제 2 교시

수학 영역(가형)

1) [2020년 7월 모의고사 가형 19번]
실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_{0}^{x}\ln f(t)\,dt$$

일 때, 함수 $g(x)$와 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극값 2를 갖는다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g'(-x)=g'(x)$이다.

$\int_{-1}^{1}\frac{xf'(x)}{f(x)}dx$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

2) [2020년 7월 모의고사 가형 19번]-변형
실수 전체의 집합에서 $f(-x)=f(x)$이고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,e^{f(t)}\,dt$$

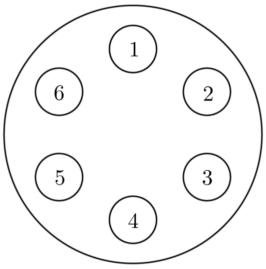
일 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.
[랑데뷰수학]

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극값 3를 갖는다.
(나) $\int_{0}^{1}e^{f(x)}dx=1$

$\int_{-1}^{1}xf(x)f'(x)e^{f(x)}\,dx$의 값은?

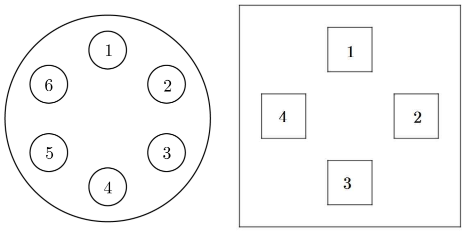
① -6 ② -2 ③ 2 ④ 6 ⑤ 10

3) [2020년 7월 모의고사 가형 20번]
그림과 같이 원탁 위에 1부터 6까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 접시가 놓여 있고 같은 종류의 쿠키 9개를 접시 위에 담으려고 한다. 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 적혀 있는 접시와 그 접시에 이웃하는 양 옆의 접시 위에 3개의 쿠키를 각각 1개씩 담는 시행을 한다. 예를 들어, 주사위를 던져 나온 누의 수가 1인 경우 6, 1, 2가 적혀 있는 접시 위에 쿠키를 각각 1개씩 담는다. 이 시행을 3번 반복하여 9개의 쿠키를 모두 접시 위에 담을 때, 6개의 접시 위에 각각 한 개 이상의 쿠키가 담겨 있을 확률은?



① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{17}{36}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{23}{36}$ ⑤ $\frac{13}{18}$

4) [2020년 7월 모의고사 가형 20번]-변형
그림과 같이 원탁 위에 1부터 6까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 접시가 놓여 있고 정사각형 탁자에는 각 변의 중간에 1부터 4까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 4개의 접시가 놓여 있다. 간식으로 사과와 배를 각 접시에 담으려고 한다. 같은 종류의 사과 9개는 원탁의 접시 위에 담고 같은 종류의 배 9개는 정사각형 모양의 탁자에 담는다고 한다. 1부터 6까지 적혀 있는 정육면체의 주사위와 1부터 4까지 적혀 있는 정사면체 모양의 주사위가 있다. 두 주사위를 던져 나온 정육면체 주사위의 눈은 원탁의 접시와 그 양 옆의 접시 위에 3개의 사과를, 나온 정사면체 주사위의 눈은 정사각형 탁자의 접시에 적혀 있는 접시와 그 접시에 이웃하는 양 옆의 접시 위에 3개의 배를 각각 1개씩 담는 시행을 한다. 이 시행을 3번 반복하여 9개의 사과와 9개의 배를 모두 접시 위에 담을 때, 두 탁자의 모든 접시 위에 각각 한 개 이상의 간식이 담겨 있을 확률은?
[랑데뷰수학]



① $\frac{83}{192}$ ② $\frac{251}{576}$ ③ $\frac{253}{576}$ ④ $\frac{85}{192}$ ⑤ $\frac{257}{576}$

5) [2020년 7월 모의고사 가형 21번]

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+3}$에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(x)-g(x)\ (0<x<4)$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. $h(1)=1$

ㄴ. 두 양수 a, b $(a<b<4)$ 에 대하여 $\displaystyle\int_a^b h(x)dx$의 값이 최대일 때, $b-a=2$이다.

