제 2 교시

수학 영역(가형&나형)

1,2번 ⇨ 수1
3,4번 ⇨ 확통
5,6번 ⇨ 수2
7,8번 ⇨ 미적분

→ 가형은 전문항 풀기, 나형은 1번~6번까지 풀기

5지선다형	단답형

1. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_5=8$일 때 다음 조건을 만족하는 k의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $a_{2k-3}+a_{2k-5}=400$
> (나) $S_k=2k^2$

2. 자연수 n에 대하여 $f(x)=\dfrac{1}{n-x}$와 역함수 $f^{-1}(x)$로 둘러싸인 부분 (경계 포함)에 포함된 정사각형 중 한 변의 길이가 1이고 꼭짓점 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 정사각형의 개수를 a_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=3}^{12}a_n$의 값을 구하시오. [4점]

3. 점심 식사 후 후식으로 비엔나 커피를 즐기는 어느 지역 직장인들의 월 후식비 지출은 평균이 9이고 표준편차가 1.8인 정규분포를 따른다고 한다. 후식으로 비엔나 커피를 즐기는 이 지역 직장인 중 임의추출한 n명의 월 후식비 지출을 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때,

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

$$P(8.55 \le \overline{X} \le 9.45) \ge 0.9544$$

이 되기 위한 n의 최솟값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, 후식비의 단위는 만 원이다.) [4점]

4. 다음 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a \times b \times (c+d+e) = 18$
(나) $a,\ b,\ c,\ d,\ e$중에서 적어도 2개는 짝수이다.

5. $f'(0)=0$, $f'(2)=\frac{1}{2}f(2)$을 만족하는 다항함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 $xg(x)=f(x)$가 성립할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. $g(0)=0$

ㄴ. $g'(2)=0$

ㄷ. 함수 $f(x)$는 x^2을 인수로 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=(x^2-1)f(x)$이라 할 때,

$\lim_{h\to 0-}\frac{|f(a+h)|-|f(a)|}{h}\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(a+h)|-|f(a)|}{h}<0$을 만족하는 모든 a의 값의 합이 0이고 모든 a의 값의 곱이 -4이다.

$\lim_{h\to 0-}\frac{|g(b+h)|-|g(b)|}{h}\times\lim_{h\to 0+}\frac{|g(b+h)|-|g(b)|}{h}\le 0$을 만족하는 모든 b의 값을 크기순으로 나타내면 b_1, b_2, $\cdots$, b_n이다.

$f(n)+\sum_{k=1}^{n}|b_k|$의 값은? [4점]

① $45+\sqrt{5}$ ② $51+\sqrt{5}$ ③ $51+\sqrt{10}$
④ $45+\sqrt{15}$ ⑤ $45+\frac{\sqrt{10}}{2}$

7. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\dfrac{1}{1-\sin x}$이고 함수 $g(x)=\cos^3 x$이다. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g'(x)dx=1$일 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① $-\dfrac{7}{2}$ ② $-\dfrac{5}{2}$ ③ $-\dfrac{3}{2}$ ④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

8. 실수 전체 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(x)=\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}x$ $(-3 \le x \le 3)$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+6)=f(x)+2$

$0 \le t \le 30$인 실수 t에 대하여 함수 $|f(x)-f(t)|$가 미분가능하지 않게 되는 x의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(t)$가 불연속이 되는 모든 t 값의 합을 구하시오. [4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

랑데뷰 쉬사준킬 제120회 해설

1	2	3	4
26	385	64	66
5	6	7	8
⑤	③	②	300

출제
대구 송원학원 황보백 선생님

1) 정답 26
[출제자: 김효경 수학의정원 010-6369-6416]
[편집 : 황보백]

a_{2k-3}, a_{2k-4}, a_{2k-5}는 등차수열을 이루므로 (가)에서 $a_{2k-4}=\dfrac{a_{2k-3}+a_{2k-5}}{2}=200$이다.

