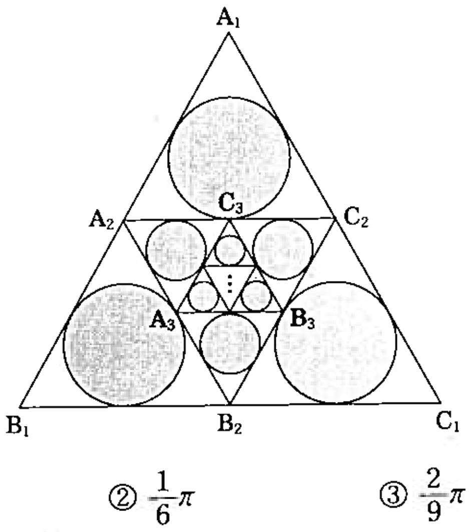
함수 $f(x)$가 $x=p$에서 극댓값 q를 가질 때, $p+q$의 값은? [4점]

① -8 ② -7 ③ -6
④ -5 ⑤ -4

17. 수직선 위를 같은 방향으로 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 점 P는 원점에서 출발하여 t초 후의 속도가 $3t^2$이고, 점 Q는 좌표가 32인 점에서 점 P와 동시에 출발하여 일정한 속도 a로 움직인다고 한다. 이때, 두 점 P, Q는 $t=8$인 순간 좌표가 b인 점에서 만난다고 한다. $a+b$의 값은? [4점]

① 570 ② 572 ③ 574 ④ 576 ⑤ 578

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 세 변 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1의 중점을 각각 A_2, B_2, C_2라 하고, 세 삼각형 $A_1A_2C_2$, $B_1B_2A_2$, $C_1C_2B_2$에 각각 내접하는 세 원의 넓이의 합을 S_1이라 하자. 또, 정삼각형 $A_2B_2C_2$의 세 변 A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2의 중점을 각각 A_3, B_3, C_3이라 하고, 세 삼각형 $A_2A_3C_3$, $B_2B_3A_3$, $C_2C_3B_3$에 각각 내접하는 세 원의 넓이의 합을 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 세 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

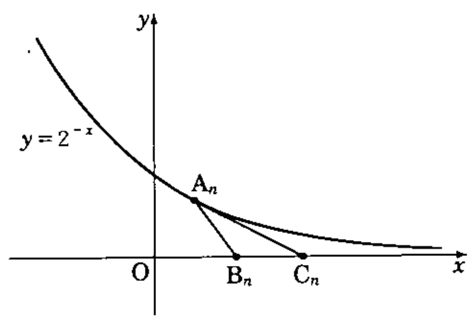


① $\frac{1}{9}\pi$ ② $\frac{1}{6}\pi$ ③ $\frac{2}{9}\pi$ ④ $\frac{5}{18}\pi$ ⑤ $\frac{1}{3}\pi$

19. 어느 제과 회사에서 생산되는 단팥빵의 무게는 표준편차가 8g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 제과 회사에서 생산된 단팥빵 중 임의추출한 n개의 무게의 평균으로 모평균 m을 신뢰도 95%로 추정하면 $\alpha \le m \le \beta$이다. $\beta-\alpha \le 8$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은? (단, Z가 표준정규분포를 따를 때, $P(0 \le Z \le 1.96)=0.4750$이다.) [4점]

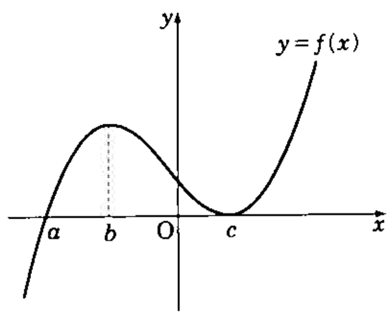
① 16 ② 15 ③ 14 ④ 13 ⑤ 12

20. 그림과 같이 좌표평면에서 함수 $y=2^{-x}$의 그래프 위의 점 A_n ($n=1, 2, 3, \cdots$)과 x축 위의 두 점 B_n, C_n에 대하여 점 A_n의 x좌표는 n이고 점 A_n, B_n, C_n의 x좌표는 이 순서대로 공비가 2인 등비수열을 이룬다고 한다. 삼각형 $A_nB_nC_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2^n}=0$임을 이용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하면? [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

21. 그림과 같이 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$가 $x=a$, $x=c$에서 x축과 만나고, $x=b$, $x=c$에서 극값을 갖는다. 함수 $F(x)=\{f(x)\}^2$에 대하여 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a<b<c$) [4점]



〈보기〉

ㄱ. 함수 $F(x)$는 $x=a$에서 극소이다.
ㄴ. 함수 $F(x)$는 구간 (b, c)에서 증가한다.
ㄷ. 방정식 $F(x)-F(b)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 연립방정식 $\begin{pmatrix} a & -2 \\ 12 & a-10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$의 해가 무수히 많도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

23. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$a_1+b_1=5$, $\sum_{n=1}^{20} a_n+\sum_{n=1}^{20} b_n=400$일 때, $a_{20}+b_{20}$의 값을 구하시오. [3점]

24. 자연수 n에 대하여 x에 대한 다항식

$$f(x)=(3n^2+n)x^2+(n-1)x+1$$

을 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지를 각각 a_n, b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값을 구하시오. [3점]

25. 등식 $f(x)=3x^2+2x-\int_0^1 f(t)dt$를 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$$

의 값을 구하시오. [4점]

26. 구간 [0, 2]에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=ax+\frac{1}{4}$이다. $\mathrm{E}(6X+5)$의 값을 구하시오. [3점]

27. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{2x^2}=-1$

(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$

$f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

28. 자연수 n에 대하여 집합 A_n을

$$A_n=\left\{k \,\middle|\, n-\frac{1}{2}\le\sqrt{k}<n+\frac{1}{2},\ k\text{는 자연수}\right\}$$

라 하자. 집합 A_n의 원소의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

29. 양의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=\log x-[\log x]$ 라 할 때, 집합

$A=\{n \mid f(n)\le f(50),\ n\text{은 } 100 \text{ 이하의 자연수}\}$

의 원소의 개수를 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

30. 지면에 수직으로 세워져 있는 과녁을 향하여 과녁으로부터 거리가 1000m만큼 떨어진 지점에서 총을 쏠 때, 총알은 과녁에 수직인 방향으로 등속운동을 한다고 가정하자. 총을 쏜 다음 초고속 카메라를 이용하여 다음과 같이 규칙적으로 총알의 위치를 추적하여 사진을 찍기로 한다.

> 총을 쏜 순간부터 $\frac{1}{2}$초 후에 첫번째 사진을 찍고, 첫번째 사진을 찍은 순간부터 $\frac{1}{4}$초 후에 두 번째 사진을 찍고, 두 번째 사진을 찍은 순간부터 $\frac{1}{8}$초 후에 세 번째 사진을 찍는다. 이와 같이 $(n+2)$번째 찍은 순간과 $(n+1)$번째 찍은 순간의 시간 차는 $(n+1)$번째 찍은 순간과 n번째 찍은 순간의 시간 차의 $\frac{1}{2}$이 되도록 사진을 찍는다. (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8$)

총을 쏜 순간부터 정확히 1초 후에 총알이 과녁에 맞는다고 할 때, 10번째로 사진을 찍은 순간 총알과 과녁 사이의 거리는 $\frac{q}{p}$m이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ **확인 사항**
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2011년 11월 대성모의대학수학능력시험 고3

정답 및 해설

大成學力開發研究所 대표전화 (02)812-8001~3

❶교시 언어 영역

1. ⑤	2. ④	3. ③	4. ③	5. ④
6. ⑤	7. ③	8. ④	9. ②	10. ④
11. ⑤	12. ⑤	13. ⑤	14. ①	15. ⑤
16. ③	17. ①	18. ⑤	19. ③	20. ④
21. ⑤	22. ①	23. ④	24. ③	25. ①
26. ③	27. ⑤	28. ③	29. ②	30. ①
31. ②	32. ⑤	33. ②	34. ③	35. ④
36. ③	37. ⑤	38. ④	39. ④	40. ④
41. ③	42. ④	43. ②	44. ③	45. ④
46. ③	47. ③	48. ④	49. ③	50. ⑤

❷교시 수리 영역(가형)

1. ①	2. ⑤	3. ④	4. ③	5. ②
6. ④	7. ④	8. ④	9. ③	10. ①
11. ③	12. ⑤	13. ③	14. ①	15. ⑤
16. ③	17. ②	18. ①	19. ⑤	20. ④
21. ②	22. 41	23. 24	24. 4	25. 10
26. 40	27. 14	28. 10	29. 40	30. 253

❷교시 수리 영역(나형)

1. ①	2. ⑤	3. ③	4. ②	5. ④
6. ①	7. ⑤	8. ④	9. ③	10. ④
11. ③	12. ⑤	13. ②	14. ①	15. ②
16. ③	17. ②	18. ⑤	19. ①	20. ④
21. ③	22. 6	23. 35	24. 4	25. 16
26. 12	27. 5	28. 110	29. 47	30. 253

❸교시 외국어(영어) 영역

1. ④	2. ③	3. ②	4. ⑤	5. ③
6. ①	7. ⑤	8. ①	9. ③	10. ④
11. ①	12. ⑤	13. ④	14. ②	15. ④
16. ②	17. ⑤	18. ⑤	19. ③	20. ①
21. ⑤	22. ②	23. ③	24. ②	25. ②
26. ①	27. ①	28. ④	29. ⑤	30. ③
31. ③	32. ④	33. ⑤	34. ⑤	35. ②
36. ④	37. ⑤	38. ⑤	39. ②	40. ②
41. ①	42. ①	43. ④	44. ③	45. ⑤
46. ④	47. ④	48. ③	49. ①	50. ②

❹교시 사회탐구 영역

선 택

[윤 리]

1. ③	2. ④	3. ④	4. ③	5. ①
6. ②	7. ②	8. ③	9. ③	10. ④
11. ②	12. ④	13. ⑤	14. ②	15. ③
16. ⑤	17. ③	18. ③	19. ⑤	20. ③

[국 사]

1. ①	2. ①	3. ④	4. ②	5. ⑤
6. ④	7. ③	8. ④	9. ①	10. ②
11. ①	12. ⑤	13. ③	14. ②	15. ②
16. ③	17. ③	18. ⑤	19. ④	20. ④

[한국지리]

1. ④	2. ①	3. ③	4. ①	5. ②
6. ③	7. ②	8. ⑤	9. ③	10. ④
11. ⑤	12. ②	13. ①	14. ③	15. ④
16. ④	17. ③	18. ⑤	19. ②	20. ⑤

[세계지리]

1. ④	2. ③	3. ③	4. ①	5. ⑤
6. ②	7. ④	8. ③	9. ②	10. ⑤
11. ③	12. ②	13. ④	14. ①	15. ⑤
16. ②	17. ③	18. ①	19. ③	20. ⑤

수리 영역(가형)

1. $(\log_3 5+\log_9 5)\log_5 3$

$=\left(\log_3 5+\frac{1}{2}\log_3 5\right)\log_5 3$

$=\frac{3}{2}\log_3 5\cdot\log_5 3=\frac{3}{2}$

답 ①

2. $AB=A+E$에서

$B=A^{-1}(A+E)$

$=E+A^{-1}$

$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-3\\-1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5&-3\\-1&2\end{pmatrix}$

따라서 구하는 합은 3이다.