ㄷ. $h(x)$의 도함수 $h'(x)$의 최댓값은 $\dfrac{7}{6}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6) [2020년 7월 모의고사 가형 21번]-변형

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=x+\cos x$와 함수 $g(x)=x+\sin x$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f^{-1}(x)-g^{-1}(x)$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f^{-1}(x)$와 $g^{-1}(x)$는 $f(x)$와 $g(x)$의 역함수이다.)

[랑데뷰수학]

| 보 기 |

ㄱ. $h\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

ㄴ. 닫힌구간 $\left[\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{5}{4}\pi-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$에서 곡선 $y=h(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $2\sqrt{2}$이다.

ㄷ. 두 양수 a, b에 대하여 $\displaystyle\int_a^b h(x)dx$의 값이 최대일 때, $a+b$의 최솟값은 $\dfrac{3}{2}\pi$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

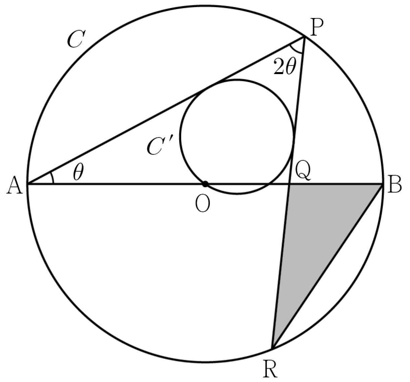
7) [2020년 7월 모의고사 가형 28번]
집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하시오.

(가) $f(3)\times f(6)$은 3의 배수이다. (나) 집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.

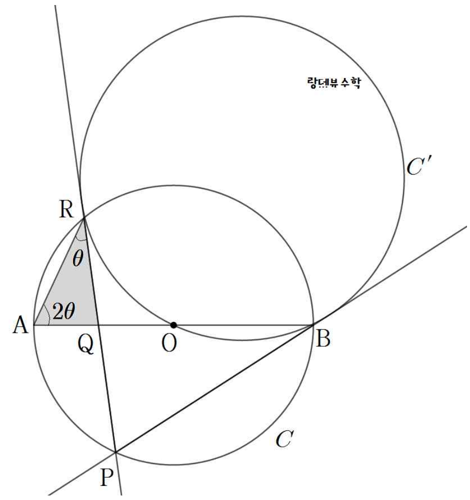
8) [2020년 7월 모의고사 가형 28번]-변형
집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 a라 할 때, $\frac{a}{8}$의 값을 구하시오. [랑데뷰수학]

(가) $f(3)\times f(6)$은 40미만의 8의 배수이다. (나) 집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.

9) [2020년 7월 모의고사 가형 29번]
그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 원 C 가 있다. 원 C 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 할 때, 선분 AB위에 $\angle \mathrm{APQ}=2\theta$를 만족시키는 점을 Q라 하자. 직선 PQ가 원 C 와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R라 할 때, 중심이 삼각형 AQP의 내부에 있고 두 선분 PA, PR에 동시에 접하는 원을 C'이라 하자. 원 C'이 점 O를 지날 때, 원 C'의 반지름의 길이를 $r(\theta)$, 삼각형 BQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta \to +} \frac{S(\theta)}{r(\theta)}=a$일 때, $45a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



10) [2020년 7월 모의고사 가형 29번]-변형
그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 원 C 가 있다. 원 C 위를 움직이는 점 R에 대하여 $\angle \mathrm{RAB}=2\theta$라 할 때, 선분 AB위에 $\angle \mathrm{ARQ}=\theta$를 만족시키는 점을 Q라 하자. 직선 RQ가 원 C 와 만나는 점 중 R가 아닌 점을 P라 할 때, 중심이 삼각형 PBQ의 외부에 있고 두 직선 PR, PB에 동시에 접하는 원을 C'이라 하자. 원 C'이 점 O를 지날 때, 원 C'의 반지름의 길이를 $r(\theta)$, 삼각형 AQR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta \to +} \frac{S(\theta)}{r(\theta)}=a$일 때, $18a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)
[랑데뷰수학]



