제 2 교시

수학 영역(가형&나형)

1,2번 ⇨ 수1

3,4번 ⇨ 확통

5,6번 ⇨ 수2

7,8번 ⇨ 미적분

→ 가형은 전문항 풀기, 나형은 1번~6번까지 풀기

5지선다형	단답형

1. 용액의 산성도는 pH 로 나타내는데 용액 1L 속에 들어 있는 수소이온 농도가 x 인 용액의 pH 는

$$\mathrm{pH}=\log_{10}\frac{1}{x}$$

이라고 한다. pH 가 8 인 A 용액 1L 와 pH 가 7 인 B 용액 1L 를 같은 그릇에 잘 넣고 섞은 용액을 C 라 할 때, C 용액의 pH 의 값은 α이다. 이때 100α의 값을 구하시오. [4점]

(단, $\log 5.5=0.74$, $\log 6.5=0.81$ 로 계산한다.)

2. 모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 수열 $\{c_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{c_n}{b_n}$$

을 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. $a_n=2n+1$, $b_n=\dfrac{1}{n}$이면 $c_{98}=100$

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이고 $b_{n+1}=b_n$이면 수열 $\{c_{n+1}-c_n\}$은 등차수열이다.

ㄷ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 공비가 각각 r, r^{-1}인 등비수열일 때, 수열 $\{c_{n+1}-c_n\}$은 공비가 r인 등비수열이다.
(단, $r>0, r\neq 1$)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 각 면에 $1, 3, 3, 3, 5, 5$가 적혀 있는 정육면체 모양의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 n이면 동전을 n번 던진다. 동전의 앞면이 3번 이상 나왔을 때, 주사위의 눈의 수가 3이었을 확률은? [4점]

① $\frac{5}{22}$ ② $\frac{3}{11}$ ③ $\frac{7}{22}$ ④ $\frac{4}{11}$ ⑤ $\frac{9}{22}$

4. 등식

$$\log a + \log b + \log c = 6(\log\sqrt{2} + \log 3)$$

을 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오. [4점]

5. 상수 a, b, c에 대하여 $b<c$이고
$f(x)=|(x-a)^2(x-b)(x-c)|$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=t$에서 미분가능하지 않는다. t의 개수가 1일 때, $y=f(x)$의 극댓값을 구하시오. (단, $|a-c|=4$이다.)[4점]

6. 두 정수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-bx+b}{x-a} & (x \geq 0) \\ x^3+(2a^2+9a)x-2a-11 & (x<0) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고. 모든 실수 t에 대하여 $x \geq t$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(t)$이다. $a \times b$의 값을 구하시오. (단, $a \neq -1$, $b<0$) [4점]

7. 함수 $f(x)$를 $f(x)=\int_1^x \frac{1}{\sin t+2}dt$라 할 때,

$$\int_1^k \frac{\ln\{f(x)+1\}}{\sin x+2}dx=1$$

을 만족시키는 실수 k에 대하여 $f(k)$의 값은? [4점]

① e^2 ② e^e ③ e^2-1 ④ $e-1$ ⑤ $e+1$

8. 실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a\,(a>0)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=f(-x)$

(나) $\int_x^{x+2a} f(t)dt=-\frac{3}{2}e^x-\frac{3}{8}e^{-x}$

닫힌구간 $[0,\ a]$에서 두 실수 $b,\ c$에 대하여 $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{b}+c$ 일 때, $f(x)$의 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 최댓값을 M이라 하자. $e^a+b+c-M$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

랑데뷰 쉬사준킬 제111회 해설

1	2	3	4
726	③	②	280
5	6	7	8
27	25	④	1

출제
대구 송원학원 황보백 선생님

1) 정답 726
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

A용액의 수소이온 농도를 x_{A}, B용액의 수소이온 농도를 x_{B}라 하면 C용액의 수소이온 농도 $x_{\mathrm{C}}=\dfrac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{2}$이다.

$8=\log\dfrac{1}{x_{\mathrm{A}}}\to x_{\mathrm{A}}=10^{-8}$

$7=\log\dfrac{1}{x_{\mathrm{B}}}\to x_{\mathrm{B}}=10^{-7}$

따라서

$x_{\mathrm{C}}=\dfrac{10^{-8}+10^{-7}}{2}=\dfrac{10^{-8}(1+10)}{2}=10^{-8}\times 5.5$

그러므로 $\alpha=\log_{10}\left(10^8\times\dfrac{1}{5.5}\right)=8-0.74=7.26$

따라서 $100\alpha=726$

2) 정답 ③
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

ㄱ.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{c_n}{b_n}\ \to\ c_n=b_n\sum_{k=1}^{n}a_k$이고

$a_n=2n+1$, $b_n=\dfrac{1}{n}$이므로

$\displaystyle c_n=b_n\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=\frac{1}{n}\times\frac{n(3+2n+1)}{2}=n+2$

따라서 $c_{98}=100$ (참)

ㄴ.

