이해능력 연습문제

남휘종 T

Curriculum

1,2등급 학생 필수 커리 & 메인 커리큘럼

3,4등급 학생 필수 커리 & 일부 수강생 선택 커리

문과

개념 완성	수능 완성	실력 완성	최종 완성
24시간 개념완성 • 3,4등급 학생, 기본개념을 확실하게 다시 다지고 싶은 학생들을 위한 강좌 • 고3, N수를 위한 효율적이고 완벽한 개념 완성	**24시간 수능완성** • 수능적 개념완성, 수능적 마인드 확립, 선생님 커리큘럼의 메인, 필수강좌	**2배속 (E.B.S, OK!) 실력완성** • EBS를 완벽대비할 수있는 강좌 • 유제 풀이 및 고난이도 문제 완벽 정복	**24시간 최종완성** • Final 최종점검, 모의고사 형태의 실전 문제풀이 연습 단계
COMPACT • 수능의 본질을 꿰뚫을 수 있는 중요한 개념 압축 강좌, 무료강의		**24시간 실력완성** • 2배속 문제풀이가 어렵거나, 유제연습이 더 필요한 학생들이 수강해야 하는 강좌, 선택커리 • 실전 문제 해결력 신장 및 특수 유형별 해법 제시 • 24시간 개념완성 수강생 = 필수커리	

이과

개념 완성	수능 완성	실력 완성	최종 완성
24시간 개념완성 • 3,4등급 학생, 기본개념을 확실하게 다시 다지고 싶은 학생들을 위한 강좌 • 고3, N수를 위한 효율적이고 완벽한 개념 완성	**24시간 수능완성** • 수능적 개념완성, 수능적 마인드 확립, 선생님 커리큘럼의 메인, 필수강좌	**2배속 (E.B.S, OK!) 실력완성** • EBS를 완벽대비할 수있는 강좌 • 유제 풀이 및 고난이도 문제 완벽 정복	**24시간 최종완성** • Final 최종점검, 모의고사 형태의 실전 문제풀이 연습 단계
COMPACT • 수능의 본질을 꿰뚫을 수 있는 중요한 개념 압축 강좌, 무료강의			

남휘종 (Nam Hwi Jong) 선생님은

서울과학고, KAIST 수학과

ETOOS, VITAEDU 수리영역 강사

www.mathesis.co.kr 대표

남휘종 수학학원 대표

상위권 수험생을 사로잡다.

최단시간, 최대효율의 커리큘럼 제공.

수능적 풀이법을 배워라.

노가다식의 풀이법을 통해서는 시간부족으로 절대 만점 받을 수 없다.
출제자가 요구하는 핵심을 정확하게 파악할 수 있는 수능적 풀이법을 공부하라.

2013수능! 정확히 분석하라.

반드시 봐야할 기출, 연계되는 EBS, 고난이도 킬러문제를 완벽대비하자.

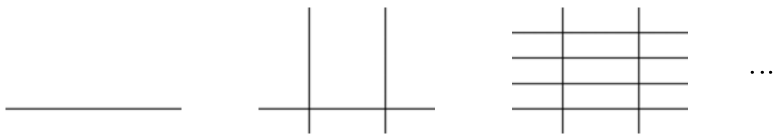
1 남휘종선생님의 대표적 특징을 담은 무료체험강좌 2013 COMPACT 수리 가형, 나형 강좌는 이투스, 비타에듀를 통해서 체험할 수 있습니다.

2 www.mathesis.co.kr 에서는 남휘종선생님이 직접 분류한 평가원 기출문제집을 구입할 수 있습니다.

1

한 평면 위에 다음과 같은 규칙으로 직선들을 차례로 그려 나간다.

> [1 단계] : 직선을 1 개 그린다.
> [2 단계] : [1 단계]에서 그린 직선과 수직인 직선을 2 개 그린다.
> [3 단계] : [2 단계]에서 그린 직선과 수직인 직선을 3 개 그린다.
> ⋮
> [n 단계] : [$(n-1)$ 단계]에서 그린 직선과 수직인 직선을 n 개 그린다. $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

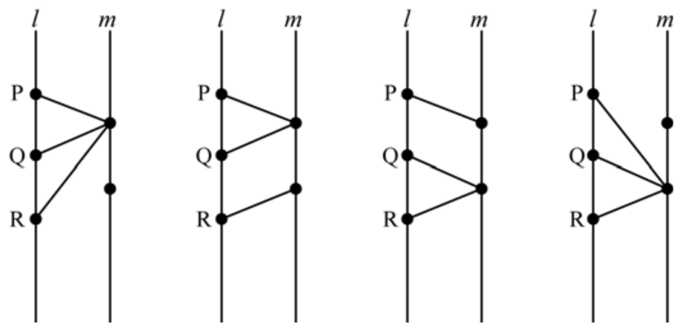


[1 단계] [2 단계] [3 단계]

[1 단계]부터 [n 단계]까지 그린 직선들의 모든 교점의 개수를 a_n $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$이라 하자. 예를 들어, $a_2=2$, $a_3=8$이다. $a_{15}-a_{14}$의 값을 구하시오. (단, 모든 직선은 서로 겹치지 않도록 그린다.) [4점]

2

평면 위에 평행한 두 직선 l, m과 직선 l 위의 서로 다른 세 점 P, Q, R가 있다. 직선 l 위의 세 점 P, Q, R에서 각각 하나의 선분으로 직선 m 위의 점을 연결할 때, 세 선분이 교차하지 않는 경우의 수를 구하려고 한다. 예를 들어, 그림과 같이 직선 m 위에 두 점이 있을 때, 구하는 모든 경우의 수는 4 (가지)이다.