11) [2020년 7월 모의고사 가형 30번]

함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$와 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=e^{af(x)}+bf(x)\ \ (0<x<12)$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, $\cdots$, α_m (m은 자연수)라 할 때, m이하의 자연수 n에 대하여 α_n은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) n이 홀수일 때, $\alpha_n=n$이다.
> (나) n이 짝수일 때, $g(\alpha_n)=0$이다.

함수 $g(x)$가 서로 다른 두 개의 극댓값을 갖고 그 합이 e^3+e^{-3}일 때,

$m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}g(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=pe^3+qe$이다. $p-q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 정수이다.)

12) [2020년 7월 모의고사 가형 30번]-변형

함수 $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$와 세 실수 a, b, c $(a>0, b\neq 0,\ c>1)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=a\ln(f(x)+c)+bf(x)$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 정수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.
[랑데뷰수학]

> (가) $g'(n)=0$
> (나) 함수 $g(x)$의 극댓값은 $2a$이고 두 극솟값의 합은 $4\ln(e^4-1)$이다.

$g\left(\frac{bc}{a}\right)$의 값을 구하시오.

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

랑데뷰 수학 황보백 선생 지음
검수:
Sumath – 대구 훌륭한 수학 선생님들의 연구모임
서영만T, 장정보T, 장선정T, 이현일T,이지훈T

카톡: hbb100

고교수학의 모든 것 : 랑데뷰 세미나
⇨ https://docs.orbi.kr/docs/7524/

수학N제
랑데뷰–수능을 완성하다!–수학I
⇨ https://docs.orbi.kr/docs/7525/

랑데뷰–수능을 완성하다!–확률과통계
⇨ https://docs.orbi.kr/docs/sell/7544/

오르비 전자책(pdf)로 판매중입니다.

랑데뷰–수능을 완성하다!–미적분
랑데뷰부–수능을 완성하다!–수학II
도 오르비에 전자책으로 등록될 예정입니다

어썸&랑데뷰 실전 모의고사 시즌1 에 이어
어썸&랑데뷰 실전 모의고사 시즌2 도 8월중에 출간될 예정입니다.
공동 저자이신 정현경 선생님의 지도하에 시즌1 못지않게 시즌2도 고퀼리티로 제작되었습니다.

오르비 뿐 아니라 예스24, 알라딘 등에서 판매되고 있습니다.

감사합니다.

1) 정답 ⑤
[풀이 : 황보백]

(가)에서 $g(1)=2$, $g'(1)=0$이다.
따라서
$g(1)=\int_0^1 \ln f(t)dt=2$
$g'(x)=\ln f(x)$에서 $g'(1)=\ln f(1)=0$
$\therefore\ f(1)=1$
(나)에서 $g'(-x)=g'(x)\to \ln f(-x)=\ln f(x)$
이고 $f(x)>0$이므로 $f(x)=f(-x)$이다.
그러므로
$\int_0^x \ln f(t)\,dt$에서 $t=-s$을 대입하면
$\int_0^{-x} \ln f(-s)(-ds)=\int_{-x}^0 \ln f(s)ds$이므로
$\int_0^x \ln f(t)dt=\int_{-x}^0 \ln f(t)\,dt$
$g(1)=\int_0^1 \ln f(t)dt=2$에서 $\int_{-1}^0 \ln f(t)dt=2$이다.