답 ⑤

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\sin x dx$

$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 3x-\cos x)dx$

$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin 3x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}-1\right)=\frac{2}{3}$

답 ④

4. $y=\frac{x-2}{x+1}$에서 $y(x+1)=x-2$, $x=\frac{-y-2}{y-1}$

$\therefore g(x)=\frac{-x-2}{x-1}=-\frac{x+2}{x-1}$

부등식 $\frac{1}{g(x)}+2\le 0$을 풀면

$-\frac{x-1}{x+2}+2\le 0$

$\frac{x+5}{x+2}\le 0$

$\therefore -5\le x<-2$

따라서 구하는 정수의 개수는 3이다.

답 ③

5. $f(x)=\ln\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}$으로 놓으면

$f(0)=\ln 1=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$=f'(0)$

$f'(x)=\frac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}}$이므로

$f'(0)=\frac{6}{3}=2$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}=2$

답 ②

6. $f(x)=4\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$

$=4\times\frac{1}{2}\left\{\sin 2x+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=2\left(\sin 2x-\frac{1}{2}\right)$

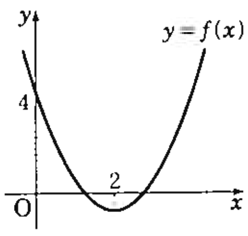
$=2\sin 2x-1$

$0\le x\le\pi$에서 $0\le 2x\le 2\pi$이므로 $f(x)$는

$2x=\frac{3\pi}{2}$, 즉 $x=\frac{3\pi}{4}$일 때 최솟값 -3을 갖는다.

답 ④

7. 조건 (나)에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 그래프는 다음과 같다.



$f(|x|)-x=t$라 하면 $\sqrt{t}=t-2$ ⋯ ㉠

㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

$(t-4)(t-1)=0$

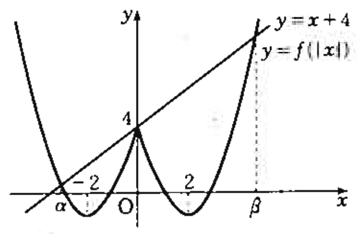
$\therefore t=1$ 또는 $t=4$

㉠에서 $t=1$일 때 무연근이므로 $t=4$

$\therefore f(|x|)-x=4$

$f(|x|)=x+4$

주어진 식의 실근의 개수는 곡선 $y=f(|x|)$와 직선 $y=x+4$의 교점의 개수와 같다.



위 그림과 같이 $y=f(|x|)$와 $y=x+4$의 교점의 x좌표는 α, 0, β의 3개이다.

답 ④

8. $\overline{PA}=\overline{AB}$이고, $\overline{PB}=2$이므로 $\overline{PA}=\overline{AB}=1$

점 A의 좌표는 $(1,\ b)$, 점 P의 좌표는 $(2,\ a^2)$이다.

$\therefore b=a^2$

따라서 점 Q의 좌표는 $(2,\ b^2)$이고, 점 C의 좌표는 $(2\log_a b,\ b^2)$, 즉 $(4,\ b^2)$이다.

이때, □PCQA의 넓이가 9이므로

□PCQA$=\frac{1}{2}(1+2)\times\overline{PQ}=9$

$\therefore \overline{PQ}=6$

즉, $b^2-a^2=b^2-b=6$, $(b-3)(b+2)=0$

$\therefore b=3$, $a=\sqrt{3}$

$\therefore ab=3\sqrt{3}$

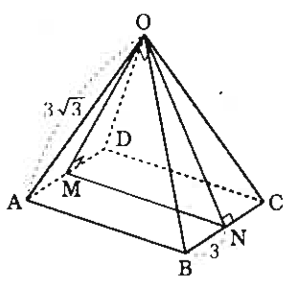
답 ④

9. 꼭짓점 O에서 두 모서리 AD, BC에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면 △OAD, △OBC는 이등변삼각형이므로 두 점 M, N은 각각 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$의 중점이다.

$\therefore \overline{AB}=\overline{MN}$

두 평면 OAD, OBC가 이루는 각의 크기는 ∠MON=90°이므로 △OMN은 $\overline{MN}$이 빗변이고 $\overline{OM}=\overline{ON}=3\sqrt{2}$인 직각이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{AB}=\overline{MN}=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=6$



답 ③

10. $y=\ln x$에서 $x=e^y$이므로

$S(a)=\int_{2a}^{a}xdy=\int_{2a}^{a}e^y dy$

$=\left[e^y\right]_{2a}^{a}=e^a-e^{2a}$

$e^a=t(0<t<1)$라 하면

$e^a-e^{2a}=t-t^2$

$=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

따라서 $S(a)$는 $t=\frac{1}{2}$, 즉 $a=\ln\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{1}{4}$을 갖는다.

답 ①

11. ㄱ. 집합 M의 임의의 원소의 역행렬이 존재하지 않으므로 $AB\ne E$ (참)

ㄴ. $A=\begin{pmatrix}a&a\\b&b\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}c&c\\d&d\end{pmatrix}$라 하면

$A\in M$, $B\in M$이고

$AB=\begin{pmatrix}a&a\\b&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&c\\d&d\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}ac+ad&ac+ad\\bc+bd&bc+bd\end{pmatrix}$

이므로 $AB\in M$이다. (참)

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix}a&a\\b&b\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$이라 하면 $A\in M$, $B\in M$이고

$AB=\begin{pmatrix}a&a\\b&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a\\b&b\end{pmatrix}=A$

이다. (거짓)

답 ③

12. 150명 중 축구 경기를 시청한 사람의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 B(150, 0.6)을 따른다.