직선 m 위에 10 개의 점이 있을 때, 위와 같이 세 선분이 교차하지 않는 모든 경우의 수를 구하시오. [4점]

Memo

3

자연수 n을 n개 이어 붙여 만든 자연수를 N_n이라 하자.
예를 들어 $N_3=333$, $N_{12}=121212\cdots12$ (24자리의 수)이다.
$\log N_n$의 지표와 가수를 각각 $p(n)$, $q(n)$이라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $p(15)=30$

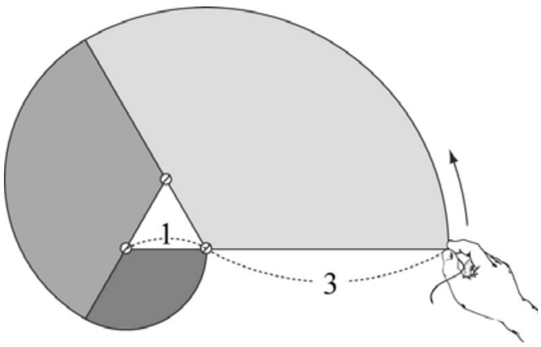
ㄴ. $q(n)=0$ 인 자연수 n 은 1 뿐이다.

ㄷ. $n=10^k$ (k는 자연수)이면 $p(n)-p(n-1)=n+k$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

4

한 변의 길이가 1인 정n각형의 꼭짓점에 못을 박아 놓는다.
실을 한 꼭짓점에 고정시켜 길이가 n이 되도록 잡고 한 변의 연장선 방향으로 팽팽하게 당긴 후 실의 끝의 이동거리가 최소가 되도록 정n각형의 둘레로 한 바퀴 돌릴 때, 실이 움직인 영역의 넓이를 S_n이라 하자. 예를 들어 S_3은 그림과 같이 정삼각형의 한 꼭짓점에 고정시킨 길이가 3이 되도록 실을 잡고 정삼각형 둘레로 한 바퀴 돌릴 때 실이 움직인 영역의 넓이를 나타낸다. 이 때, S_{20}의 값은?
(단, 실과 못의 굵기는 고려하지 않는다.) [4점]



① $\frac{287}{2}\pi$ ② $\frac{289}{2}\pi$ ③ $\frac{291}{2}\pi$
④ $\frac{293}{2}\pi$ ⑤ $\frac{295}{2}\pi$

Memo

5

이차정사각행렬 M에 대하여 $d(M)$ 을

$M^n = E$ 인 자연수 n 이 존재하면 n의 최솟값,

$M^n = E$ 인 자연수 n 이 존재하지 않으면 0

이라 하자. 예를 들어 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 이면 $P^2 = E$ 이므로 $d(P) = 2$,

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이면 $Q^n = E$ 인 자연수 n 이 존재하지 않으므로

$d(Q) = 0$ 이다. 이때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

(단, A , B 는 이차정사각행렬이고, E 는 단위행렬이다.) [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 이면 $d(A) = 3$ 이다.

ㄴ. A 의 역행렬이 존재하면 $d(A) \neq 0$ 이다.

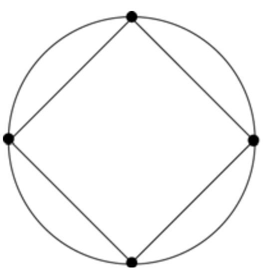
ㄷ. $AB = BA$ 이고 $d(A) = 2$, $d(B) = 3$ 이면 $d(AB) = 6$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

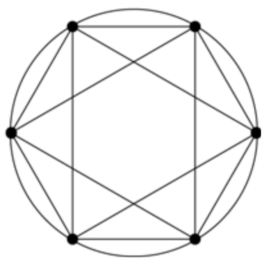
6

원에 내접하는 정n각형의 꼭짓점 중에서 서로 다른 4개의 점을 연결하여 만든 직사각형의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_4 = 1$, $a_6 = 3$ 이다.

$\sum_{k=2}^{20} a_{2k}$ 의 값은? [4점]



$a_4 = 1$



$a_6 = 3$

① 960 ② 1020 ③ 1140
④ 1235 ⑤ 1330

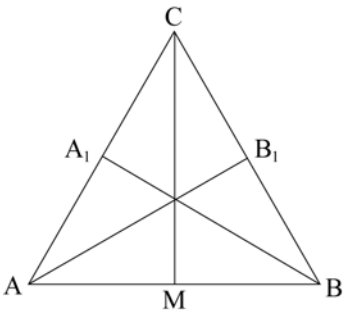
Memo

7

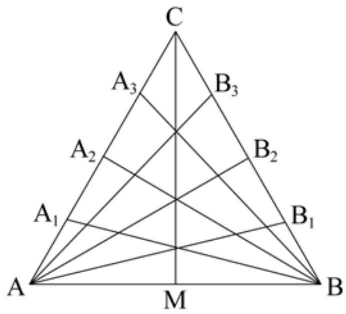
정삼각형 ABC에서 변 AC를 $(n+1)$등분한 점을 각각 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n이라 하고, 변 BC를 $(n+1)$등분한 점을 각각 B_1, B_2, B_3, $\cdots$, B_n이라 하자. 다음 [단계]와 같은 순서로 선분을 긋는다.