$\int_{-1}^1 \frac{xf'(x)}{f(x)}dx$
$=\int_{-1}^1 x(\ln f(x))'dx$
$=[x\ln f(x)]_{-1}^1-\int_{-1}^1 \ln f(x)dx$
$=\ln f(1)+\ln f(-1)-\int_{-1}^0 \ln f(x)dx-\int_0^1 \ln f(x)dx$
$=2\ln 1-2-2=-4$

2) 정답 ①
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

(가)에서 $g(1)=3$, $g'(1)=0$이다.
따라서
$g(1)=\int_0^1 f(t)e^{f(t)}dt=3$
$g'(x)=f(x)e^{f(x)}$에서 $g'(1)=f(1)e^{f(1)}=0$
$\therefore\ f(1)=0$
따라서 $f(-1)=0$

$\int_{-1}^1 xf(x)f'(x)e^{f(x)}dx$
$=\int_{-1}^1 xf(x)\left(e^{f(x)}\right)'dx$
$=[xf(x)e^{f(x)}]_{-1}^1-\int_{-1}^1 (f(x)+xf'(x))e^{f(x)}dx$
[에서 $f(1)=f(-1)=0$이므로]
$=-\int_{-1}^1 (f(x)+xf'(x))e^{f(x)}dx$
$=-\int_{-1}^1 \{f(x)e^{f(x)}+xf'(x)e^{f(x)}\}dx$
$=-\left\{\int_{-1}^1 f(x)e^{f(x)}dx+\int_{-1}^1 xf'(x)e^{f(x)}dx\right\}$
$=-\left\{\int_{-1}^0 f(x)e^{f(x)}dx+\int_0^1 f(x)e^{g(x)}+\int_{-1}^1 xf'(x)e^{f(x)}dx\right\}$
$=-\left\{\int_{-1}^0 f(x)e^{f(x)}dx+g(1)+\int_{-1}^1 xf'(x)e^{f(x)}dx\right\}$
$=-\int_{-1}^0 f(x)e^{f(x)}dx-3-\int_{-1}^1 xf'(x)e^{f(x)}dx$
[에서 $g(1)=\int_0^1 f(x)e^{f(x)}dx=3$
$\int_{-1}^0 f(x)e^{f(x)}dx$의 $x=-s$을 대입하면
$\int_1^0 f(-s)e^{f(-s)}(-ds)$
$=\int_0^1 f(-s)e^{f(-s)}ds$
$=\int_0^1 f(s)e^{f(s)}ds$
$=g(1)=3$ 이므로]

$=-6-\int_{-1}^1 xf'(x)e^{f(x)}dx$
$=-6-[xe^{f(x)}]_{-1}^1+\int_{-1}^1 e^{f(x)}dx$
$=-6-e^{f(1)}-e^{f(-1)}+2\int_0^1 e^{f(x)}dx$ $(\because f(1)=f(-1)=0)$
$=-8+2\times 1=-6$

3) 정답
[풀이 : 황보백]

여사건의 확률을 이용하자.
시행을 3번 했을 때, 6개의 접시 위에 쿠키가 없는 접시가 있을 확률을 구해보자.
(i) 이웃한 세 접시의 숫자만 주사위에서 나오는 경우
$(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, $\cdots$, $(6, 1, 2)$로 6가지이다.
일어날 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$
따라서 $6\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$
(ii) 이웃한 두 접시의 숫자만 주사위에서 나오는 경우
$(1, 2)$, $(2, 3)$, $\cdots$, $(6, 1)$로 6가지이다.
일어날 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^3$
따라서 $6\times\frac{1}{27}=\frac{2}{9}$
(i)의 경우에 (ii)가 중복되므로

$\frac{3}{4}-\frac{2}{9}=\frac{27-8}{36}=\frac{19}{36}$

따라서 구하려는 확률은 $1-\frac{19}{36}=\frac{17}{36}$ 이다.

[랑데뷰팁]
한 접시에 있는 숫자만 3번 나타나는 경우는 (i), (ii)에 모두 포함되므로 중복되는 경우를 제외할 때 따로 생각하지 않아도 된다.

