제 2 교시

수학 영역(가형&나형)

1,2번 ⇨ 수1

3,4번 ⇨ 확통

5,6번 ⇨ 수2

7,8번 ⇨ 미적분

→ 가형은 전문항 풀기, 나형은 1번~6번까지 풀기

5지선다형	단답형

1. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $a_1+b_1=10$, $a_{10}+b_{10}=20$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값을 구하면? [4점]

① 100 ② 125 ③ 150 ④ 175 ⑤ 200

2. 다음 조건을 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 닫힌구간 $[-10, 10]$에서 $y=\cos(n\pi x)$와의 교점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

(가) $f(x)=2^{-x+1}-1$ $(0 \le x \le 1)$ (나) $f(x)=f(-x)$ (다) $f(1+x)+f(1-x)=0$

① 950 ② 1000 ③ 1050 ④ 1100 ⑤ 1150

3. 불량품이 4개, 합격품이 8개 들어 있는 상자에서 한 개 씩 두 번 제품을 꺼낼 때, 두 개의 제품이 모두 불량품일 확률은? (단, 꺼낸 제품은 다시 넣지 않는다.) [4점]

① $\frac{5}{11}$ ② $\frac{4}{11}$ ③ $\frac{3}{11}$ ④ $\frac{2}{11}$ ⑤ $\frac{1}{11}$

4. 어느 모집단의 확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=r)={}_nC_r\left(\frac{3}{4}\right)^r\left(\frac{1}{4}\right)^{n-r}\ (r=0,1,2,\cdots,n)$$

일 때, 이 모집단에서 크기가 3인 표본을 임의 추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{E}(\overline{X})+\mathrm{V}(\overline{X})=26$일 때, 자연수 n의 값은? [4점]

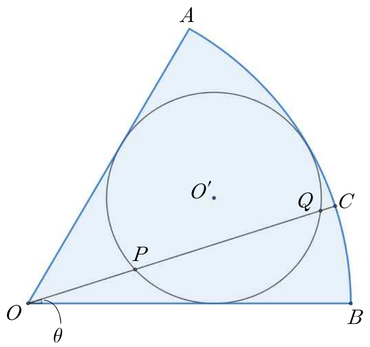
① 28 ② 32 ③ 36 ④ 40 ⑤ 44

5. 삼차함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+a$에 대하여 함수 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수 a의 최솟값은? [4점]

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

6. 함수 $f(x)=\begin{cases} -x-2 & (x<-1) \\ -|x|+1 & (-1\le x<2) \\ x-1 & (x\ge 2) \end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2}$과 일반항이 $a_n=\begin{cases} p & (n=1, 3) \\ q & (n=2) \\ rn+s & (n=4, \cdots) \end{cases}$인 수열 a_n이 $\lim_{x\to 2}[g(x)\{g(x-n)+a_n\}]=g(2)\{g(2-n)+a_n\}$을 만족시킨다. 이때, $p+q+r+s$의 값을 구하시오. (단, p, q, r, s는 상수이다.) [4점]

7. 그림과 같이 반지름의 길이가 3이고 $\angle \mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 AOB에 내접하는 원을 O′이라 하자. 호 AB위의 한 점 C에 대하여 $\angle \mathrm{COB}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$일 때, 원 O′과 $\overline{\mathrm{OC}}$가 만나는 두 점을 P, Q라 하자. $\lim_{\theta \to 0+}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}^2}{\theta}$의 값을 구하면? [4점]



① 8 ② $8\sqrt{2}$ ③ $8\sqrt{3}$ ④ $16\sqrt{2}$ ⑤ $16\sqrt{3}$

8. 일차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\frac{f(x)}{x^2-2x+2}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(2)=1$
(나) 모든 실수 x에 대하여
$\int_0^{x+1} g(t)dt+\int_0^{x-1} g(-t)dt=0$이다.