> [단계 1] 꼭짓점 C와 선분 AB의 중점 M을 연결한 선분 CM을 긋는다.
> [단계 2] 꼭짓점 A와 점 B_1, B_2, B_3, $\cdots$, B_n을 각각 연결한 선분 AB_1, AB_2, AB_3, $\cdots$, AB_n을 긋는다.
> [단계 3] 꼭짓점 B와 점 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n을 각각 연결한 선분 BA_1, BA_2, BA_3, $\cdots$, BA_n을 긋는다.

이때, 나누어진 정삼각형 ABC의 내부 영역의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_1=6$, $a_3=20$이다. a_{10}의 값은? [4점]



$a_1=6$



$a_3=20$

① 132　② 136　③ 140　④ 144　⑤ 148

Memo

8

그림과 같이 제 1 행에는 1 개, 제 2 행에는 2 개, $\cdots$, 제 n 행에는 n 개의 직사각형을 나열하고 그 안에 다음과 같은 규칙으로 수를 적었다.

(가) 제 1 행의 직사각형에는 1 을 적는다.
(나) 제 $n+1$ 행의 왼쪽 끝 직사각형에는 제 n 행의 왼쪽 끝 직사각형에 적힌 수보다 1 이 큰 수를 적는다.
(다) 제 $n+1$ 행의 오른쪽 끝 직사각형에는 제 n 행의 오른쪽 끝 직사각형에 적힌 수보다 1 이 작은 수를 적는다.
(라) 제 $n+1$ 행의 안쪽 직사각형에는 그 직사각형에 인접한 제 n 행의 두 직사각형에 적힌 수의 합을 적는다.

제 1행	1				
제 2행	2	0			
제 3행	3	2	-1		
제 4행	4	5	1	-2	
제 5행	5	9	6	-1	-3
$\vdots$	$\vdots$				

제 n 행의 맨 왼쪽으로부터 k 번째 직사각형에 적힌 수를 $<n,\ k>$ 로 나타내자. 예를 들어 $<4,\ 2>=5$ 이다.
이때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

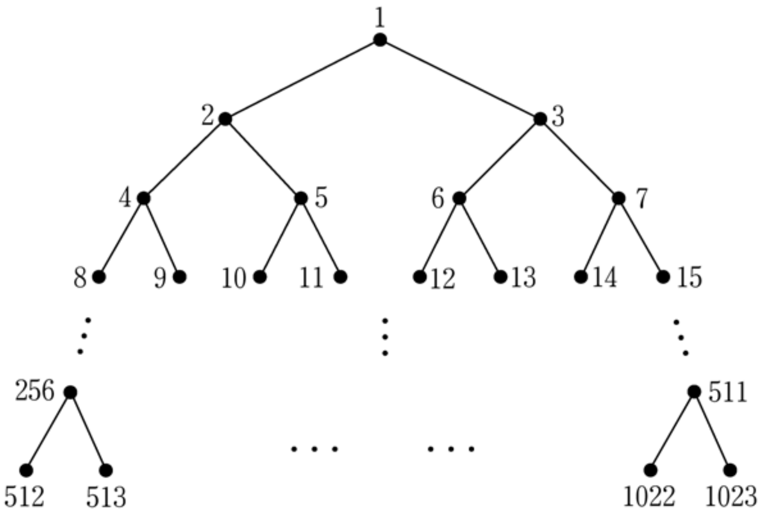
ㄱ. $<10,\ 1> + <10,\ 10> = 2$
ㄴ. $<11,\ 2> + <11,\ 10> = 20$
ㄷ. $<12,\ 3> + <12,\ 4> + \cdots + <12,\ 10> = 2024$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Memo

9

다음은 1023개의 꼭짓점을 갖는 수형도에 1부터 1023까지 연속된 자연수를 각 꼭짓점에 규칙적으로 대응시킨 것이다.

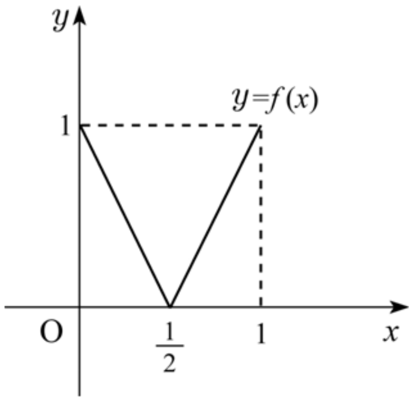


1이 대응된 꼭짓점에서 a가 대응된 꼭짓점까지 가는 경로와 1이 대응된 꼭짓점에서 b가 대응된 꼭짓점까지 가는 경로에 공통으로 포함되는 꼭짓점에 대응된 자연수 중 최댓값을 $M(a, b)$라 하자. 예를 들어, $M(4, 11) = 2$, $M(7, 12) = 3$이다. $M(33, 79) = k$라 할 때, $10k$의 값을 구하시오. [4점]

Memo

10

그림은 함수 $f(x)=2\left|x-\dfrac{1}{2}\right|\ (0\leqq x\leqq 1)$의 그래프이다.



자연수 n에 대하여 집합 A_n을 $A_n=\{x\mid f^n(x)=1,\ 0\leqq x\leqq 1\}$이라 할 때, 집합 A_n의 원소의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $A_1=\{0,1\}$, $A_2=\left\{0,\dfrac{1}{2},1\right\}$이므로 $a_1=2$, $a_2=3$이다.