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 $a_n=pn+q$이라 하고

$b_{n+1}=b_n$이므로 $b_n=b\ (b>0)$라 하자.

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(p+q+pn+q)}{2}=\frac{1}{2}pn^2+\frac{1}{2}(p+2q)n$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{c_n}{b_n}\to c_n=b_n\sum_{k=1}^{n}a_k$

$\to c_n=\dfrac{1}{2}bpn^2+\dfrac{1}{2}b(p+2q)n$

$c_{n+1}-c_n=\left\{\dfrac{1}{2}bp(n+1)^2+\dfrac{1}{2}b(p+2q)(n+1)\right\}$

$-\left\{\dfrac{1}{2}bpn^2+\dfrac{1}{2}b(p+2q)n\right\}$

$=\dfrac{1}{2}bp\{(n+1)^2-n^2\}+\dfrac{1}{2}b(p+2q)\{(n+1)-n\}$

$=\dfrac{1}{2}bp(2n+1)+\dfrac{1}{2}b(p+2q)$

$=bpn+bp+bq$

따라서 수열 $\{c_{n+1}-c_n\}$은 n에 관한 일차식이므로 공차가 bp인 등차수열이다. (참)

ㄷ. $a_1=a$, $a_n=ar^{n-1}$, $b_1=b$, $b_n=\dfrac{b}{r^{n-1}}$라 하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$이므로

$\displaystyle c_n=b_n\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{b}{r^{n-1}}\times\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{ab(r-r^{1-n})}{r-1}$

$=\dfrac{abr}{r-1}-\dfrac{ab}{r-1}r^{1-n}$

$c_{n+1}=\dfrac{abr}{r-1}-\dfrac{ab}{r-1}r^{-n}$

$\{c_{n+1}-c_n\}=-\dfrac{ab}{r-1}(r^{-n}+r^{1-n})=-\dfrac{ab(1+r)}{r-1}r^{-n}$

따라서 $\{c_{n+1}-c_n\}$은 공비가 $\dfrac{1}{r}$인 등비수열이다. (거짓)

[다른 풀이]-최재영t

ㄴ. $b_n=b$ (b는 상수)라 하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_n=\frac{c_n}{b}$이고 $\displaystyle c_n=b\sum_{k=1}^{n}a_n$이므로

$\displaystyle c_{n+1}-c_n=b\sum_{k=1}^{n+1}a_n-b\sum_{k=1}^{n}a_n=ba_{n+1}$

$\{a_n\}$이 등차수열이므로 수열 $\{c_{n+1}-c_n\}$은 등차수열이다.

3) 정답 ②
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

주사위를 던져 나온 눈의 수가 3인 사건을 A, 동전의 앞면이 3회 이상 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|B)$이다.
주사위의 눈의 수가 3, 동전의 앞면이 3회 나오는 확률은

$\dfrac{3}{6}\times{}_3\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{16}$

주사위의 눈의 수가 5, 동전의 앞면이 3회 이상 나오는 확률은

$\dfrac{2}{6}\times\left\{{}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_5\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right\}$

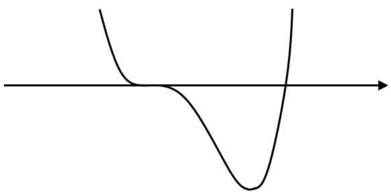
$=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{10+5+1}{32}\right)=\dfrac{16}{96}$

$$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}+\frac{16}{96}}=\frac{6}{22}=\frac{3}{11}$$

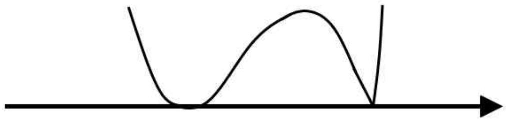
4) 정답 280
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$\log a+\log b+\log c=6(\log\sqrt{2}+\log 3)$에서
$\log abc=6\log(\sqrt{2}\times 3)$
$\quad=\log(\sqrt{2}\times 3)^6$
$\quad=\log(2^3\times 3^6)$
이므로
$abc=2^3\times 3^6$
이 때 $a=2^p\times 3^l,\ b=2^q\times 3^m,\ c=2^r\times 3^n$
$(p,\ q,\ r,\ l,\ m,\ n$은 음이 아닌 정수)라 하면
$abc=2^{p+q+r}\times 3^{l+m+n}=2^3\times 3^6$
$\therefore\ p+q+r=3,\ l+m+n=6$
$p+q+r=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $p,\ q,\ r$의 순서쌍 $(p,\ q,\ r)$의 개수는
${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$
$l+m+n=6$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $l,\ m,\ n$의 순서쌍 $(l,\ m,\ n)$의 개수는
${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$
따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는
$10\times 28=280$

5) 정답 27
[출제자 : 최재영 010-2577-4221]
[편집 : 황보백]
$y=f(x)$가 오직 한 개의 x값에서만 미분가능하지 않기 위해서 $y=(x-a)^2(x-b)(x-c)$그래프는 아래와 같은 꼴의 그래프를 가져야 한다.