S_k은 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 k항까지의 합이므로

$S_k=\dfrac{k(a_1+a_k)}{2}$이고 $S_k=2k^2$이므로 $S_{2k}=8k^2$이다.

$$S_{2k}=\frac{2k(a_1+a_{2k})}{2}=k(a_5+a_{2k-4})=8k^2$$

$k(8+200)=8k^2$

$\therefore\ k=26$

2) 정답 385
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

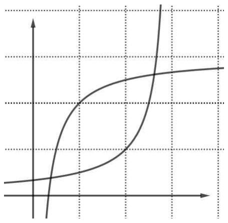
꼭짓점의 x, y좌표가 자연수이므로 제1사분면에서만 생각해보자.

(i) $n=3$일 때

$f(x)=\dfrac{1}{3-x}$이므로 점근선은 $x=3$이고 $(2,1)$을 지난다.

따라서 $f^{-1}(x)$는 점근선이 $y=3$이고 $(1,2)$을 지난다.

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수가 $1^2=1$

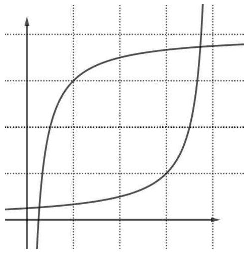


(ii) $n=4$일 때

$f(x)=\dfrac{1}{4-x}$이므로 점근선은 $x=4$이고 $(3,1)$을 지난다.

따라서 $f^{-1}(x)$는 점근선이 $y=4$이고 $(1,3)$을 지난다.

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수가 $2^2=2$

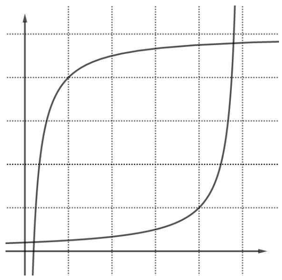


(iii) $n=5$일 때

$f(x)=\dfrac{1}{5-x}$이므로 점근선은 $x=5$이고 $(4,1)$을 지난다.

따라서 $f^{-1}(x)$는 점근선이 $y=5$이고 $(1,4)$을 지난다.

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수가 $3^2=9$



(iv) $n=a$일 때

$f(x)=\dfrac{1}{a-x}$이므로 점근선은 $x=a$이고 $(a-1,1)$을 지난다.

따라서 $f^{-1}(x)$는 점근선이 $y=a$이고 $(1,a-1)$을 지난다.

한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수가 $(a-2)^2$이다.

$$\sum_{n=3}^{12}a_n$$

$$=\sum_{n=3}^{12}(n-2)^2=\sum_{n=1}^{10}n^2=\frac{10\times11\times21}{6}=385$$

3) 정답 64
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

월 후식비를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(9,\ 1.8^2)$을 따른다. 크기가 n인 표본을 임의로 추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X})=9$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{1.8^2}{n}$이므로 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(9,\ \dfrac{1.8^2}{n}\right)$을 따른다. 확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-9}{\dfrac{1.8}{n}}$은 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고

$\mathrm{P}(8.55 \le \overline{X} \le 9.45) \ge 0.9544$이므로

$\mathrm{P}(8.55 \le \overline{X} \le 9.45) = \mathrm{P}\left(\dfrac{8.55-9}{\frac{1.8}{\sqrt{n}}} \le z \le \dfrac{9.45-9}{\frac{1.8}{\sqrt{n}}}\right)$

$= 2\mathrm{P}\left(0 \le z \le \dfrac{\sqrt{n}}{4}\right) \ge 0.9544$

따라서 $\mathrm{P}\left(0 \le z \le \dfrac{\sqrt{n}}{4}\right) \ge 0.4772 = \mathrm{P}(0 \le z \le 2)$

$\dfrac{\sqrt{n}}{4} \ge 2$에서 $n \ge 64$이므로 구하는 최솟값은 64이다.

4) 정답 66
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

18의 양의 약수는 $1, 2, 3, 6, 9, 18$이고 $c+d+e \ge 3$이므로 (나) 조건에 의해 $c+d+e$의 값은 6, 9, 18이 가능하다.

