

제2교시

수리 영역

가 형

성명

수험번호    -

- 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지에 성명과 수험번호를 정확히 써 넣으십시오.
- 답안지에 성명과 수험번호를 써 넣고, 또 수험번호와 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

1.  $2^a = 3^b = 6$  일 때,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  의 값은? [2점]

- ① 2                      ②  $\sqrt{2}$                       ③ 1  
 ④  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       ⑤  $\frac{1}{2}$

2. 양수로 이루어진 두 수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  에 대하여

$$a_n b_n = 1, \quad a_n + b_n \leq \frac{2 \cdot \sqrt{3^n + 1}}{\sqrt{3^n + 1}}$$

이 성립할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$  의 값은? [2점]

- ① 0                      ②  $\frac{1}{2}$                       ③ 1  
 ④  $\frac{3}{2}$                       ⑤ 2

3. 함수  $f(x) = \tan x$  에 대하여  $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)$  의 값은? [2점]

- ①  $\sqrt{3}$                       ②  $2\sqrt{3}$                       ③  $4\sqrt{3}$   
 ④  $8\sqrt{3}$                       ⑤  $16\sqrt{3}$

4. 타원  $3x^2 + 4y^2 = 24$  와 직선  $y = mx$  가 만나는 한 점을 P 라 하고, 이 타원이 두 초점을 F, F' 라 할 때, 삼각형 PFF' 의 둘레의 길이는? [3점]  
 (단,  $m \neq 0$ )

- ①  $4\sqrt{2}$                       ②  $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$                       ③  $5\sqrt{2}$   
 ④  $2(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})$                       ⑤  $6\sqrt{2}$

5.  $0 \leq x < 2\pi$  일 때, 방정식  $3\cos 2x - 3 = 2(x - \pi)\sin x$ 를 만족시키는 서로 다른 모든  $x$ 의 값의 합은? [3점]

- ①  $\pi$                       ②  $2\pi$                       ③  $3\pi$
- ④  $4\pi$                       ⑤  $5\pi$

6.  $x, y$ 에 관한 연립방정식  $\begin{pmatrix} a & 6 \\ a+1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이  $x=0, y=0$  이외의 해를 가지도록 하는 두 자연수  $a, b$ 의 순서쌍  $(a, b)$ 의 개수를 구하면? [3점]

- ① 1                          ② 2                          ③ 3
- ④ 4                          ⑤ 5

7. 일차변환  $f$ 에 대해 집합  $M$ 을  $M = \{P \mid f(P) = P\}$ 라 정의할 때, <보기>의 설명 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단,  $R^2$ 은 실수평면이다.) [3점]

— < 보 기 > —

ㄱ.  $n(M) \geq 1$ 이다.  
 ㄴ.  $n(M) \geq 2$ 이고  $n(M)$ 이 실수인 일차변환  $f$ 는 존재하지 않는다.  
 ㄷ. 집합  $M \neq R^2$   $n(M) > 1$ 이면 집합  $M$ 와  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 의 교집합의 원소의 개수는 2개다.

- ① ㄱ                          ② ㄱ, ㄴ                      ③ ㄴ, ㄷ
- ④ ㄱ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 함수  $f(x)$ 에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

< 보 기 >

ㄱ.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-1}{h} = 0$ 이면  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ 이다.

ㄴ.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$ 이 존재하면  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 이 존재한다.

ㄷ.  $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \leq 1) \\ e^x - e + 1 & (x > 1) \end{cases}$ 일 때,

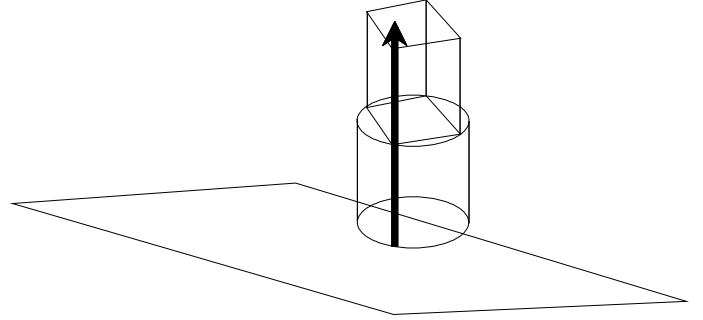
$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e^h)-f(1-h)}{h} = e + 2$ 이다.