$\therefore$ E$(X)=150\times 0.6=90$

V$(X)=150\times 0.6\times 0.4=36$

이때, $n=150$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 정규분포 N$(90,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

P$(X\le 99)=$P$\left(\frac{X-90}{6}\le\frac{99-90}{6}\right)$

$=$P$(Z\le 1.5)$

$=0.5+$P$(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5+0.4332=0.9332$

답 ⑤

13. $f(x)=\begin{cases}-x & (|x|>1)\\ \sin ax & (|x|<1)\\ \frac{\sin a-1}{2} & (x=1)\\ \frac{-\sin a+1}{2} & (x=-1)\end{cases}$

실수 전체에서 함수 $f(x)$가 연속이 되려면

$\lim_{x\to 1+0}(-x)=\lim_{x\to 1-0}\sin ax=\frac{\sin a-1}{2}$

$\therefore \sin a=-1$ ⋯ ㉠

또, $\lim_{x\to -1-0}(-x)=\lim_{x\to -1+0}\sin ax=\frac{-\sin a+1}{2}$

$\therefore \sin(-a)=1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\sin a=-1$이므로 양수 a의 최솟값은 $\frac{3}{2}\pi$이다.

답 ③

14. (1) $n=1$일 때 (좌변)=(우변)=3이므로 등식 (*)이 성립한다.

(2) $n=m$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때 등식 (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} k(2m+1)=\sum_{k=1}^{m} 3k^2$$

이다.

$n=m+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} k(2m+3)$$
$$=\sum_{k=1}^{m+1} k(2m+1)+\sum_{k=1}^{m+1}\boxed{2k}$$
$$=\sum_{k=1}^{m} k(2m+1)+\boxed{(m+1)(2m+1)}+\sum_{k=1}^{m+1}2k$$
$$=\sum_{k=1}^{m} 3k^2+(m+1)(2m+1)+(m+1)(m+2)$$
$$=\sum_{k=1}^{m} 3k^2+3(m+1)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{m+1}\boxed{3k^2}$$

따라서 $n=m+1$일 때도 등식 (*)이 성립한다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

$\therefore\ f(k)=2k,\ g(m)=(m+1)(2m+1),$
$h(k)=3k^2$

$\therefore\ f(1)+g(2)+h(3)=2+15+27=44$

답 ①

15. ㄱ. $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $x\to0$일 때,

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\therefore\ x\to0$일 때 $f(x)\to0$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(f(x))}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$$
$$=\lim_{z\to0}\frac{f(z)}{z}\cdot\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$$
$$=4\ (\text{거짓})$$

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)}{\sin f(x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{\sin f(x)}$$
$$=\lim_{z\to0}\frac{f(z)}{z}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)}\cdot\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}$$
$$=2\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cdot1=1\ (\text{참})$$

ㄷ. $\lim_{x\to0}\frac{f(g(x))}{g(f(x))}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(g(x))}{g(x)}\cdot\frac{g(x)}{x}\cdot\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{g(f(x))}$$
$$=\lim_{z\to0}\frac{f(z)}{z}\cdot\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)}\cdot\lim_{t\to0}\frac{t}{g(t)}$$
$$=2\cdot3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=1\ (\text{참})$$

답 ⑤

16. 4개의 공을 4개의 상자에 넣는 방법의 수는 $4!=24$(가지)

i) $X=4$인 경우는 1가지이므로

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{24}$$

ii) $X=3$인 경우는 없으므로 $\mathrm{P}(X=3)=0$이다.

iii) $X=2$인 경우는 다음과 같다.

4개의 공 중에서 같은 숫자의 상자에 들어갈 2개를 택하여 넣는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$이고, 나머지 2개의 공을 서로 다른 숫자의 상자에 넣는 방법의 수는 1이므로 $6\times1=6$(가지)이다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{6}{24}$$

iv) $X=1$인 경우는 다음과 같다.

4개의 공 중에서 같은 숫자의 상자에 들어갈 1개를 택하여 넣는 방법의 수는 ${}_4C_1=4$이고, 나머지 3개의 공을 서로 다른 숫자의 상자에 넣는 방법의 수는 2이므로 $4\times2=8$(가지)이다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{8}{24}$$

v) $X=0$인 경우의 확률은

$$\mathrm{P}(X=0)=1-\frac{1+0+6+8}{24}=\frac{9}{24}$$

$$\therefore\ \mathrm{E}(X)=4\times\frac{1}{24}+0+2\times\frac{6}{24}+1\times\frac{8}{24}+0$$
$$=\frac{4+12+8}{24}=1$$

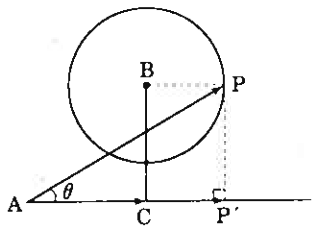
답 ③

17. $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta$

점 P에서 $\overline{\mathrm{AC}}$에서 내린 수선의 발을 P′라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{AP'}}|$



$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 값이 최대가 될 때는 $\overline{\mathrm{BP}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{AP'}}$일 때이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\le|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{AP'}}|=\overline{\mathrm{AC}}(\overline{\mathrm{AC}}+1)$

$=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$

답 ②

18. $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$ $\cdots$ ㉠

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{x}{x+(1-x)}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ $\cdots$ ㉡

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{y}{y+(1-y)}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ $\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{1}{y}\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$$
$$=\frac{1}{3x}\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{1}{3y}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

따라서 세 점 D, G, E가 한 직선 위에 있을 조건은

$\frac{1}{3x}+\frac{1}{3y}=1$에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$

