제2교시

수리 영역

가 형

성명		수험번호			–						

- 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지에 성명과 수험번호를 정확히 써 넣으시오.
- 답안지에 성명과 수험번호를 써 넣고, 또 수험번호와 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\log 60$의 지표를 α, 가수를 β라 할 때, $10^{\alpha}+10^{\beta}$의 값은? [2점]

① 6 ② 10 ③ 16
④ 60 ⑤ 100

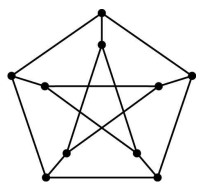
2. 이차정사각행렬 A에 대하여 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $A^2=2A-E$일 때, 행렬 $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$은? (단, E는 단위행렬이다.) [2점]

① $\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

3. 등식 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x+a}{x-2}=b$가 성립할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [2점]

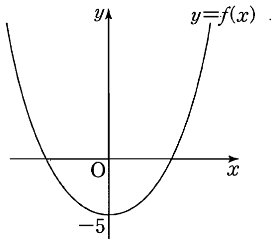
① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

4. 10개의 서류를 봉투에 담아 보관하려고 한다. 각 서류를 꼭짓점으로 나타내고, 같은 봉투에 담아서는 안 되는 서류끼리 변으로 연결하면 오른쪽 그래프와 같다. 이 때, 필요한 서류봉투의 최소 개수는? [3점]



① 3 ② 4
③ 5 ④ 6 ⑤ 7

5. 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ -5)$인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 방정식 $|f(x)|-2=\sqrt{4-f(x)}$의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

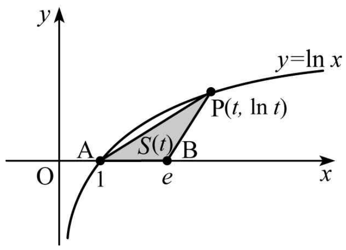


① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. $(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+10x)$의 x^8의 계수를 함수 $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+10)$을 이용하여 옳게 표현한 것은? [3점]

① $f(0)$ ② $f'(0)$ ③ $f''(0)$ ④ $\frac{1}{2}f'(0)$ ⑤ $\frac{1}{2}f''(0)$

7. 곡선 $y=\ln x$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(t,\ \ln t)$와 두 점 $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(e,0)$에 대하여 삼각형 PAB의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 1+0}\frac{S(t)}{t-1}$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑) [3점]



① $e-1$ ② $2(e-1)$ ③ $\frac{e-1}{2}$ ④ $\frac{e-1}{2e}$ ⑤ $\frac{e(e-1)}{2}$

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^2 f(x)dx$의 최솟값은? [3점]

> (가) $f(0)=1,\ f'(0)=1$
> (나) $0<a<b<2$이면 $f'(a)\le f'(b)$이다.
> (다) 구간 $(0,1)$에서 $f''(x)=2$이다.

① 5 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$
④ 6 ⑤ $\frac{19}{3}$

9. 수열 $\{a_n\}$의 각 항의 역수들로 이루어진 수열을 $\{b_n\}$이라 하자. 수열 $\{b_n\}$의 계차수열은 첫째항이 3, 공차가 1인 등차수열을 이룬다고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n a_{n+1}}{n(n+1)(a_n-a_{n+1})}$ 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

10. 자연수 m 에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, $\cdots$, m열에 m개 쌓여 있다. 블록의 개수가 3의 배수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음 시행을 반복한다.

> 블록의 개수가 3의 배수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{2}{3}$ 만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$이라 하자.
예를 들어, $f(2)=3,\ f(3)=4,\ f(4)=8$이다.

이 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(3^n)}{9^n}$의 값을 구하면? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{7}{18}$ ③ $\frac{4}{9}$
④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

11. 함수 $f(x)=x^3+x$에 대하여 〈보기〉 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=13$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 역함수를 갖지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}f(t)dt=10$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 역행렬이 존재하는 두 이차 정사각행렬 A, B에 대하여 〈보기〉 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $A+B=E$이면 $AB=BA$이다.

ㄴ. $A^{-1}+B^{-1}=E$이면 $A+B=BA$이다.

ㄷ. $A+B=E$이면 $(A+B)^{-1}=A+B$이다.

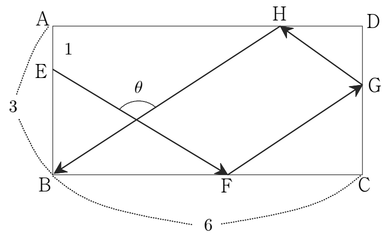
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. $\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+\cos 2x-\cos 3x+\cdots+\cos 10x}{x^2}$ 의 값을 구하면? [3점]

① -27 ② $-\frac{55}{2}$ ③ -28

④ $-\frac{57}{2}$ ⑤ -29

14. 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 6,3인 직사각형이 있다. 점 A로부터 1만큼 떨어진 점 E에서 출발한 빛이 F, G, H를 거쳐 점 B에 도달하였다. 이 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]
(단, 입사각의 크기와 반사각의 크기는 같다.)