- ① ㄱ                      ② ㄱ, ㄷ                      ③ ㄱ, ㄴ  
 ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 원점  $O$ 를 중심으로 하는 단위원 위에 점  $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 가 있다. 점  $P$ 에서 접선 위에  $\overline{PQ} = \theta$ 가 되도록 점  $Q$ 를 택하여  $\theta$ 를  $0 \leq \theta \leq \pi$ 의 범위에서 움직일 때, 점  $Q$ 의 자취 곡선의 길이를 구하면? [3점]

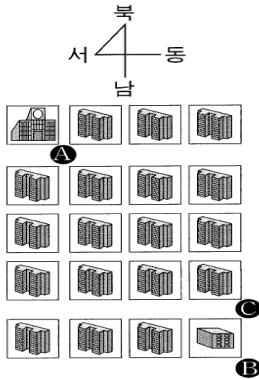
- ①  $\pi$                       ②  $2\pi$                       ③  $\frac{1}{2}\pi^2$   
 ④  $\pi^2$                       ⑤  $2\pi^2$

10. 반지름이 1이고 높이가 2인 원기둥의 윗면에 내접하는 정사각형을 밑면으로 하고 높이가 2인 직육면체를 붙여 놓았다. 그림과 같이 직육면체의 한 모서리를 포함하는 굵은 선을 평면과 이루는 각이  $\theta$ 가 되도록 들어 올릴 때, 평면과 수직인 평행광선에 의해 생기는 그림자의 넓이를 구하면  $a \sin\theta + b \cos\theta$ 이다. 이 때,  $a+b$ 의 값은? (단, 처음에 굵은 선과 평면이 일치하는 상태에서 들어 올린다.  $\theta$ 는  $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ 이다.) [3점]



- ①  $5 + \frac{\pi}{2}$                       ②  $8 + \frac{\pi}{2}$                       ③  $9 + \frac{\pi}{2}$   
 ④  $5 + \pi$                       ⑤  $9 + \pi$

11. 그림은 어느 신도시의 아파트 단지의 약도이다. 소현이는 매일 방과 수  
 곧장 단지 내에 있는 학교에서 학원으로 가기 위해 A 교차로에서 B 교차로를  
 향해 걸어간다. 각 교차점에서 동쪽 또는 남쪽 길로만 간다고 하고, 갈림길에  
 서 한 방향을 택할 확률이  $\frac{1}{2}$  이라고 한다. 소현이가 C 지점을 지나갈 확률을  
 기약분수로 나타내면  $\frac{n}{m}$  일 때,  $m+n$ 의 값을 구하면? [3점]



- ① 50                      ② 51                      ③ 52
- ④ 53                      ⑤ 54

12. 어떤 과학 연구팀은 둘레의 길이가 100 인 어떤 원형 궤도를 따라 회전하  
 는 작은 물체의 움직임을 초고속으로 촬영하였다. 같은 지점에서 출발하여  
 같은 방향으로 회전한 두 물체 A, B의 움직임을 비교하기 위하여 두 물체를  
 따로 촬영한 동영상을 합성하여 같은 시각에 출발한 것처럼 같은 화면에 겹쳐  
 놓고 관찰하였다. 출발하여 시각이  $t$  인 순간의 물체 A, B의 속도가 각각  
 $4t^2, t^2 + 30t$  라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

— < 보 기 > —

ㄱ.  $0 < t < 10$ 에서는 B의 속력이 A의 속력보다 빠르다.  
 ㄴ. 출발 후 A와 B가 처음으로 만나는 순간은  $1 < t < 2$ 에서이  
 다.  
 ㄷ.  $0 < t < 20$ 에서 A와 B가 만나는 횟수는 총 29 회이다.

- ① ㄱ                      ② ㄱ, ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13.  $a_1, a_2, a_3$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루고 있고,  $b_1, b_2, b_3$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루고 있다. 이때  $a_1 + b_1 = 85$ ,  $a_2 + b_2 = 76$ ,  $a_3 + b_3 = 84$ 이고  $a_1 + a_2 + a_3 = 126$ 이라 한다. 등차수열을 이루는  $a_1, a_2, a_3$  중  $a_1$ 의 값이 될 수 있는 수들을 모두 더한 값을 구하면? [3점]

- ① 88                      ② 87                      ③ 86  
 ④ 85                      ⑤ 84

14.  $p_0\%$ 의 소금물 100g에서 40g의 소금물을 덜어내고 물 30g와 소금 10g을 다시 집어넣는 시행을 실시하면 소금물의 농도는  $p_1\%$ 이다. 이 시행을  $n$ 회 실시하였을 때의 소금물의 농도를  $p_n\%$ 라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ 의 값을 구하면?