답 ①

19. $f(x)=e^{2x}-4ae^x+2x$에서

$f'(x)=2e^{2x}-4ae^x+2$

$e^x=t\,(t>0)$로 놓으면 방정식 $f'(x)=0$은 $2t^2-4at+2=0$, 즉 $t^2-2at+1=0$이 되고 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-1>0$이고 $a>0$

$\therefore\ a>1$

두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$e^\alpha+e^\beta=2a,\ e^{\alpha+\beta}=1$

$\therefore\ \alpha+\beta=0$

$f(\alpha)=e^{2\alpha}-4ae^\alpha+2\alpha$

$f(\beta)=e^{2\beta}-4ae^\beta+2\beta$

$f(\alpha)+f(\beta)=e^{2\alpha}+e^{2\beta}-4a(e^\alpha+e^\beta)+2(\alpha+\beta)$

$=(e^\alpha+e^\beta)^2-2e^{\alpha+\beta}-4a(e^\alpha+e^\beta)$

$=4a^2-2-8a^2$

$=-4a^2-2$

$-4a^2-2=-102$이므로 $a^2=25$

$\therefore\ a=5\ (\because\ a>1)$

답 ⑤

20. 점 $\mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n,\ \mathrm{C}_n$의 x좌표가 $n,\ 2n,\ 4n$이므로 $\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 넓이 S_n은

$$S_n=\frac{1}{2}\times2n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n}{2^n}$$

$\sum_{k=1}^{n}S_k=T_n$이라 하면

$T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$이므로

$$T_n-\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{2^{n+1}}$$
$$T_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{n}{2^n}$$
$$=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{n}{2^n}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}T_n=2\ \left(\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0\right)$$

답 ④

21. 포물선 $y^2=12x$의 초점은 $(3,\ 0)$이므로 점 F의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.

또한, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점은 $\mathrm{F}(3,\ 0)$과 $\mathrm{F'}(-3,\ 0)$이다.

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{HK}}=\overline{\mathrm{PF}}+4$에서

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a=4$

$\therefore\ a=2$

한편 $a^2+b^2=3^2$이므로 $b^2=5$

따라서 점 P는 두 곡선 $y^2=12x,\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 교점이다.

$\frac{x^2}{4}-\frac{12x}{5}=1$에서

$5x^2-48x-20=0,\ (5x+2)(x-10)=0$

$x>0$이므로 $x=10$

$\therefore\ \overline{\mathrm{FH}}=10-3=7$

답 ②

22. 단답형 $\mathrm{P}(A)=a$라 하면 $\mathrm{P}(B)=a-\frac{1}{12}$

두 사건 $A,\ B$는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=a\left(a-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{24}$$

$24a^2-2a-1=(6a+1)(4a-1)=0$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=a=\frac{1}{4}$

$\therefore\ p=4,\ q=1$

$\therefore\ 10p+q=40+1=41$

답 41

23. 단답형 A, B를 한 묶음 X로 생각하자.

X, E, F를 원형의 탁자에 앉히는 방법의 수는

$\frac{3!}{3}=2$(가지)

X, E, F 사이에 있는 3자리 중 2자리에 C, D를 앉히는 방법의 수는

${}_3\mathrm{P}_2=6$(가지)

묶음 X에서 A, B가 앉을 자리를 택하는 방법의 수는

$2!=2$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는

$2\times6\times2=24$(가지)

답 24

24. 단답형 $f(x)=(3n^2+n)x^2+(n-1)x+1$을 $x-1$로 나눈 나머지는

$f(1)=3n^2+n+n-1+1=3n^2+2n$

$\therefore a_n=3n^2+2n$

또, $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는

$f(2)=4(3n^2+n)+2(n-1)+1$

$=12n^2+6n-1$

$\therefore b_n=12n^2+6n-1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+6n-1}{3n^2+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{12+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n}}=4$

답 4

25. 단답형 $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$이므로

$1+a=2 \quad \therefore a=1$

일차변환 f를 나타내는 행렬을 A라 할 때,

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$(f\circ f)^{-1}$를 나타내는 행렬은 $(A^2)^{-1}$

$(A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

따라서 구하는 점의 좌표는 (1, 0)이다.

$\therefore 10p+q=10+0=10$

답 10

26. 단답형 임의로 택한 수가 짝수인 사건을 A라 하고, 일의 자리의 수가 0인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$이다.

5개의 정수 0, 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 세 수를 택하여 만든 세 자리의 자연수의 개수는

$4\times4\times3=48$

이다. 이 중에서 짝수의 개수는

i) 일의 자리의 수가 0인 경우

$4\times3\times1=12$

ii) 일의 자리의 수가 2 또는 4인 경우

$3\times3\times2=18$

이므로 $12+18=30$이다.

$\therefore P(A)=\frac{30}{48}$

$P(A\cap B)=P(B)=\frac{12}{48}$

따라서 구하는 확률은

$p=P(B|A)=\frac{\frac{12}{48}}{\frac{30}{48}}=\frac{2}{5}$

$\therefore 100p=100\times\frac{2}{5}=40$

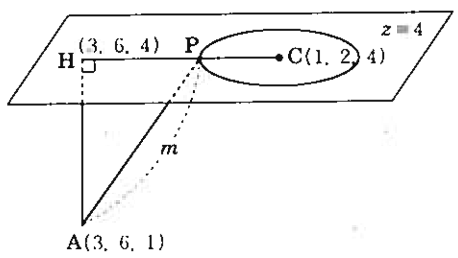
답 40

27. 단답형 구 $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0$은 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$

평면 $z=4$와 구가 만나서 생기는 도형을 C라 하면

$C:(x-1)^2+(y-2)^2=5$

도형 C는 중심이 C(1, 2, 4)이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이다.