위 그림과 같이 한 점에서 삼중근을 가져야 하며,
$b<c$이고 $a\neq c$이므로, $a=b<c$인 $f(x)=|(x-a)^3(x-c)|$는 아래 그림과 같다.



$y=(x-a)^3(x-c)$를 미분하면,
$y'=3(x-a)^2(x-c)+(x-a)^3=(x-a)^2(4x-3c-a)$이므로,
$x=\frac{a+3c}{4}$에서 극솟값 $y=\left(\frac{3c-3a}{4}\right)^3\left(\frac{a-c}{4}\right)=-3^3\left(\frac{a-c}{4}\right)^4$을 가진다.
따라서
$f(x)=|(x-a)^3(x-c)|$의 극댓값은 $3^3\left(\frac{a-c}{4}\right)^4$이다. $|a-c|=4$이므로, 극댓값은 27이다.

6) 정답 25
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$x\geq 0$에서 $f(x)=\frac{-b(a-1)}{x-a}+b$ 에서 $f(x)$가 실수 전에의 집합에서 연속이려면 분수함수의 점근선 $x=a$의 $a<0$이어야 한다.
또한 모든 실수 t에 대하여 $x\geq t$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(t)$가 되기 위해서는 $b(a+1)<0$이어야 $x\geq 0$에서 함수 $f(x)$가 증가함수가 되어 조건을 만족한다.

한편, $x=0$에서 연속이므로
$f(0)=\lim_{x\to 0-}f(x) ⇨ -\frac{b}{a}=-2a-11$ ⇨ $b=2a^2+11a$
$b<0$이므로 $a(2a+11)<0$에서 $-\frac{11}{2}<a<0$이다.…㉠

$x<0$에서 $f(x)=x^3+(2a^2+9a)x-2a-11$
$f'(x)=3x^2+2a^2+9a$
$x<0$에서 함수 $f(x)$가 증가함수이면 모든 실수 t에 대하여 $x\geq t$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(t)$가 된다. 따라서 $f'(0)\geq 0$이면 된다.
$f'(0)=2a^2+9a\geq 0$에서 $a\leq -\frac{9}{2}$ 또는 $a\geq 0$…㉡
㉠, ㉡에서 $-\frac{11}{2}<a\leq -\frac{9}{2}$
따라서 정수 a는 -5이다.
$b=2a^2+11a$에서 $b=50-55=-5$
따라서 $a\times b=(-5)\times(-5)=25$

7) 정답 ④
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$f(x)=\int_1^x \frac{1}{\sin t+2}dt$에서

$f(1)=0$, $f'(x)=\dfrac{1}{\sin x+2}$ 이다.

$\displaystyle\int_1^k \frac{\ln\{f(x)+1\}}{\sin x+2}dx$

$=\displaystyle\int_1^k f'(x)\ln\{f(x)+1\}dx$

$f(x)+1=s$라 두면 $f'(x)dx=ds$

$x:1\to k$일 때, $s:1\to f(k)+1$

$=\displaystyle\int_1^{f(k)+1}\ln s\,ds$

$=[s\ln s-s]_1^{f(k)+1}$

$=\{f(k)+1\}\ln\{f(k)+1\}-\{f(k)+1\}+1=1$

$=\{f(k)+1\}\{\ln\{f(k)+1\}-1\}=0$

$f(k)+1>0$ (진수조건)이므로 $\ln\{f(k)+1\}=1$

$\therefore\ f(k)=e-1$

8) 정답 1

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

조건 (나)

$\displaystyle\int_x^{x+2a}f(t)dt=-\frac{3}{2}e^x-\frac{3}{8}e^{-x}$ 에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x+2a)-f(x)=-\dfrac{3}{2}e^x+\dfrac{3}{8}e^{-x}$ …㉠

이 식의 양변에 $x=-a$를 대입하면

$f(a)-f(-a)=-\dfrac{3}{2}e^{-a}+\dfrac{3}{8}e^a$

조건 (가)에서 의해

$f(a)=f(-a)$이므로 $-\dfrac{3}{2}e^{-a}+\dfrac{3}{8}e^a=0$ ⇨ $e^{2a}=4$ ⇨ $e^a=2$

⇨ $\therefore\ a=\ln 2\ (a>0)$

㉠에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x+2a)-f'(x)=-\dfrac{3}{2}e^x-\dfrac{3}{8}e^{-x}$