[다른 풀이]
(i) 한 접시의 숫자만 주사위에서 나오는 경우
(1), (2), ⋯, (6)로 6가지이다.

일어날 확률은 $\left(\frac{1}{6}\right)^3$

따라서 $6\times\frac{1}{216}=\frac{1}{36}$

(ii) 이웃한 두 접시의 숫자만 주사위에서 나오는 경우
(1, 2), (2, 3), ⋯, (6, 1)로 6가지이다.

일어날 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

따라서 $6\times\frac{1}{27}=\frac{2}{9}$

(i)과 중복되는 경우가 2가지씩 있으므로

$\frac{2}{9}-2\times\frac{1}{36}=\frac{1}{6}$

(iii) 이웃한 세 접시의 숫자만 주사위에서 나오는 경우
(1, 2, 3), (2, 3, 4), ⋯, (6, 1, 2)로 6가지이다.

일어날 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

따라서 $6\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

(i), (ii)과 중복되는 경우가 각각 2가지, 3가지씩 있으므로

$\frac{3}{4}-2\times\frac{1}{6}-3\times\frac{1}{36}=\frac{27-12-3}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

(i), (ii), (iii)에서

$\frac{1}{36}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{19}{36}$

따라서 구하려는 확률은 $1-\frac{19}{36}=\frac{17}{36}$

4) 정답 ④
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

여사건의 확률을 이용하자.
(1) 시행을 3번 했을 때, 원탁의 6개의 접시 위에 사과가 없는 접시가 있을 확률을 구해보자.
(i) 이웃한 세 접시의 숫자만 주사위에서 나오는 경우
(1, 2, 3), (2, 3, 4), ⋯, (6, 1, 2)로 6가지이다.

일어날 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

따라서 $6\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

(ii) 이웃한 두 접시의 숫자만 주사위에서 나오는 경우
(1, 2), (2, 3), ⋯, (6, 1)로 6가지이다.

일어날 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

따라서 $6\times\frac{1}{27}=\frac{2}{9}$

(i)의 경우에 (ii)가 중복되므로

$\frac{3}{4}-\frac{2}{9}=\frac{27-8}{36}=\frac{19}{36}$

따라서 구하려는 확률은 $1-\frac{19}{36}=\frac{17}{36}$ 이다.

[랑데뷰팁]
한 접시에 있는 숫자만 3번 나타나는 경우는 (i), (ii)에 모두 포함되므로 중복되는 경우를 제외할 때 따로 생각하지 않아도 된다.

(2) 시행을 3번 했을 때, 정사각형 탁자의 4개의 접시 위에 배가 없는 접시가 있을 확률을 구해보자.
(i) 이웃한 한 접시의 숫자만 주사위에서 나오는 경우
(1), (2), (3), (4)로 4가지이다.

일어날 확률은 $\left(\frac{1}{4}\right)^3$

따라서 $4\times\frac{1}{64}=\frac{1}{16}$

그러므로 구하려는 확률은 $1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

(1), (2)에서 $\frac{17}{36}\times\frac{15}{16}=\frac{85}{192}$

(1)의
[다른 풀이]
(i) 한 접시의 숫자만 주사위에서 나오는 경우
(1), (2), ⋯, (6)로 6가지이다.

일어날 확률은 $\left(\frac{1}{6}\right)^3$

따라서 $6\times\frac{1}{216}=\frac{1}{36}$

(ii) 이웃한 두 접시의 숫자만 주사위에서 나오는 경우
(1, 2), (2, 3), ⋯, (6, 1)로 6가지이다.

일어날 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

따라서 $6\times\frac{1}{27}=\frac{2}{9}$

(i)과 중복되는 경우가 2가지씩 있으므로

$\frac{2}{9}-2\times\frac{1}{36}=\frac{1}{6}$

(iii) 이웃한 세 접시의 숫자만 주사위에서 나오는 경우
$(1,\,2,\,3)$, $(2,\,3,\,4)$, $\cdots$, $(6,\,1,\,2)$로 6가지이다.