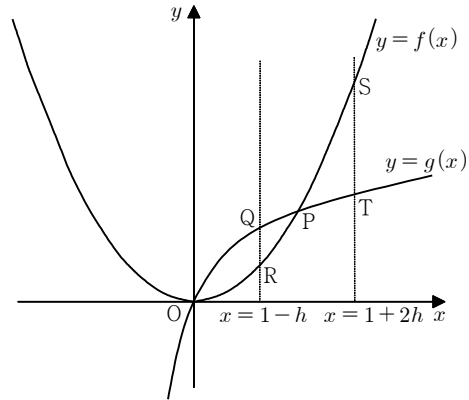
[3점]

- ① 25                      ② 30                      ③ 35  
 ④ 40                      ⑤ 45

15. 주사위를  $n$  번 던져서 나온 눈의 최솟값을  $k$  라 할 때,  $k \geq 4$  일 확률을  $p(n)$ ,  $k = 4$  일 확률을  $q(n)$  이라 하면  $\sum_{n=1}^{\infty} p(n) \cdot q(n)$  의 값을 구하면? [4점]

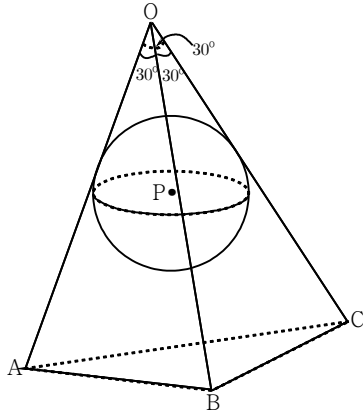
- ①  $\frac{1}{15}$                       ②  $\frac{2}{15}$                       ③  $\frac{1}{5}$
- ④  $\frac{4}{15}$                       ⑤  $\frac{1}{3}$

16. 두 함수  $f(x) = x^2$  과  $g(x) = \log_2(x+1)$  의 원점이 아닌 교점을 P 라 하자.  $0 < h < 1$  일 때,  $x = 1-h$  와  $y = f(x)$  의 교점을 Q,  $x = 1-h$  와  $y = g(x)$  의 교점을 R 이라 하고,  $x = 1+2h$  와  $y = f(x)$  의 교점을 S,  $x = 1+2h$  와  $y = g(x)$  의 교점을 T 라 하자. 삼각형 PQR 의 넓이를  $A(h)$ , 삼각형 PST 의 넓이를  $B(h)$  라 할 때,  $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{B(h)}{A(h)}$  의 값은? [4점]



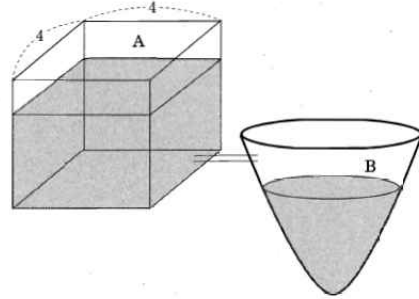
- ① 1                                      ② 2                                      ③ 3
- ④ 4                                      ⑤ 5

17.  $\angle AOB = 30^\circ$ ,  $\angle BOC = 30^\circ$ ,  $\angle COA = 30^\circ$ 를 만족하는 그림과 같은 모양에서 세 모서리  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ 에 접하는 반지름이 1인 구의 중심을 P라 할 때, 선분  $\overline{OP}$ 의 길이는? (단,  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ 의 길이는 구가 삼각형 ABC와 만나지 않을 만큼 충분히 크다.) [4점]



- ①  $\sqrt{3} \sin 15^\circ$       ②  $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 15^\circ$       ③  $\sqrt{3} \operatorname{cosec} 15^\circ$
- ④  $\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{cosec} 15^\circ$       ⑤  $\sqrt{3} \cot 15^\circ$

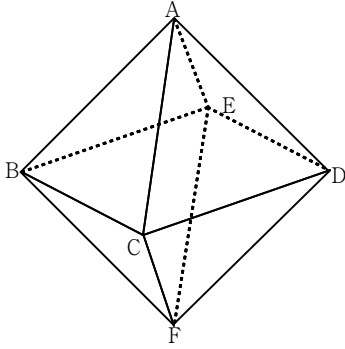
18. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 모양의 물탱크 A의 아래쪽에 곡선  $y = \pi x^2$ 을  $y$ 축의 둘레로 회전시킨 회전체 모양의 용기 B가 놓여 있다.