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$의 값은? (단, $f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n\ (n=1,2,3,\cdots)$ 이다.) [4점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2}{3}$ ④ $\dfrac{3}{4}$ ⑤ 1

11

1부터 100까지의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택할 때, 4개의 수 중에서 두 번째로 작은 수가 k인 경우의 수를 a_k라 하자. 예를 들어, a_{98}은 선택된 4개의 수 중에서 98보다 작은 수가 한 개이고 98보다 큰 수가 2개인 경우의 수이므로 $a_{98}=97$이다. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_3={}_2\mathrm{C}_1\times{}_{97}\mathrm{C}_2$

ㄴ. $a_{10}=a_{90}$

ㄷ. $\sum_{k=2}^{98}a_k={}_{100}\mathrm{C}_4$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Memo

12

자연수 n을 두 자연수 n_1, n_2의 합

$$n = n_1 + n_2 \ (n_1 \geqq n_2)$$

으로 나타내는 방법의 수를 $p(n)$이라 하자. 예를 들어, $p(3) = 1$이다.

<보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $p(n) = \left[\dfrac{n}{2}\right]$

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

ㄴ. $p(m+n) = p(m) + p(n)$ (단, m, n은 자연수이다.)

ㄷ. $p(n^2) = \{p(n)\}^2$

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄷ　　④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Memo

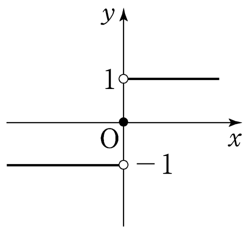
13

모든 실수에서 정의된 함수 $y=f(x)$에 대하여 함수 $y=x^kf(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 가장 작은 자연수 k를 $N(f)$로 나타내자. 예를 들어,

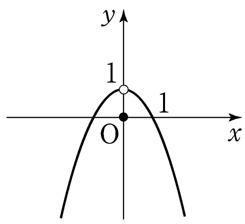
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$ 이면 $N(f)=2$이다.

다음 함수 $g_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$에 대하여 $N(g_i)=a_i$라 할 때, a_i의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [3점]

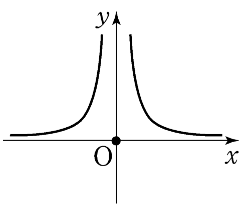
$$g_1(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$



$$g_2(x)=\begin{cases}-x^2+1 & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$



$$g_3(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$



① $a_1=a_2<a_3$
② $a_1<a_2=a_3$
③ $a_1=a_2=a_3$
④ $a_2=a_3<a_1$
⑤ $a_3<a_1=a_2$

Memo

14

함수 $f(x)$에 대하여 불연속점의 개수를 $N(f)$로 나타내자. 예를 들어

$f(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases}$ 이면 $N(f)=1$이다.

다음 두 함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여

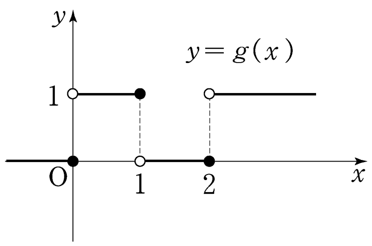
$a_1=N(g+h)$, $a_2=N(gh)$, $a_3=N(|h|)$라 할 때,

a_1, a_2, a_3의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

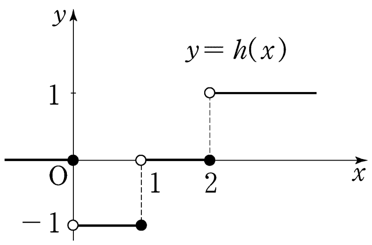
(단, $(g+h)(x)=g(x)+h(x)$,

$(gh)(x)=g(x)h(x)$, $|h|(x)=|h(x)|$이다.) [3점]

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x\leqq 0)\\ 1 & (0<x\leqq 1)\\ 0 & (1<x\leqq 2)\\ 1 & (x>2)\end{cases}$$



$$h(x)=\begin{cases}0 & (x\leqq 0)\\ -1 & (0<x\leqq 1)\\ 0 & (1<x\leqq 2)\\ 1 & (x>2)\end{cases}$$



① $a_1=a_2=a_3$

② $a_1<a_2=a_3$

③ $a_1=a_3<a_2$

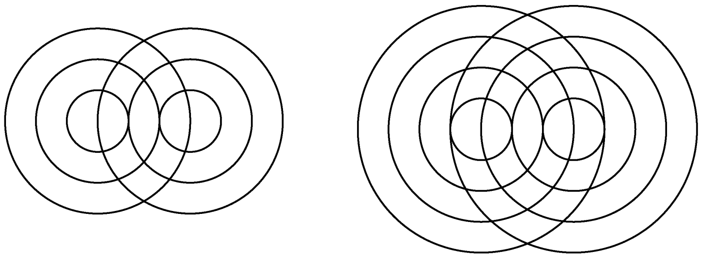
④ $a_2<a_1=a_3$

⑤ $a_3<a_1=a_2$

Memo

15

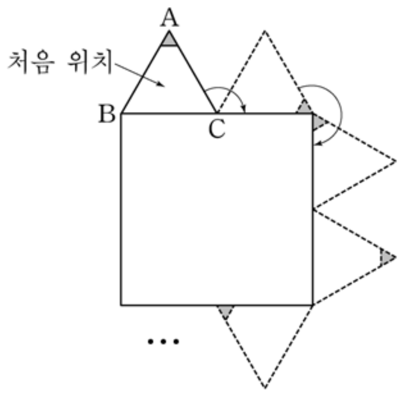
거리가 3인 두 점 O, O'이 있다. 점 O를 중심으로 반지름의 길이가 각각 $1, 2, \cdots, n$인 n개의 원과 점 O'을 중심으로 반지름의 길이가 각각$1, 2, \cdots, n$인 n개의 원이 있다. 이 $2n$개 원의 모든 교점의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어, 그림에서와 같이 $a_3 = 14$, $a_4 = 26$이다. a_{20}의 값은? [4점]