위 그림과 같이 점 A(3, 6, 1)에서 $z=4$에 내린 수선의 발을 H라 하면, H(3, 6, 4)

$\overline{CH}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$이고 $\overline{CH}$와 원 C의 교점이 P가 될 때 $\overline{AP}$의 길이가 최소가 된다.

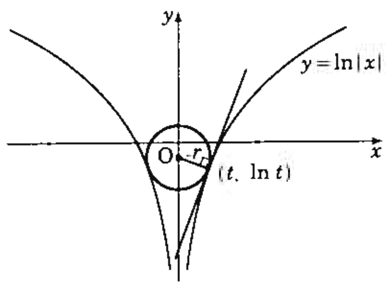
$\overline{CP}=\sqrt{5}$이므로 $\overline{PH}=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$

$\overline{AH}=3$이고 $\overline{PH}=\sqrt{5}$이므로

$m^2=9+5=14$

답 14

28. 단답형



원 C의 반지름의 길이를 r라 하자.

$y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 점 $(t, \ln t)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}$이다.

따라서 점 $(t, \ln t)$에서의 법선의 방정식은

$y=-t(x-t)+\ln t$

이 직선은 원 C의 중심을 지나므로 원 C의 중심의 좌표는 $(0, t^2+\ln t)$이다.

반지름의 길이 r는 원 C의 중심과 점 $(t, \ln t)$ 사이의 거리이므로

$r^2=(t-0)^2+(\ln t-t^2-\ln t)^2$

$=t^2+t^4=t^2(1+t^2)$

$\therefore S(t)=\pi r^2=\pi t^2(1+t^2)$

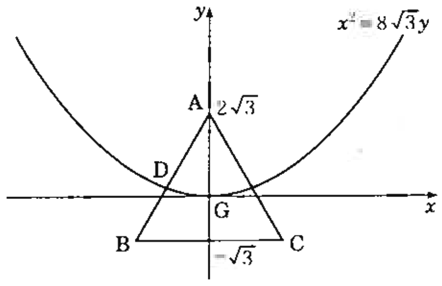
$\therefore \lim_{t\to+0}\frac{10S(t)}{\pi t^2}=\lim_{t\to+0}\frac{10\pi t^2(1+t^2)}{\pi t^2}=10$

답 10

29. 단답형 그림과 같이 삼각형 ABC의 무게중심 G가 원점에 오고 점 A가 양의 y축에 오도록 놓으면 포물선의 꼭짓점은 G(0, 0)이고 초점은 A$(0, 2\sqrt{3})$이므로 포물선의 방정식은

$x^2=4\cdot2\sqrt{3}y$

$\therefore x^2=8\sqrt{3}y \quad \cdots\cdots$ ㉠



또, 직선 AB의 기울기는 $\tan 60°=\sqrt{3}$이므로 직선 AB의 방정식은

$y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$x^2=8\sqrt{3}(\sqrt{3}x+2\sqrt{3})$

$\therefore x^2-24x-48=0$

$\therefore x=12\pm\sqrt{12^2+48}=12\pm8\sqrt{3}$

따라서 점 D의 x좌표는

$x=12-8\sqrt{3}$ ($\because x<0$)

$\sin 30°=\frac{|x|}{\overline{AD}}$

$\therefore \overline{AD}=2|x|=2(8\sqrt{3}-12)=-24+16\sqrt{3}$

$\therefore q-p=16-(-24)=40$

답 40

30. 단답형 10번째로 찍는 순간까지 총알이 날아간 거리는

$1000\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}\right)=1000\times\frac{1023}{1024}$

이므로 총알과 과녁 사이의 거리는

$1000\times\left(1-\frac{1023}{1024}\right)=\frac{125}{128}$ (m)

$\therefore p+q=128+125=253$

답 253

수리 영역(나형)

1~2. ☞ 가형 풀이 1~2번을 보시오.

3. $f'(x)=4ax+3b$에서

$f'(1)=4a+3b=10 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(-1)=-4a+3b=2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$6b=12 \quad \therefore b=2$

㉠에 대입하면 $a=1$

$\therefore a+b=3$

답 ③

4. 구하는 확률은

$\frac{{}_5C_1\times{}_5C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{25}{45}=\frac{5}{9}$

답 ②

5. $f(x)=x^3-2x^2+ax+4$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프가 점 (1, 5)를 지나므로

$5=1-2+a+4$

$\therefore a=2$

이때, $f'(x)=3x^2-4x+2$이므로

$f'(1)=3-4+2=1$

따라서 접선의 방정식은

$y-5=1\cdot(x-1)$

$\therefore y=x+4$

이 직선이 점 (3, b)를 지나므로

$b=3+4=7$

$\therefore a+b=2+7=9$

답 ④

6. $\begin{pmatrix}3^x-12 & -3^{x+1}\\ 9 & 3^{2x}\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(3^x-12)\cdot3^{2x}+9\cdot3^{x+1}=0$

$3^{3x}-12\cdot3^{2x}+27\cdot3^x=0$

$3^x=t\ (t>0)$라 하면

$t^3-12t^2+27t=0, \quad t(t^2-12t+27)=0$

$t(t-9)(t-3)=0 \quad \therefore t=3$ 또는 $t=9$

즉, $x=1$ 또는 $x=2$이다.

따라서 구하는 합은 $1+2=3$이다.

답 ①

7. 네 종류의 햄버거 A, B, C, D 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 방법의 수는

$_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$(가지)

또, 네 종류의 디저트 P, Q, R, S 중에서 서로 다른 두 개를 선택하는 방법의 수는

$_4C_2=6$(가지)

따라서 주문할 수 있는 모든 방법의 수는

$20\times6=120$(가지)

답 ⑤

8. ☞ 가형 풀이 **8**번을 보시오.