물탱크 A에 물을 가득 채운 후 두 용기를 수도관으로 연결하여 물탱크 A에서 비어있는 용기 B로 물이 흘러들어가도록 하였다. 물탱크 A의 수면의 높이가 매초  $\frac{7}{1000}$ 씩 낮아지는 속도로 물이 용기 B로 흘러들어갈 때, 물탱크 A의 수면의 높이가 3.5인 순간, 용기 B의 수면의 높이의 시간(초)에 대한 변화율은? [4점]

- ①  $\frac{3}{250}$       ②  $\frac{1}{50}$
- ③  $\frac{7}{250}$       ④  $\frac{11}{250}$
- ⑤  $\frac{13}{250}$

19. 그림과 같은 한 모서리의 길이가 1인 정팔면체에서 두 삼각형 ABC와 DEF에 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를  $S(x)$ 라 하자. 다음 <보기>중 옳은 것을 모두 고르면? (단,  $x$ 는 자른 단면과 선분 CD의 교점과 D 사이의 거리이다.) [4점]



< 보 기 >

ㄱ.  $y = S(x)$  ( $0 \leq x \leq 1$ )는  $x = \frac{1}{2}$  대칭이다.

ㄴ. 단면의 모양은 정육각형이다.

ㄷ.  $\int_0^1 S(x)dx$ 의 값은 정팔면체의 부피와 같다.

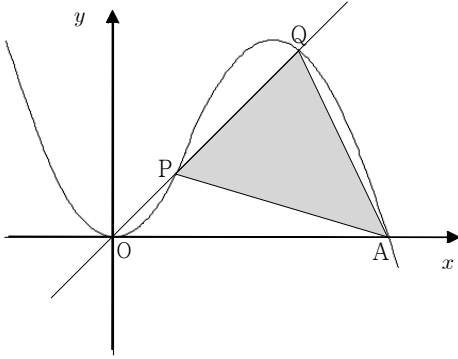
- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄴ  
 ④ ㄱ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 점 P는 구  $(x - \sqrt{2})^2 + (y - 10)^2 + z^2 = 36$  위에 있고, 점 A는  $(4, 2, 4)$ 이다. 두 벡터  $\vec{OA}, \vec{OP}$ 의 내적  $\vec{OA} \cdot \vec{OP}$ 의 최댓값과 최솟값의 차를 구하면? [4점]

- ① 64                      ② 66                      ③ 68  
 ④ 70                      ⑤ 72



21. 아래 그림과 같이 삼차함수  $y = x^2(3-x)$  의 그래프와 직선  $y = mx$  가 제 1사분면 위의 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다. 이 때, 세 점 A(3, 0), P, Q 를 꼭짓점으로 하는  $\triangle APQ$  을  $x$  축을 중심으로 회전한 부피가 최대가 되게 하는 양수  $m$  은? [4점]



- ① 1
- ②  $\frac{6}{5}$
- ③  $\frac{7}{5}$
- ④  $\frac{8}{5}$
- ⑤  $\frac{9}{5}$

주관식 문항(22~30)

22.  $\int_0^a \sqrt{x} dx = a\sqrt{a} - \int_0^{\sqrt{a}} x^2 dx$  를 이용하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n k^2}}$  의 값은  $p$  이다.  $9p^2$  의 값을 구하시오. [3점]

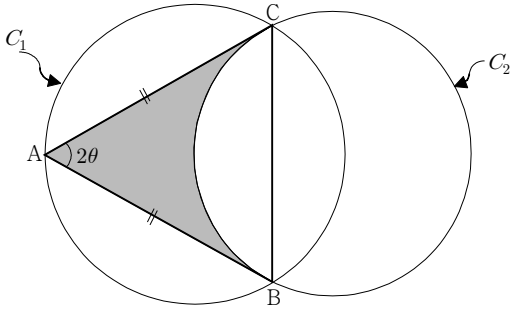
23. 두 사건  $A, B$  에 대하여  $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{2}{3}$  이며  $P(B^c|A) = \frac{1}{2}$  일 때,  $P(A|B)$  의 값은  $\frac{q}{p}$  이다. 서로소인 자연수  $p, q$  에 대해  $p+q$  의 값을 구하시오. [3점]

24. 이차정사각행렬  $A$ 에 대하여 행렬  $A - 2E$ 의 역행렬이 존재하고  $A^2 - A - 2E = O$ 일 때, 행렬  $A^5$ 의 모든 성분의 합이  $s$ 일 때,  $10s^2$ 의 값을 구하시오. (단,  $E$ 는 단위행렬이다.) [3점]