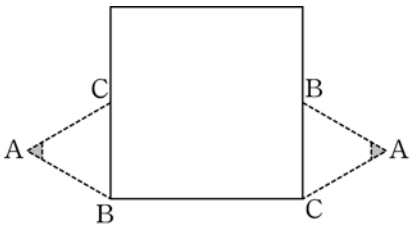
① 214　② 218　③ 222　④ 226　⑤ 230

16

한 변의 길이가 2인 정사각형과 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. [그림 1]과 같이 정사각형 둘레를 따라 시계 방향으로 정삼각형 ABC를 회전시킨다. 정삼각형 ABC가 처음 위치에서 출발한 후 정사각형 둘레를 n바퀴 도는 동안, 변 BC가 정사각형의 변 위에 놓이는 횟수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $n=1$일 때, [그림 2]와 같이 변 BC가 2회 놓이므로 $a_1 = 2$이다. 이때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{3n-2}}{n}$의 값은? [4점]



[그림 1]



[그림 2]

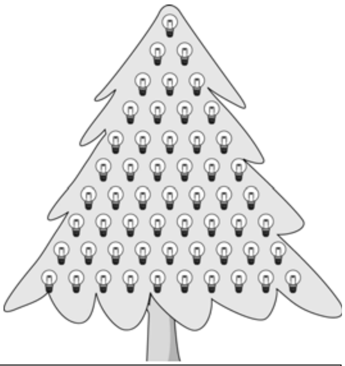
① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

17

자연수 $n(n \geq 2)$으로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수를 모두 더한 값을 a_n이라 하자. 예를 들어 4로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수는 5, 10, 15이므로 $a_4 = 5 + 10 + 15 = 30$이다. $a_n > 500$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. [4점]

18

그림과 같이 나무에 55개의 전구가 맨 위 첫 번째 줄에는 1개, 두 번째 줄에는 2개, 세 번째 줄에는 3개, ⋯, 열 번째 줄에는 10개가 설치되어 있다. 전원을 넣으면 이 전구들은 다음 규칙에 따라 작동한다.



(가) n이 10 이하의 자연수일 때, n번째 줄에 있는 전구는 n초가 되는 순간 처음 켜진다. (나) 모든 전구는 처음 켜진 후 1초 간격으로 꺼짐과 켜짐을 반복한다.

전원을 넣고 n초가 되는 순간 켜지는 모든 전구의 개수를 a_n이라고 하자. 예를 들어 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_4 = 6$, $a_{11} = 25$ 이다. $\sum_{n=1}^{14} a_n$의 값은? [3점]

① 215 ② 220 ③ 225 ④ 230 ⑤ 235

Memo

19

한 개의 동전을 한 번 던지는 시행을 5번 반복한다. 각 시행에서 나온 결과에 대하여 다음 규칙에 따라 표를 작성한다.

> (가) 첫 번째 시행에서 앞면이 나오면 △, 뒷면이 나오면 ○를 표시한다.
> (나) 두 번째 시행부터
> (1) 뒷면이 나오면 ○를 표시하고,
> (2) 앞면이 나왔을 때, 바로 이전 시행의 결과가 앞면이면 ○, 뒷면이면 △를 표시한다.

예를 들어 동전을 5번 던져 '앞면, 뒷면, 앞면, 앞면, 뒷면'이 나오면 다음과 같은 표시가 작성된다.

시행	1	2	3	4	5
표시	△	○	△	○	○

한 개의 동전을 5번 던질 때 작성되는 표에 표시된 △의 개수를 확률변수 X라 하자. $P(X=2)$의 값은?[4점]

① $\frac{13}{32}$ ② $\frac{15}{32}$ ③ $\frac{17}{32}$ ④ $\frac{19}{32}$ ⑤ $\frac{21}{32}$

20

수열 $\{a_n\}$의 제n항 a_n을 $\frac{n}{3^k}$이 자연수가 되게 하는 음이 아닌 정수 k의 최댓값이라 하자. 예를 들어 $a_1=0$이고 $a_6=1$이다. $a_m=3$일 때, $a_m+a_{2m}+a_{3m}+\cdots+a_{9m}$의 값을 구하시오. [4점]

Memo

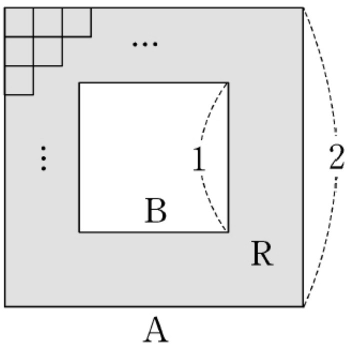
21

그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 A 와 한 변의 길이가 1 인 정사각형 B 는 변이 서로 평행하고, A 의 두 대각선의 교점과 B 의 두 대각선의 교점이 일치하도록 놓여있다. A 와 A 의 내부에서 B 의 내부를 제외한 영역을 R 라 하자. 2 이상인 자연수 n 에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$ 인 작은 정사각형을 다음 규칙에 따라 R 에 그린다.

> (가) 작은 정사각형의 한 변은 A 의 한 변에 평행하다.
> (나) 작은 정사각형들의 내부는 서로 겹치지 않도록 한다.

이와 같은 규칙에 따라 R 에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$ 인 작은 정사각형의 최대 개수를 a_n 이라 하자. 예를 들어 $a_2 = 12$, $a_3 = 20$ 이다.