9. ㄱ. $\lim_{x\to+0}f(x)=1$, $\lim_{x\to-0}f(x)=1$

∴ $\lim_{x\to0}f(x)=1$ (참)

ㄴ. $-1+\frac{1}{n}=t$라 하면 $n\to\infty$일 때,

$t\to-1+0$

$\lim_{n\to\infty}g\left(-1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{t\to-1+0}g(t)=-1$ (참)

ㄷ. $\lim_{x\to-1+0}f(x)g(x)$

$=\lim_{x\to-1+0}f(x)\times\lim_{x\to-1+0}g(x)$

$=0\times(-1)=0$

$\lim_{x\to-1-0}f(x)g(x)$

$=\lim_{x\to-1-0}f(x)\times\lim_{x\to-1-0}g(x)$

$=(-1)\times1=-1$

이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)g(x)$가 존재하지 않는다.

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다. (거짓)

답 ③

10. 주어진 그래프의 변의 개수는 9이고 그래프 G의 변의 개수는 $\frac{30}{2}=15$이므로

$9+n=15$

∴ $n=6$

답 ④

11. ☞ 가형 풀이 **11**번을 보시오.

12. $\mathrm{P}(X=n)=\frac{a}{\sqrt{4n+2\sqrt{4n^2-1}}}$

$(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 12)$

$=\frac{a}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

$=\frac{a}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$

에서 확률의 총합이 1이므로

$\sum_{n=1}^{12}\mathrm{P}(X=n)=\sum_{n=1}^{12}\frac{a}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$

$=\frac{a}{2}\{(\sqrt3-1)+(\sqrt5-\sqrt3)+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{23})\}$

$=\frac{a}{2}(5-1)=2a=1$

∴ $a=\frac{1}{2}$

∴ $\mathrm{P}(5\le X\le12)$

$=\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)+\cdots+\mathrm{P}(X=12)$

$=\frac{1}{4}\{(\sqrt{11}-\sqrt9)+(\sqrt{13}-\sqrt{11})+\cdots$

$+(\sqrt{25}-\sqrt{23})\}$

$=\frac{1}{4}(\sqrt{25}-\sqrt9)=\frac{1}{2}$

답 ⑤

13. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는

$f'(x)=a(x-1)(x-3)$

$=a(x^2-4x+3)$ (단, a는 상수)

∴ $f(x)=\int f'(x)dx$

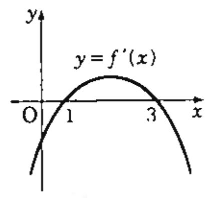
$=a\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)+C$

(단, C는 상수)

$f(0)=2$, $f(1)=-2$이므로 $C=2$, $a=-3$

∴ $f'(x)=-3(x^2-4x+3)$

따라서 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\int_1^3(-3x^2+12x-9)dx$

$=\left[-x^3+6x^2-9x\right]_1^3=4$

답 ②

14. ☞ 가형 풀이 **14**번을 보시오.

15. 예방접종을 받은 사람이 택하여지는 사건을 A, 항체가 형성되는 사건을 B라고 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$이다.

그런데, $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$이며

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{1}{5}\cdot\frac{19}{20}=\frac{19}{100}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{100}=\frac{12}{500}$

이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\frac{19}{100}}{\frac{19}{100}+\frac{12}{500}}=\frac{95}{107}$

답 ②

16. $f(0)=0$이고 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$로 놓을 수 있다.

$f(2-x)=f(2+x)$에서 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

이때, $f'(1)=0$이면 $f'(3)=0$이고 $f'(2)=0$이다.

∴ $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

$=4(x-1)(x-2)(x-3)$

$=4x^3-24x^2+44x-24$

∴ $a=-8$, $b=22$, $c=-24$

$f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x$이므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖는다.

$f(2)=16-64+88-48=-8$

∴ $p+q=2+(-8)=-6$

답 ③

17. 출발한 지 t초 후의 점 P의 좌표는

$\int_0^t 3t^2dt=t^3$

점 Q의 좌표는

$32+at$

$t=8$일 때, 두 점의 좌표가 같으므로

$8^3=32+8a$, $a=8^2-4$

∴ $a=60$

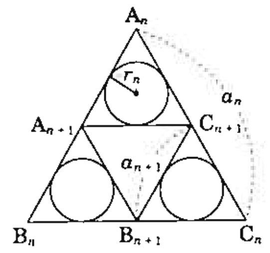
$t=8$일 때 두 점 P, Q의 좌표는

$b=8^3=512$

∴ $a+b=60+512=572$

답 ②

18. 정삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하고 정삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면



$a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ⋯ ㉠

$r_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt3}{2}a_{n+1}=\frac{\sqrt3}{6}a_{n+1}$ ⋯ ㉡

이므로

$r_n=\frac{\sqrt3}{12}a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ (∵ ㉠)

$r_{n+1}=\frac{\sqrt3}{12}a_{n+1}=\frac{\sqrt3}{12}\cdot\frac{6}{\sqrt3}r_n=\frac{1}{2}r_n$ (∵ ㉡)

반지름 r_n, r_{n+1}의 비가 $1:\frac{1}{2}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{4}$이다.