(a, b)	$c+d+e$	설명
$(1, 3)$	6	$6 \to 2+2+2 \Rightarrow 2! \times 1 = 2$
$(1, 2)$	9	(i) 9가 짝수 1개와 홀수 2개의 합으로 표현될 때, 홀수 2개의 합이 짝수이므로 짝수+짝수 가 9가 될 수는 없다. (ii) 9가 짝수 2개와 홀수 1개의 합으로 표현될 때, $9 \to 2+2+5 = 4+4+1 = 2+4+3 = 2+6+1 \Rightarrow$ $\dfrac{3!}{2!} \times 2 + 3! \times 2 = 18$ 따라서 $2 \times 18 = 36$
$(1, 1)$	18	$c+d+e=18$이고 a, b가 모두 홀수이므로 c, d, e중 적어도 2개가 짝수여야 한다. 그런데 세 수의 합이므로 셋 모두 짝수여야 한다. 따라서 $c=2c'$, $d=2c'$, $e=2e'$ $c'+d'+e'=9$이고 자연수 해이므로 ${}_3H_6 = 28$

따라서 $2+36+28=66$

5) 정답 ⑤
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$xg(x) = f(x)$의 양변을 미분하면
$g(x) + xg'(x) = f'(x) \cdots$㉠이고 양변에 $x=0$을 대입하면
$g(0) + 0 \times g'(0) = f'(0) = 0$
따라서 $g(0) = 0$ (ㄱ,참)

양변에 x을 곱하면
$xg(x) + x^2 g'(x) = xf'(x)$이고 $xg(x) = f(x)$이므로
따라서 $x^2 g'(x) = xf'(x) - f(x)$
양변에 2을 대입하면
$4g'(2) = 2f'(2) - f(2) = 0$
따라서 $g'(2) = 0$ (ㄴ.참)

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 $g(0) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$이다.

$g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$에서 $g(0) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = f'(0)$

따라서 사차함수 $f(x)$는 $f(0) = f'(0) = 0$이므로 x^2을 인수로 갖는다.(ㄷ.참)

6) 정답 ③
(i) 이차함수 $f(x)$는 아래로 볼록이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이면
모든 실수 x에 대하여 $|f(x)| = f(x)$이므로 꼭짓점을 제외한 모든 점에서 좌우 미분계수의 값이 같으므로

$\lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} \times \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} > 0$이고

꼭짓점의 x좌표가 a라면

$\lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} \times \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} = 0$이므로

$\lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} \times \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} < 0$을 만족하는 a는 존재하지 않는다.

(ii) 이차함수 $f(x)$가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때,
방정식 $f(x) = 0$의 해를 $x = \alpha$, $x = \beta$라면 $y = |f(x)|$의 그래프에서 $x = \alpha$와 $x = \beta$에서 뾰족점이 생기므로

$\lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} \times \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{|f(a+h)| - |f(a)|}{h} < 0$ 을 만족하는 a의 값이 α와 β이다.

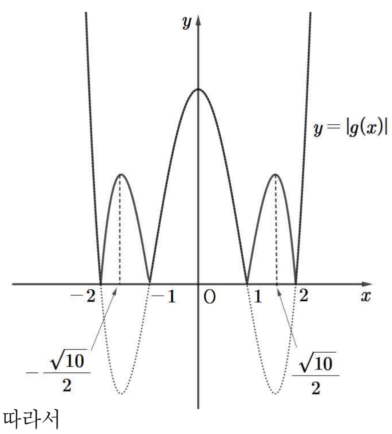
$\alpha + \beta = 0$이고 $\alpha\beta = -4$에서 $\alpha = -2$, $\beta = 2$이다.
(i), (ii)에서 $f(x) = x^2 - 4$이다.
따라서 $g(x) = (x^2-1)(x^2-4)$에서

$\lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{|g(b+h)| - |g(b)|}{h} \times \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{|g(b+h)| - |g(b)|}{h} < 0$

을 만족하는 b의 값은 $g(x) = 0$의 해인 -2, -1, 1, 2이다.
또한 $g'(x) = 2x(x^2-4) + 2x(x^2-1) = 2x(2x^2-5)$에서

$\lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{|g(b+h)| - |g(b)|}{h} \times \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{|g(b+h)| - |g(b)|}{h} = 0$

을 만족하는 b의 값은 $g'(x) = 0$의 해인 $-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$, 0, $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$이다.



따라서

$b_1=-2,\ b_2=-\frac{\sqrt{10}}{2},\ b_3=-1,\ b_4=0,\ b_5=1,\ b_6=\frac{\sqrt{10}}{2},\ b_7=2$

이다.