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{2n+1} - a_{2n}}{a_{2n} - a_{2n-1}} = c$ 라 할 때, $100c$ 의 값을 구하시오. [4점]



22

x가 양수일 때, x보다 작은 자연수 중에서 소수의 개수를 $f(x)$라 하고 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x > 2f(x)) \\ \dfrac{1}{f(x)} & (x \leq 2f(x)) \end{cases}$$

라고 하자. 예를 들어, $f\left(\frac{7}{2}\right) = 2$이고 $\frac{7}{2} < 2f\left(\frac{7}{2}\right)$이므로 $g\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}$이다. $\lim_{x \to 8+0} g(x) = \alpha$, $\lim_{x \to 8-0} g(x) = \beta$라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta}$의 값을 구하시오. [4점]

Memo

23

2 이상의 자연수 n 에 대하여 집합 $\{3^{2k-1} \mid k$는 자연수$, 1 \le k \le n\}$의 서로 다른 두 원소를 곱하여 나올 수 있는 모든 값만을 원소로 하는 집합을 S라 하고, S의 원소의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, $f(4)=5$이다. 이때, $\sum_{n=2}^{11} f(n)$의 값을 구하시오. [4점]

24

자연수 m에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1에 1개, 2열에 2개 3열에 3개, $\cdots m$열에 m개 쌓여 있다. 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음 시행을 반복한다.

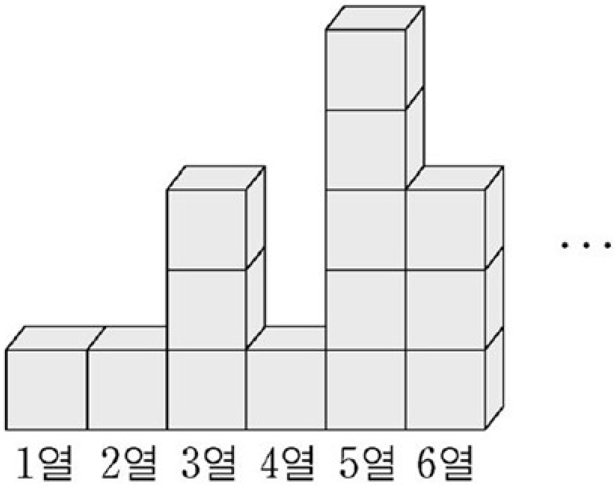
블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{1}{2}$만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때,

1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$이라 하자.

예를 들어, $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



25

100이하의 자연수 전체의 집합을 S라 할 때, $n \in S$에 대하여 집합

$$\{k \mid k \in S\text{이고 } \log_2 n - \log_2 k\text{는 정수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, $f(10)=5$이고 $f(99)=1$이다. 이 때, $f(n)=1$인 n의 개수를 구하시오. [4점]

Memo

26

자연수 n에 대하여 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 a_n이라 하자.

(가) 정사각형의 각 변은 좌표축에 평행하고, 두 대각선의 교점은 $(n, 2^n)$이다. (나) 정사각형과 그 내부에 있는 점 (x, y)중에서 x가 자연수이고, $y=2^x$을 만족시키는 점은 3개뿐이다.

예를 들어 $a_1=12$이다. $\sum_{k=1}^{7} a_k$의 값을 구하시오. [4점]

27

자연수 a, b에 대하여 곡선 $y=a^{x+1}$과 곡선 $y=b^x$이 직선 $x=t$ $(t \geqq 1)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.
다음 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. 예를 들어, $a=4$, $b=5$는 다음 조건을 만족시킨다. [4점]

(가) $2 \leqq a \leqq 10$, $2 \leqq b \leqq 10$ (나) $t \geqq 1$인 어떤 실수 t에 대하여 $\overline{PQ} \leqq 10$이다.

28

특정 환경의 어느 웹사이트에서 한 메뉴 안에 선택할 수 있는 항목이 n개 있는 경우, 항목을 1개 선택하는 데 걸리는 시간 T(초)가 다음 식을 만족시킨다.

$$T=2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)$$

메뉴가 여러 개인 경우, 모든 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체 시간은 각 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 시간을 모두 더하여 구한다. 예를 들어, 메뉴가 3개이고 각 메뉴 안에 항목이 4개씩 있는 경우, 모든 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체시간은 $3\left(2+\frac{1}{3}\log_2 5\right)$초이다. 메뉴가 10개이고 각 메뉴 안에 항목이 n개씩 있을 때, 모든 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체 시간이 30초 이하가 되도록 하는 n의 최댓값은? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

Memo

29

자연수 $n(n \geq 4)$에 대하여 $A_n = \{x | x$ 는 한 변의 길이가 1 인 정n 각형의 대각선의 길이 $\}$라 하고, a_n 을 집합 A_n 의 원소의 개수라 하자. 예를 들어, $a_4 = 1$ 이다. 이 때, $\sum_{n=4}^{25} a_n$ 의 값은?

① 140 ② 138 ③ 136 ④ 134 ⑤ 132

30

다음은 세계 석유 소비 증가 추세에 관한 글들이다.