다음 **보기** 중 옳은 것은? [4점]

| 보 기 |
ㄱ. $g(0)=-g(2)$
ㄴ. $\int_{-2}^{2} f(x)dx=-6$
ㄷ. 함수 $g(x)$의 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

랑데뷰 쉬사준킬 제72회 해설

1	2	3	4
③	⑤	⑤	②
5	6	7	8
②	2	③	④

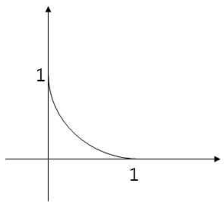
출제
대구 송원학원 황보백 선생님

1) 정답 ③
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

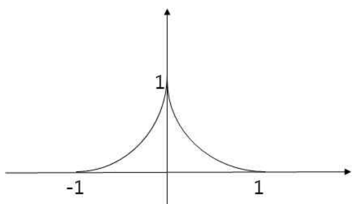
$$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = (a_1+a_2+\cdots+a_{10})+(b_1+b_2+\cdots+b_{10})$$
$$= \frac{10(a_1+a_{10})}{2} + \frac{10(b_1+b_{10})}{2}$$
$$= 5(a_1+a_{10})+5(b_1+b_{10})$$
$$= 5\{(a_1+b_1)+(a_{10}+b_{10})\}$$
$$= 5(10+20) = 150$$

2) 정답 ⑤
[출제자 조남웅 STM수학학원 010-2024-0707]
[편집 : 황보백]

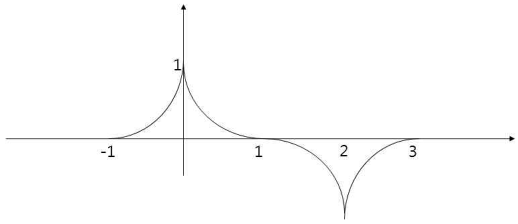
조건 (가)에 의하여 $f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



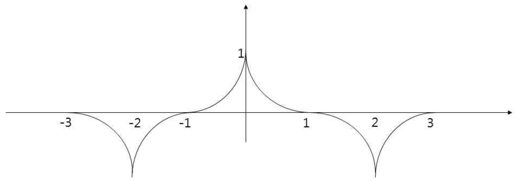
조건 (나)에서 $f(x)$는 y축 대칭 함수 이므로 $f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



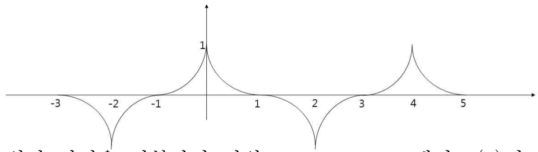
조건 (다)에서 $f(x)$는 점$(1,0)$에 대칭 함수 이므로 $f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



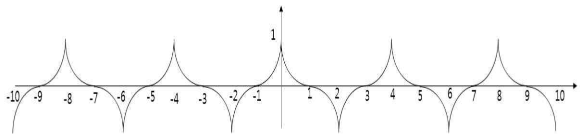
다시 조건 (나)에 의하여 y축 대칭되게 $f(x)$의 그래프를 그리면 아래와 같다.



다시 점$(1,0)$에 대칭되게 그래프를 그리면 아래와 같다.



위의 과정을 반복하여 범위 $-10 \le x \le 10$ 에서 $f(x)$의 그래프를 그려 보면



한편 $y=\cos(n\pi x)$의 주기는 $\frac{2}{n}$이다.

$n=1$일 때, 주기는 2이고 $f(x)$와의 교점을 생각해 보자.

$f(x)$는 -10부터 구간의 길이가 2만큼씩 증가와 감소를 반복한다.

각 증가 또는 감소하는 구간에서 $y=\cos(\pi x)$와의 교점은 2개이고

$x=-8,-4,0,4,8$에서 교점이 각각 1개씩이므로

$a_1 = 2\times 10+5$

$n=2$일 때, 주기는 1이고 $f(x)$와의 교점을 생각해 보자.

각 증가 또는 감소하는 구간에서 $\cos(2\pi x)$와의 교점은 4개이고

$x=-8,-4,0,4,8$에서 교점이 각각 1개씩이므로

$a_2 = 4\times 10+5$

수열 a_n의 규칙을 찾아 보면 각 증가 또는 감소하는 구간에서 교점이 2배씩 증가 한다.