이 식에 $x=-a$를 대입하면

$f'(a)-f'(-a)=-\dfrac{3}{2}e^{-a}-\dfrac{3}{8}e^a$

$a=\ln 2$이고 $f'(-a)=-f'(a)$, $e^a=2$이므로

$2f'(\ln 2)=-\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{3}{2}$에서 $f'(\ln 2)=-\dfrac{3}{4}$

구간 $[0,\ln 2]$에서 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{b}+c$이므로

$f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{b}$

$f'(\ln 2)=\dfrac{2-\frac{1}{2}}{b}=\dfrac{3}{2b}=-\dfrac{3}{4}$

따라서 $b=-2$… ㉡

한편 $\displaystyle\int_x^{x+2a}f(t)dt=-\frac{3}{2}e^x-\frac{3}{8}e^{-x}$의 양변에 $x=-a$를 대입하면

$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(t)dt=-\frac{3}{2}e^{-a}-\frac{3}{8}e^a=-\frac{3}{2}$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고

$a=\ln 2$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{b}+c$이므로

$\displaystyle 2\int_0^{\ln 2}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{b}+c\right)dt=-\frac{3}{2}$ ⇨ $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\left(\frac{e^t+e^{-t}}{b}+c\right)dt=-\frac{3}{4}$

⇨ $\left[\dfrac{e^t-e^{-t}}{b}+ct\right]_0^{\ln 2}=\dfrac{3}{2b}+\ln 2c=-\dfrac{3}{4}$

㉡에서 $b=-2$이므로 $-\dfrac{3}{4}+\ln 2c=-\dfrac{3}{4}$

따라서 $c=0$

$a=\ln 2$, $b=-2$, $c=0$

따라서 $-\ln 2\le x\le\ln 2$일 때 $f(x)=-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 이다.…㉢

한편, ㉠ $f(x+2a)-f(x)=-\dfrac{3}{2}e^x+\dfrac{3}{8}e^{-x}$에서 $a=\ln 2$이므로

$f(x+2\ln 2)=f(x)-\dfrac{3}{2}e^x+\dfrac{3}{8}e^{-x}$

$-\ln 2\le x\le\ln 2$에서 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{-2}$ 이므로

$f(x+2\ln 2)=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{-2}\right)-\dfrac{3}{2}e^x+\dfrac{3}{8}e^{-x}\ (-\ln 2\le x\le\ln 2)$

$=-2e^x-\dfrac{1}{8}e^{-x}\ (-\ln 2\le x\le\ln 2)$

이고 양변에 x대신 $x-2\ln 2$을 대입하면

$f(x)=-2e^{x-2\ln 2}-\dfrac{1}{8}e^{-x+2\ln 2}\ (-\ln 2\le x-2\ln 2\le\ln 2)$

$=-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\ (\ln 2\le x\le 3\ln 2)$

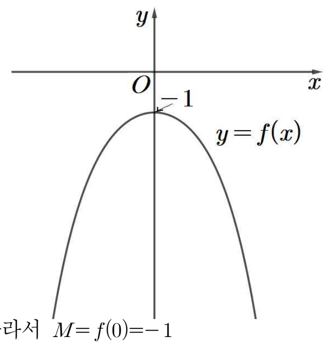
따라서

$f(x+2\ln 2)=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{-2}\right)-\dfrac{3}{2}e^x+\dfrac{3}{8}e^{-x}\ (\ln 2\le x\le 3\ln 2)$

로 같은 과정이 반복된다.

즉 $(-\infty,\infty)$에서 $f(x)=-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 이다.

$f'(x)=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=0$ 에서 $e^{2x}=1$ 따라서 $x=0$에서 극댓값을 갖고 그 값이 최댓값이다.



따라서 $M=f(0)=-1$

$a=\ln 2$, $b=-2$, $c=0$, $M=-1$

$e^{a}+b+c-M=2+(-2)+0-(-1)=1$

[랑데뷰팁]

(나) $\int_{x}^{x+2a} f(t)dt=-\frac{3}{2}e^{x}-\frac{3}{8}e^{-x}$에서

양변에 $x=0$대입하면 $\int_{0}^{a} f(t)dt=-\frac{15}{8}$

양변에 $x=-2a$대입하면 $\int_{-2a}^{0} f(t)dt=-\frac{3}{2}e^{-2a}-\frac{3}{8}e^{2a}$

$-\frac{15}{8}=-\frac{3}{2}e^{-2a}-\frac{3}{8}e^{2a}$에서

$e^{2a}=x$라 두면 $-\frac{15}{8}=-\frac{3}{2x}-\frac{3}{8}x$ ⇨ $5=\frac{4}{x}+x$ ⇨ $x^{2}-5x+4=0$

$x=1$ 또는 $x=4$이다. $a>0$이므로 $e^{2a}=4$에서 $a=\ln 2$