> …… 매년 석유 소비량을 조사한 결과, 최근 10년 동안 소비된 석유의 양은 그 이전까지 소비된 석유의 양과 같다. 예를 들어 1981년부터 1990년까지 소비된 석유의 양은 1980년까지 소비된 석유 전체의 양과 같다……

이와 같은 석유 소비 추세가 계속된다고 가정하고, 현재까지 소비된 석유의 양을 a, 현재의 석유의 매장량을 b라 할 때, 앞으로 몇 년 동안 석유를 사용할 수 있겠는가? [3점]

① $10\log_2(\frac{b}{2a}+1)$ ② $10\log_2(\frac{b}{a}+1)$

③ $10\log_2(\frac{2b}{a}+1)$ ④ $10\log_2(\frac{b}{a}+2)$

⑤ $10\log_2(\frac{2b}{a}+2)$

Memo

31

5보다 큰 소수로는 나누어 떨어지지 않는 자연수 a를 소인수분해하면 $a=2^{a_1}3^{a_2}5^{a_3}$과 같은 형태가 된다. 이 때, 《a》 $=(a_1,\ a_2,\ a_3)$라 하자. (소인수가 없는 경우 지수 a_i는 0으로 놓는다.)

예를 들어, 《12》 $=(2,\ 1,\ 0)$, 《15》 $=(0,\ 1,\ 1)$이다. 두 자연수 a와 b가 《a》 $=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, 《b》 $=(b_1,\ b_2,\ b_3)$일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

<보 기>

ㄱ. 《ab》 $=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$

ㄴ. b가 a의 배수이면, $b_i \geq a_i (i=1,\ 2,\ 3)$

ㄷ. a와 b의 최대공약수 c는 《c》 $=(c_1,\ c_2,\ c_3)$

(단, c_i는 a_i와 b_i 중에서 크거나 같은 수, $i=1,\ 2,\ 3$)

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

32

다음 표는 10진법의 수를 16진법의 수로 나타낸 것이다.

10진법	0	1	⋯	9	10	11	12	13	14	15
16진법	0	1	⋯	9	A	B	C	D	E	F

컴퓨터에서 색을 표현하는 RGB 방식에서는 빛의 삼원색인 빨강(R), 초록(G), 파랑(B)의 양을 여섯 자리 문자열로 지정하여 원하는 색을 얻는다. 여섯 자리 문자열 중 처음 두 자리는 R의 양, 다음 두 자리는 G의 양, 마지막 두 자리는 B의 양을 나타낸다. 이때, 각각의 두 자리 문자열은 0부터 255까지의 정수에 대응되는 16진법의 수이다.

예를 들어, 문자열FF021A를 입력하였다고 하자. FF, 02, 1A는 각각 16진법의 수FF, 2, 1A를 나타내고, 이것은 각각 10진법의 수 255, 2, 26에 대응된다. 따라서, R, G, B의 양이 각각 255, 2, 26인 색을 얻게 된다. R, G, B의 양이 각각 100, 245, 64인 색을 얻기 위하여 입력해야 할 문자열은? [2점]

① $80F840$ ② $64F540$ ③ $64F840$
④ $40F580$ ⑤ $80F380$

Memo

33

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 점 P와 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 임의의 점 Q에 대하여 선분 PQ의 최소의 길이를 $d(f,g)$로 나타내자. 예를 들어, $f(x)=x+2$이고 $g(x)=x$이면 $d(f,g)=\sqrt{2}$이다. 임의의 함수 f,g,h에 대하여 <보기> 중에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(x)=ax+b,\ g(x)=mx+n$ (단, a,b,m,n은 상수) 일 때, $a\neq m$이면 $d(f,g)=0$이다.
ㄴ. $d(f,g+h)\leq d(f,g)+d(f,h)$
ㄷ. $d(f,gh)\leq d(f,g)\cdot d(f,h)$

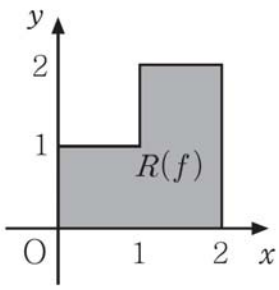
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

34

자연수 n에 대하여 2.52^{10n}의 최고자리의 숫자를 a_n이라 하자.
예를 들어, $2.52^{10}\fallingdotseq 1.03\times10^4$, $2.52^{20}\fallingdotseq 1.06\times10^8$, $2.52^{30}\fallingdotseq 1.10\times10^{12}$이므로 $a_1=a_2=a_3=1$이다. $a_n>1$을 만족시키는 자연수 n의 최소값을 구하시오. (단, $\log 2=0.3010$, $\log 2.52=0.4014$로 계산한다.) [4점]

35

좌표평면에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에 있는 각 점과 그 점에서 x축에 내린 수선의 발을 연결하는 선분으로 이루어지는 영역을 $R(f)$ 라 하자.
예를 들어 $f(x)=[x]+1\quad(0<x<2)$인 경우에 $R(f)$ 는 다음 그림의 어두운 부분이다.



함수 $g(x)$ 가

$$g(x)=\frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]+2}\quad(0<x<1)$$ 일 때,

영역 $R(g)$ 의 넓이는?(단, $[x]$ 는 x보다 크지 않은 가장 큰 정수이다.)

① $\frac{7}{36}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{18}$ ⑤ $\frac{11}{36}$

Memo

36

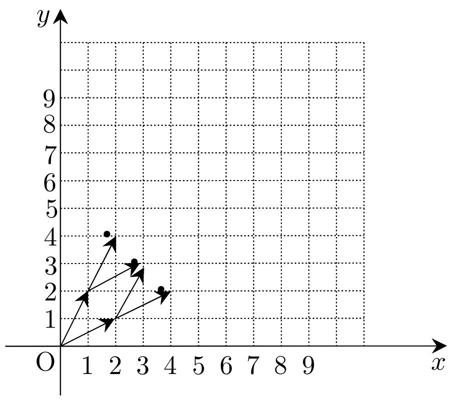
좌표평면 위에서 점 P는 한 번의 이동으로 다음의 (규칙1) 또는 (규칙2)를 따라 이동한다.