$r_1=\frac{\sqrt3}{12}a_1=\frac{\sqrt3}{6}$이므로 $S_1=3\left(\frac{\sqrt3}{6}\right)^2\pi=\frac{1}{4}\pi$

∴ $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{4}\pi}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\pi$

답 ⑤

19. 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\sigma=8$이므로 신뢰구간은

$\overline{X}-1.96\times\frac{8}{\sqrt n}\le m\le\overline{X}+1.96\times\frac{8}{\sqrt n}$

$\beta-\alpha=2\times1.96\times\frac{8}{\sqrt n}\le8$

∴ $\sqrt n\ge3.92$, $n\ge3.92^2=15.3664$

따라서 구하는 n의 최솟값은 16이다.

답 ①

20. ☞ 가형 풀이 **20**번을 보시오.

21. $F'(x)=2f(x)f'(x)$이므로 $F'(x)=0$, 즉 $f(x)=0$ 또는 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 a, b, c이다.

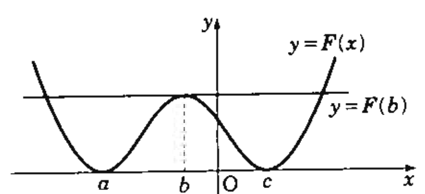
이때, $F(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	⋯	a	⋯	b	⋯	c	⋯
$f'(x)$	+	+	+	0	−	0	+
$f(x)$	−	0	+	+	+	0	+
$F'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$F(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $F(x)$는 $x=a$에서 극소이다. (참)

ㄴ. 구간 $(b,\ c)$에서 $F'(x)<0$이므로 함수 $F(x)$는 구간 $(b,\ c)$에서 감소한다. (거짓)

ㄷ. 함수 $y=F(x)$의 그래프와 직선 $y=F(b)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만난다. 즉, 방정식 $F(x)=F(b)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 방정식 $F(x)-F(b)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)



답 ③

22. 단답형 주어진 연립일차방정식의 해가 무수히 많으려면 행렬 $\begin{pmatrix} a & -2 \\ 12 & a-10 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$a(a-10)+24=0$

$(a-6)(a-4)=0 \quad \therefore a=4$ 또는 $a=6$

i) $a=4$일 때, 주어진 연립방정식은

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

이때, $\frac{4}{12}=\frac{-2}{-6}\neq\frac{8}{16}$이므로 해는 존재하지 않는다.

ii) $a=6$일 때, 주어진 연립방정식은

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

이때, $\frac{6}{12}=\frac{-2}{-4}=\frac{8}{16}$이므로 해는 무수히 많다.

따라서 i), ii)에 의해 $a=6$이다.

답 6

23. 단답형 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 등차수열이므로 $\{a_n+b_n\}$도 등차수열이다.

$$\sum_{n=1}^{20} a_n+\sum_{n=1}^{20} b_n=\sum_{n=1}^{20}(a_n+b_n)$$
$$=\frac{20(a_1+b_1+a_{20}+b_{20})}{2}$$
$$=\frac{20(5+a_{20}+b_{20})}{2}=400$$

$\therefore a_{20}+b_{20}=35$

답 35

24. ☞ 가형 풀이 **24**번을 보시오.

25. 단답형 $f(x)=3x^2+2x-\int_0^1 f(t)dt$에서

$\int_0^1 f(t)dt=a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=3x^2+2x-a$

$$a=\int_0^1(3t^2+2t-a)dt=\Big[t^3+t^2-at\Big]_0^1=2-a$$

$\therefore a=1 \quad \therefore f(x)=3x^2+2x-1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^3(3x^2+2x-1)dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[x^3+x^2-x\Big]_1^3$$
$$=\frac{1}{2}\{(27+9-3)-(1+1-1)\}$$
$$=16$$

답 16

26. 단답형 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(ax+\frac{1}{4}\right)dx$

$$=\left[\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{4}x\right]_0^2$$
$$=2a+\frac{1}{2}=1$$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$

$$E(X)=\int_0^2 x\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2=\frac{7}{6}$$

$\therefore E(6X+5)=6E(X)+5$

$$=6\cdot\frac{7}{6}+5=12$$

답 12

27. 단답형 (가)에서 $f(x)=x^3-2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

(나)에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $f(1)=1-2+a+b=0$에서 $b=1-a$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2+ax+1-a}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-x+a-1)}{x-1}$$
$$=a-1=3$$

$\therefore a=4,\ b=-3$

$\therefore f(x)=x^3-2x^2+4x-3$

$\therefore f(2)=8-8+8-3=5$

답 5

28. 단답형 $n-\frac{1}{2}\le\sqrt{k}<n+\frac{1}{2}$의 각 변을 제곱하면

$$n^2-n+\frac{1}{4}\le k<n^2+n+\frac{1}{4}$$

k가 자연수이므로 $n^2-n<k\le n^2+n$

$\therefore a_n=n^2+n-(n^2-n)=2n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}2n=2\cdot\frac{10\cdot11}{2}=110$$

답 110

29. 단답형 $f(x)=\log x-[\log x]$에서 $f(x)$는 상용로그 $\log x$의 가수이다.

즉, $f(50)$은 상용로그 $\log 50$의 가수이므로

$f(50)=\log 5$

$0\le f(n)\le f(50)$에서 $0\le f(n)\le\log 5$

n은 100 이하의 자연수이므로 $\log n$의 지표는 0, 1, 2뿐이다.

i) 지표가 0인 경우

$0\le\log n\le\log 5 \Longleftrightarrow 1\le n\le5$

$n=1, 2, 3, 4, 5$로 n의 개수는 5

ii) 지표가 1인 경우

$1\le\log n\le1+\log 5 \Longleftrightarrow 10\le n\le50$

$n=10, 11, 12, \cdots, 50$으로 n의 개수는 41

iii) 지표가 2인 경우

$n=100$으로 n의 개수는 1

따라서 구하는 100 이하의 자연수 n의 개수는

$5+41+1=47$

답 47

30. ☞ 가형 풀이 **30**번을 보시오.