① -2 ② $-\frac{11}{5}$ ③ $-\frac{12}{5}$

④ $-\frac{13}{5}$ ⑤ $-\frac{14}{5}$

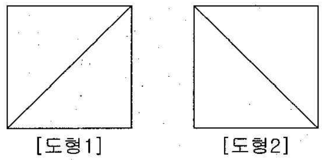
15. 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1 = 3,\ a_n = (10-2n)a_{n-1} + (4n-18)\ (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$이

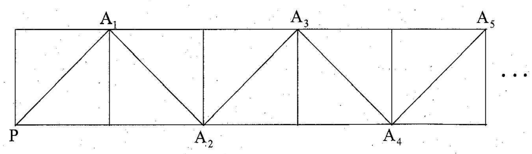
수열에서 a_n의 값을 최대로 하는 n의 값을 x, 최댓값을 y라고 할 때, $x+y$의 값을 구하면? [4점]

① 29 ② 50 ③ 54 ④ 109 ⑤ 112

16. 다음과 같이 정사각형에 대각선을 각각 하나씩 그어 [도형 1]과 [도형 2]를 만든다.



[도형 1]과 [도형 2]를 번갈아 가며 계속 붙여 아래 그림과 같은 도형을 만든다. 그림과 같이 처음으로 붙여지는 [도형 1]의 왼쪽아래 꼭짓점을 P 라 하고, [도형 1]의 개수와 [도형 2]의 개수를 합하여 n 개 붙여 만든 도형에서 가장 오른쪽 대각선의 끝점을 A_n 이라고 하자.



지나온 선분으로 되돌아 갈 수 없고, 오른쪽 또는 위 아래, 대각선으로만 움직인다. 꼭짓점 P 에서 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{n-1}$ 을 순서대로 모두 거쳐서 A_n 까지 도착하는 경로의 수를 a_n 이라고 할 때, a_5 의 값은? [4점]

① 124 ② 134 ③ 144 ④ 154 ⑤ 164

17. 보기에서 $100!$의 약수를 모두 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $(50!)^2$　　ㄴ. $69! \times 31!$　　ㄷ. $78! \times 26!$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 자연수 n에 대하여 부등식
$\dfrac{x(x-2n)}{(x+n)^n} \leqq 0$, $\dfrac{x(x-2n)}{(x-n)^n} \leqq 0$을 만족하는 자연수 x의 개수를 각각 a_n, b_n이라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

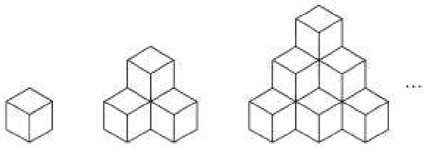
ㄱ. $a_1 + b_1 = 4$

ㄴ. $a_n = 2n$

ㄷ. $\lim_{n \to \infty} \dfrac{b_{2n-1}}{b_{2n}} = 1$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

19. 크기가 같은 정육면체 모양의 블록을 다음 그림과 같이 n층으로 쌓을 때, 보이는 면의 개수를 a_n, 블록의 개수를 b_n이라 하자.



예를 들어, $a_1 = 5$, $a_2 = 15$, $\cdots$이고, $b_1 = 1$, $b_2 = 4$, $\cdots$이다.

이때, $\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{b_n}$의 값은? [4점]

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

20. $n = 1, 2, 3, \cdots$에 대하여, $a_n = \frac{1}{n}\left\{\frac{(2n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}$이라고 놓는다.

수열 $\{\ln a_n\}$의 극한값을 구하면? [4점]

① $\ln 2$ ② $2\ln 2$ ③ $2\ln 2 - 2$
④ $2\ln 2 - 1$ ⑤ $2\ln 2 - 4$

21. 1차 변환 f는 포물선 $C : y = x^2 - x + \frac{1}{2}$를 자기 자신으로 이동한다. O를 원점, P를 C 위의 임의의 점, Q를 $f(\mathrm{P})$라 할 때, $\angle \mathrm{POQ}$의 최댓값을 구하면? (단, f는 항등변환은 아니다.) [4점]

① 30° ② 45° ③ 60° ④ 90° ⑤ 120°

주관식 문항(22~30)

22. $0 < x < 2,\ x \neq 1,\ 0 < y < 2$일 때, 부등식 $\log_x(\log_x y) > 0$ 이 나타내는 영역의 넓이를 구하시오. [3점]

23. $a_1 = 1,\ 4a_n a_{n+1} = (a_n + a_{n+1} - 1)^2\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{25}의 값을 구하시오. (단, $a_{n+1} > a_n$) [3점]