(규칙1) x축의 양의 방향으로 1만큼, y축의 양의 방향으로 2만큼 이동한다.
(규칙2) x축의 양의 방향으로 2만큼, y축의 양의 방향으로 1만큼 이동한다.

예를 들어, 원점 O에 있는 점 P가 두 번의 이동으로 도달할 수 있는 곳을 표시하면 그림과 같다.

점 P가 (규칙1)을 따라 이동할 확률은 $\frac{1}{3}$이고 (규칙2)를 따라 이동할 확률은 $\frac{2}{3}$일 때, 위와 같은 규칙으로 점 P가 원점 O에서부터 다섯 번의 이동으로 점 $(8, 7)$에 도달할 확률은 $\frac{q}{p}$이다.

이때, 서로소인 두 자연수 p, q의 합 $p+q$의 값을 구하시오. (단, 매번 이동하는 사건은 서로 독립이다.) [4점]



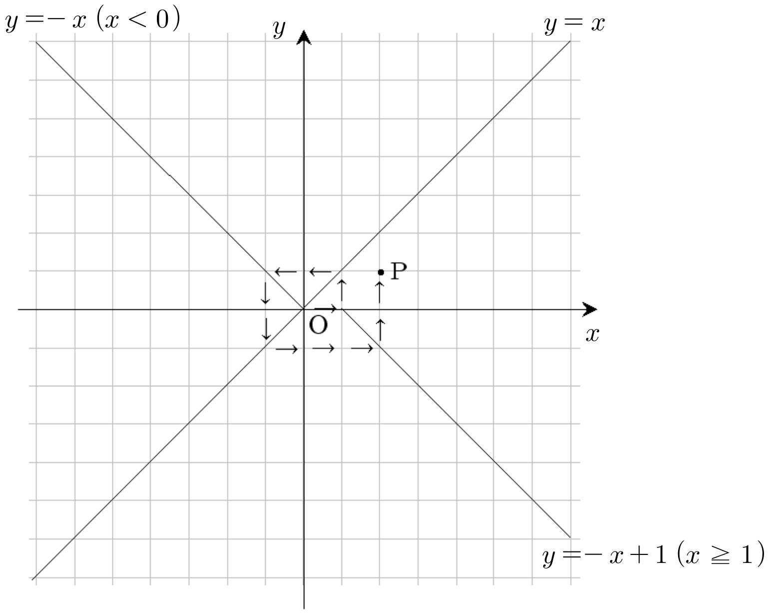
Memo

37

좌표평면 위를 움직이는 점 P는 다음과 같은 규칙으로 x축 또는 y축과 평행한 방향으로 이동 한다.

(가) 1회 이동거리는 1이고, 처음에는 원점을 출발하여 점 $(1, 0)$으로 이동한다.
(나) 점 P가 반직선 $y=-x+1$ $(x \geq 1)$ 위의 점에 도착하면 y축의 양의 방향으로 이동하고, 반직선 $y=x$ $(x>0)$ 위의 점에 도착하면 x축의 음의 방향으로 이동한다.
(다) 점 P가 반직선 $y=-x$ $(x<0)$ 위의 점에 도착하면 y축의 음의 방향으로 이동하고, 반직선 $y=x$ $(x<0)$ 위의 점에 도착하면 x축의 양의 방향으로 이동한다.

예를 들어, 그림과 같이 점 P가 원점을 출발하여 11회 이동하면 점 $(2, 1)$에 도착한다.



점 P가 원점을 출발하여 k회 이동하면 점 $(0, 10)$에 도착한다. k의 값은? (단, 각각의 반직선에 도착하기 전에는 진행방향을 바꾸지 않는다.) [4점]

① 350 ② 360 ③ 370 ④ 380 ⑤ 390

Memo

38

각 자릿수의 계승의 합이 자신과 같은 수의 집합을 M이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (예를 들어, $1!+2!+3!=9$ 123과 다르므로 123은 M의 원소가 아니다.)

<보 기>

ㄱ. 두 자리의 자연수는 M의 원소가 될 수 없다.
ㄴ. M의 원소인 세 자리 자연수의 각 자릿수는 7보다 작다.
ㄷ. M에는 8자리 이상의 자연수가 존재하지 않는다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

39

3 자리의 수인 289 의 각 자리수 $2, 8, 9$ 는 $2<8<9$ 를 만족한다. 이와 같이 2 자리 이상의 자연수 중에서 항상 뒤의 자리수가 바로 앞의 자리수보다 더 큰 수를 오름수라고 하자. 예를 들어 3579 는 오름수이지만 3559 나 3576 은 둘 다 오름수가 아니다. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. 2 자리 오름수의 개수는 36 이다.
ㄴ. 4 자리 오름수의 개수와 5 자리 오름수의 개수는 같다.
ㄷ. 3 자리 오름수를 크기순으로 작은 수부터 차례로 나열할 때, 50 번째 수는 345 이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Memo

문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	840	21	50
2	220	22	16
3	⑤	23	100
4	①	24	19
5	③	25	25
6	⑤	26	392
7	①	27	39
8	⑤	28	①
9	40	29	⑤
10	②	30	②
11	③	31	②
12	①	32	②
13	①	33	①
14	②	34	22
15	②	35	③
16	①	36	323
17	11	37	⑤
18	⑤	38	⑤
19	②	39	⑤
20	31		

Memo