$n=7$이고 $f(x)=x^2-4$에서 $f(7)=45$

$\sum_{k=1}^{n}|b_k|=2\times\left(1+\frac{\sqrt{10}}{2}+2\right)=6+\sqrt{10}$

$f(n)+\sum_{k=1}^{n}|b_k|=45+6+\sqrt{10}=51+\sqrt{10}$

7) 정답 ②

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)g(x)dx$

$=f\left(\frac{\pi}{2}\right)g\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)g(0)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)g(x)dx$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ g(0)=1$이므로

$=-f(0)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^3 x}{1-\sin x}\right)dx=-f(0)-\frac{3}{2}$

따라서

$1=-f(0)-\frac{3}{2}$에서 $f(0)=-\frac{5}{2}$

[랑데뷰팁]

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^3 x}{1-\sin x}\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2 x\times\cos x}{1-\sin x}\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(1-\sin^2 x)\times\cos x}{1-\sin x}\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\cos x\,dx$

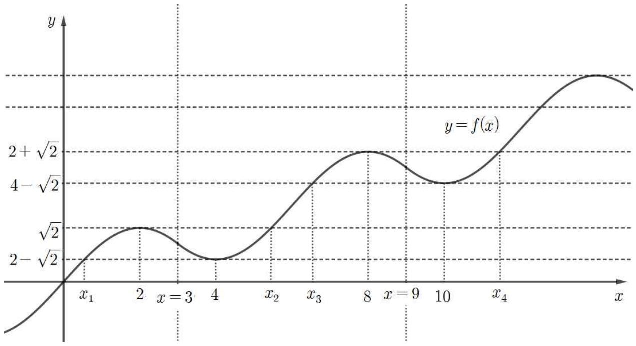
$1+\sin x=t$라 두면

$=\int_1^2 t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^2=\frac{3}{2}$

8) 정답 300

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

(가), (나) 조건을 만족하는 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $|f(x)-f(t)|$가 미분가능하지 않게 되는 x의 개수는 $y=f(x)$와 $y=f(t)$의 교점의 개수와 같다.

$0\le x\le 6$에서 $f(x)$의 극솟값 $2-\sqrt{2}$, 극댓값 $\sqrt{2}$이므로

방정식 $f(x)=2-\sqrt{2}$의 해는 $x=x_1$과 $x=4$

방정식 $f(x)=\sqrt{2}$의 해는 $x=2$와 $x=x_2$이다.

이때

x_1과 x_2는 $x=3$에 대칭이므로 $\frac{x_1+x_2}{2}=3$에서 $x_1+x_2=6$

$x=2$와 $x=4$는 $x=3$에 대칭이므로 $2+4=6$

$6\le x\le 12$에서 $f(x)$의 극솟값 $4-\sqrt{2}$, 극댓값 $2+\sqrt{2}$이므로

방정식 $f(x)=4-\sqrt{2}$의 해는 $x=x_3$과 $x=10$

방정식 $f(x)=2+\sqrt{2}$의 해는 $x=8$와 $x=x_4$이다.

이때

x_3과 x_4는 $x=9$에 대칭이므로 $\frac{x_3+x_4}{2}=9$에서 $x_3+x_4=18$

$x=8$와 $x=10$는 $x=9$에 대칭이므로 $8+10=18$

따라서

$0\le t\le 30$인 t에 대하여 함수 $|f(x)-f(t)|$가 미분가능하지 않게 되는 x의 개수 $g(t)$는 $t=x_1,\ t=2,\ t=4,\ t=x_2,\ t=x_3,\ t=8,\ t=10,\ t=x_4,\ \cdots$

이다.

$x=3$에 대칭인 t의 값의 개수가 4이므로 $3\times4=12$

$x=9$에 대칭인 t의 값의 개수가 4이므로 $9\times4=36$

$x=15$에 대칭인 t의 값의 개수가 4이므로 $15\times4=60$

$x=21$에 대칭인 t의 값의 개수가 4이므로

$21\times4=84$

$x=27$에 대칭인 t의 값의 개수가 4이므로

$27\times4=108$

따라서

$12+36+60+84+108=300$