24. 다음과 같이 정의된 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 자연수 n의 최솟값 m과 그 때의 미분계수 $f'(0)$의 합 $m+f'(0)$의 값은? [3점]

$$f(x)=\begin{cases} 3\sin x + x^n \cos\frac{1}{x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

25. 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 다음의 두 가지 조건을 만족할 때, 상수 $a,\ b,\ c$에 대해 $a+b+c$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{7}{3}$

(나) 모든 실수 t에 대해서,

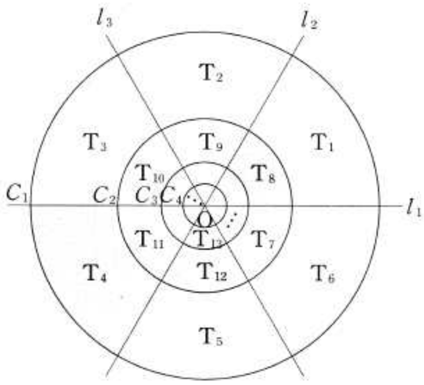
$8\int_0^t f(x)dx = \int_1^{2t+1} f(x)dx$가 성립한다.

26. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여

$$A^m = A^n$$

을 만족시키는 40 이하의 두 자연수 $m,\ n\ (m>n)$의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. [4점]

27. 그림과 같이 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C_1에서 점 O를 지나고 원의 넓이를 6등분하는 세 직선 l_1, l_2, l_3을 그린다. 첫 번째 시행에서 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 원 C_2를 그린 후 두 원 C_1, C_2와 세 직선 l_1, l_2, l_3으로 둘러싸인 도형을 각각 T_1, T_2, T_3, $\cdots$, T_6이라 하자. 두 번째 시행에서 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$인 원 C_3을 그린 후 두 원 C_2, C_3과 세 직선 l_1, l_2, l_3으로 둘러싸인 도형을 각각 T_7, T_8, T_9, $\cdots$, T_{12}라 하자. 이와 같은 과정을 n회 시행하여 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2^n}$인 원 C_{n+1}을 그린 후 두 원 C_n, C_{n+1}과 세 직선 l_1, l_2, l_3으로 둘러싸인 도형을 각각 T_{6n-5}, T_{6n-4}, T_{6n-3}, $\cdots$, T_{6n}이라 하자. 도형 T_{4n}의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값이 $p\pi$이다. $100p$의 값을 구하시오. [4점]

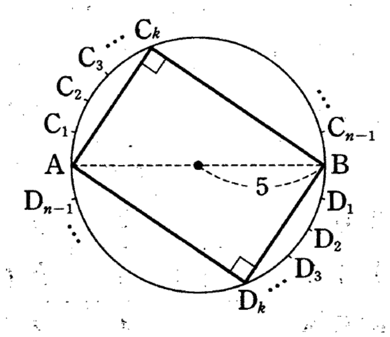


28. 임의의 실수 x, y에 대하여

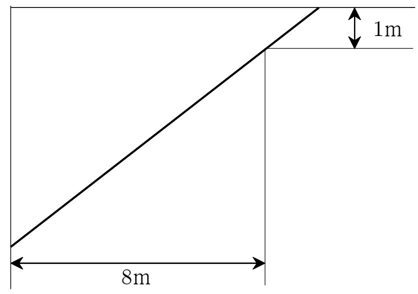
$$\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{y+\frac{\pi}{4}} |\sin t-\cos t|\sin t\,dt=\int_{x}^{y+\frac{\pi}{2}}(\sin t-\cos t)f(t)\,dt$$

를 만족시키는 함수 $f(t)$가 있다. $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$의 값을 구하시오. [4점]

29. 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 그림과 같이 지름 AB의 위쪽 반원의 호를 n등분한 점을 차례로 C_1, C_2, $\cdots$, C_{n-1}이라 하고, 지름 AB의 아래쪽 반원의 호를 n등분한 점을 차례로 D_1, D_2, $\cdots$, D_{n-1}이라 하자. 직사각형 $\mathrm{C}_k\mathrm{AD}_k\mathrm{B}$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$의 넓이를 S_k라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k$의 값을 구하시오. [4점]



30. 그림과 같이 폭이 8m, 1m로 이루어진 직각 통로가 있다. 통로는 지면에 수직인 벽으로 둘러싸여 있다. 어떤 막대를 바닥과 평행하게 유지하면서 구부러진 통로를 지나가려고 할 때, 지나갈 수 있는 막대의 길이의 최댓값을 구하면 m이다. m^2값을 구하시오. [4점]



※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

“가형” 정답

1	③	2	①	3	①	4	①	5	③
6	⑤	7	③	8	⑤	9	④	10	④
11	④	12	⑤	13	②	14	③	15	③
16	③	17	②	18	②	19	③	20	④
21	④	22	1	23	625	24	5	25	4
26	180	27	20	28	4	29	100	30	125