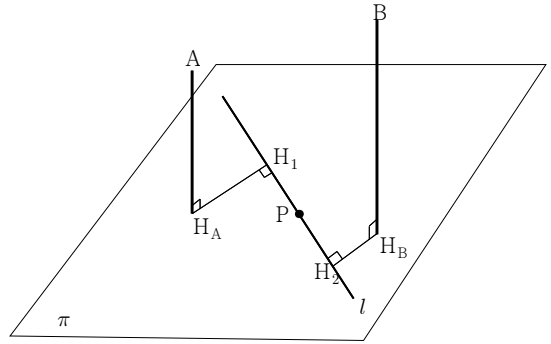
25. 무리방정식  $x^2 - 10x - 2\sqrt{x^2 - 10x + 2} = 1$ 의 모든 실근의 합을 구하시오. [4점]

26. 행렬  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 25 \end{pmatrix}$ 와  $\begin{pmatrix} -1 & c \\ d & 36 \end{pmatrix}$ 로 나타내어지는 일차변환을 각각  $f, g$ 라 하자. 두 일차변환에 의해 평면위의 모든 점이 원점을 지나는 직선  $l$ 위로 옮겨질 때,  $a + b + c - d$ 의 최솟값을 구하시오. (단,  $a, c > 0$ 이다.) [4점]

27. 반지름이 1인 원  $C_1$ 에 내접하는 이등변 삼각형  $ABC$ 가 있다.  $\angle BAC = 2\theta$ 라 하고, 두 선분  $\overline{AB}$ 와  $\overline{AC}$ 에 각각  $B, C$ 에서 접하는 원을  $C_2$ 라 하자. 이등변 삼각형  $ABC$ 의 내부에서 원  $C_2$ 의 내부와 공통된 영역을 제외한 그림의 어두운 부분의 넓이를  $S$ 라 하자.  $S$ 가 최대가 되는  $\theta$ 를  $\alpha$ 라 할 때, 식  $\tan\alpha = \frac{1}{a\alpha + \pi}$ 이 만족된다. 실수  $a$ 에 대해  $100a^2$ 의 값을 구하시오. [4점]



28. 그림과 같이 두 점  $A, B$ 의 평면  $\pi$ 에 내린 수선의 발을 각각  $H_A, H_B$ 라 하자. 또한,  $H_A$ 와  $H_B$ 에서 직선  $l$ 에 내린 수선의 발을 각각  $H_1$ 과  $H_2$ 이다. 각각의 선분의 길이가  $\overline{AH_A} = 4, \overline{H_AH_1} = 3, \overline{H_1H_2} = 5, \overline{H_2H_B} = \sqrt{2}, \overline{BH_B} = 4\sqrt{3}$ 일 때, 직선  $l$  위의 동점  $P$ 에 대해  $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을  $m$ 이라 하자.  $m^2 = a + b\sqrt{2}$ 일 때, 두 자연수  $a, b$ 에 대해  $a + b$ 의 값을 구하시오. [4점]



29. 함수  $f(x) = x^4 - 3x^3$ 이다.  $0 < a < 3$ 일 때,  $(a, 0)$ 에서  $y = f(x)$ 에 접선을 2개 이상 그을 수 있는  $a$ 의 최댓값을  $\alpha$ 라 하자.  $(\alpha, 0)$ 에서  $y = f(x)$ 에 그은 두 접선 중  $x$ 축이 아닌 접선을  $l$ 이라 할 때, 접선  $l$ 과  $y = f(x)$ 의 교점 중 접점이 아닌 점의  $x$ 좌표를  $\beta$ 라 하자.  $\alpha - \beta$ 의 값을 구하면  $\frac{q}{p}$ 이다. 두 자연수  $p, q$ 의 합을 구하시오. [4점]

30. 집합  $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq n^2\}$ 에 속하는 원소 중  $x$ 좌표와  $y$ 좌표가 모두 정수인 점의 수를  $a_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$ 의 값을 구하면  $a\pi$ 이다.  $100a$ 의 값을 구하시오. [4점]

\* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

“가형” 정답

1	③	2	⑤	3	④	4	⑤	5	③
6	④	7	⑤	8	②	9	③	10	③
11	④	12	③	13	④	14	①	15	②
16	④	17	④	18	③	19	①	20	⑤
21	⑤	22	12	23	19	24	40	25	10
26	22	27	400	28	150	29	13	30	100