$\therefore a_n = 2n \times 10 + 5$이고

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} 20n+5 = \frac{10 \times (25+205)}{2} = 1150$$

3) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

첫 번째에 불량품을 꺼내는 사건을 A,

두 번째에 불량품을 꺼내는 사건을 B라고 하면

$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $P(B|A) = \frac{3}{11}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$$

4) 정답 ②

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

확률변수 X는 $\mathrm{B}\left(n, \frac{3}{4}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{E}(X) = \frac{3}{4}n$, $\mathrm{V}(X) = \frac{3}{16}n$

크기가 3인 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산은 다음과 같다.

$\mathrm{E}(\overline{X}) = \frac{3}{4}n$, $\mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{n}{16}$

따라서 $\mathrm{E}(\overline{X}) + \mathrm{V}(\overline{X}) = \frac{13}{16}n = 26$

$\therefore\ n = 32$

5) 정답 ②

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$F(x) = \int_0^x f(t)dt$이므로 $F'(x) = f(x)$, $F(0) = 0$

$F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지므로 $F'(x)$, 즉 $f(x)$의 부호가 오직 한 번 변해야 한다.

따라서 삼차함수 $f(x)$가 x축과 오직 한 번 만나거나 x축과 접해야 한다.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + a$에서

$f'(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$이므로

부등식 $f(0) \times f(2) \geq 0$이 성립해야 한다.

$a\left(a - \frac{4}{3}\right) \geq 0 \quad \therefore a \leq 0$ 또는 $a \geq \frac{4}{3}$

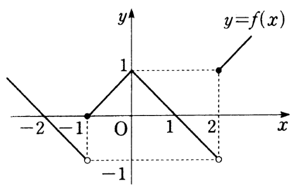
따라서 양수 a의 최솟값은 $\frac{4}{3}$이다.

6) 정답 2

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & (x < -1) \\ -|x|+1 & (-1 \leq x < 2) \\ x-1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



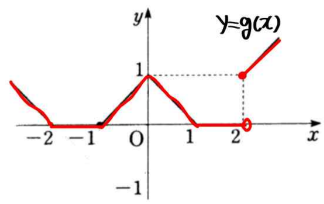
$g(x) = \frac{f(x)+|f(x)|}{2}$는

$f(x) \geq 0$일 때, $g(x) = \frac{f(x)+f(x)}{2} = f(x)$이고

$f(x) < 0$일 때, $f(x) = \frac{f(x)-f(x)}{2} = 0$

따라서

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq -2, -1 \leq x \leq 1, x \geq 2) \\ 0 & (-2 < x < -1, 1 < x < 2) \end{cases}$$



함수 $y = g(x-n)$의 그래프는 함수 $y = f(x)$의 그래프를 x축으로 n만큼 평행이동한 것이므로 $x = 2$에서 연속이다.

$\lim_{x \to 2+} g(x) = 1$, $g(2) = 1$, $\lim_{x \to 2-} g(x) = 0$ 이므로

$\lim_{x \to 2+} [g(x)\{g(x-n)+a_n\}] = 1 \times \{g(2-n)+a_n\} = g(2-n)+a_n \cdots$㉠

$\lim_{x \to 2-} [g(x)\{g(x-n)+a_n\}] = 0 \times \{g(2-n)+a_n\} = 0 \cdots$㉡

$g(2)\{g(2-n)+a_n\} = g(2-n)+a_n \cdots$㉢

$g(x)$가 $x = 2$에서 연속이므로

㉠=㉡=㉢이다.

따라서 $g(2-n)+a_n = 0$

$n = 1$일 때, $g(1)+a_1 = 0$이고 $g(1) = 0$이므로 $a_1 = 0 \to p$

$n = 2$일 때, $g(0)+a_2 = 0$이고 $g(0) = 1$이므로 $a_2 = -1 \to q$

$n = 3$일 때, $g(-1)+a_3 = 0$이고 $g(-1) = 0$이므로 $a_3 = 0 \to p$

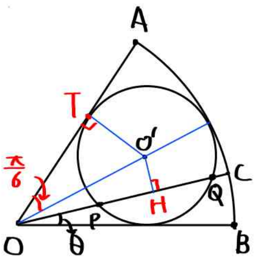
$n \geq 4$일 때, $x \leq -2$에서 $g(x) = -x-2$이므로 $-(2-n)-2+a_n = 0$이다. $a_n = -n+4$

$\to r = -1$, $s = 4$

따라서 $p+q+r+s = 0+(-1)+(-1)+4 = 2$

7) 정답 ③

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]



위의 그림과 같이 삼각형 TOO′에서 $\angle \mathrm{TOO}' = \frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{\mathrm{OO}'} : \overline{\mathrm{O'T}} = 2 : 1$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{OO}'} = 2$

원 O′의 중심 O′에서 $\overline{\mathrm{OC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle \mathrm{AOO}' = \angle \mathrm{O'OB} = \frac{\pi}{6}$이므로

$\angle \mathrm{O'OH} = \frac{\pi}{6} - \theta$이고 $\overline{\mathrm{O'H}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)$이다.

삼각형 QO′H에서

$\overline{\mathrm{HQ}}^2 = 1 - \left\{2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)\right\}^2$

$= 1 - 4\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)^2$

$= 1 - (\cos^2\theta + 3\sin^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta)$

$= 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}^2 = 4\overline{\mathrm{HQ}}^2 = 8(\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta)$

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{PQ}}^2}{\theta} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{8(\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta)}{\theta}$

$= \lim_{\theta \to 0+} 8\left(\sqrt{3} \cdot \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \cos\theta - \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \sin\theta\right)$

$= 8\sqrt{3}$

8) 정답 ④

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

ㄱ. $\int_0^{x-1} g(-t)dt$에서 $t = -s$라 두면 $dt = -ds$이고

t가 $0 \to x-1$일 때 s는 $0 \to 1-x$이므로

$\int_0^{x-1} g(-t)dt = -\int_0^{1-x} g(s)ds$이다.

따라서

$\int_0^{x+1} g(t)dt + \int_0^{x-1} g(-t)dt$

$= \int_0^{x+1} g(t)dt - \int_0^{1-x} g(s)ds$

$= \int_0^{1+x} g(t)dt - \int_0^{1-x} g(t)dt = 0 \cdots$ ㉠이다.

양변을 미분하면

$g(1+x) + g(1-x) = 0$에서 함수 $g(x)$는 $(1, 0)$에 대칭이다.

따라서 $x = 1$을 대입하면 $g(0) = -g(2) = -1$ (참)

ㄴ. $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 2x + 2} = \frac{f(x)}{(x-1)^2 + 1}$에서

$g(0) = \frac{f(0)}{2}$, $g(2) = \frac{f(2)}{2}$이고

$g(0) = -g(2)$이므로 $f(0) = -f(2)$이다.

따라서 일차함수 $f(x)$도 $(1, 0)$에 대칭이다.

$\therefore\ f(x) = a(x-1)$

(가)에서 $g(2) = \frac{f(2)}{2} = 1$에서 $f(2) = 2$이다.

따라서 $a = 2$

따라서 $f(x) = 2x - 2$

$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{2} (2x-2)dx$

$= \left[x^2 - 2x\right]_{-2}^{2} = -8$ (거짓)

ㄷ. $g(x) = \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2}$에서 $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$이고

$g'(x) = \frac{2(x^2 - 2x + 2) - 4(x-1)^2}{(x^2 - 2x + 2)^2}$

$= \frac{-2x(x-2)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$ 이므로

$x = 0$일 때 극솟값 $g(0) = -1$을 갖고 $x = 2$일 때 극댓값 $g(2) = 1$을 갖는다.

따라서 함수 $g(x)$의 치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다. (참)