일어날 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

따라서 $6\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

(i), (ii)과 중복되는 경우가 각각 2가지, 3가지씩 있으므로

$\frac{3}{4}-2\times\frac{1}{6}-3\times\frac{1}{36}=\frac{27-12-3}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

(i), (ii), (iii)에서

$\frac{1}{36}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{19}{36}$

따라서 구하려는 확률은 $1-\frac{19}{36}=\frac{17}{36}$

5) 정답 ②

[풀이 : 황보백]

함수 $f(x)$의 그래프에 대해 알아보자.
$0<x<4$에서 역함수 $g(x)$의 그래프 개형을 파악하기 위해서는 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점부터 구해보자.

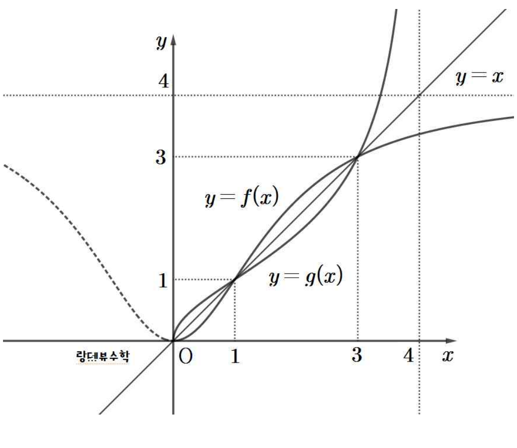
$\frac{4x^2}{x^2+3}=x\rightarrow 4x=x^2+3\rightarrow (x-1)(x-3)=0$

$x=1$ 또는 $x=3$이다.
따라서 $y=f(x)$는 $(1,\,1)$, $(3,\,3)$을 지난다.

$f'(x)=\frac{24x}{(x^2+3)^2}>0$

$f''(x)=\frac{-72(x^2-1)}{(x^2+3)^3}\rightarrow f''(x)=0$의 해가 $x=1$이므로 $(1,\,1)$은 변곡점이다.

따라서 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $h(1)=f(1)-g(1)=0$ (참)

ㄴ. 두 양수 a, b $(a<b<4)$ 에 대하여 $\int_a^b h(x)dx$의 값이 최대일 때는 $f(x)>g(x)$의 범위가 $1<x<3$이므로 $a=1$, $b=3$이다.
따라서 $b-a=3-1=2$ (참)

ㄷ. $f'(x)$와 $f''(x)$에서 변곡점 $(1,\,1)$의
$x=1$에서 $f'(x)$의 값이 최대이고 $g'(x)$의 값이 최소이다.

$f'(x)=\frac{24x}{(x^2+3)^2}\rightarrow f'(1)=\frac{3}{2}$

$g'(1)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{2}{3}$이므로

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$의 최댓값은 $h'(1)=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$이다.(거짓)

6) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$f(x)=x+\cos x\rightarrow f'(x)=1-\sin x\geq 0$
이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이다.
$g(x)=x+\sin x\rightarrow g'(x)=1+\cos x\geq 0$
이므로 함수 $g(x)$는 증감함수이다.
따라서 두 함수는 모두 역함수 $f^{-1}(x)$와 $g^{-1}(x)$이 존재한다.

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 교점을 구해보자.
$x+\cos x=x+\sin x$의 해는
$\cos x=\sin x$

$x>0$에서 $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{5}{4}\pi$, $x=\frac{9\pi}{4}$, $\cdots$이다.

따라서 $x>0$에서 교점은

$\left(\frac{\pi}{4},\,\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{4}\pi,\,\frac{5}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{9}{4}\pi,\,\frac{9}{4}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\cdots$

따라서 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$에서

$f^{-1}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$, $g^{-1}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$이다.

따라서

ㄱ.

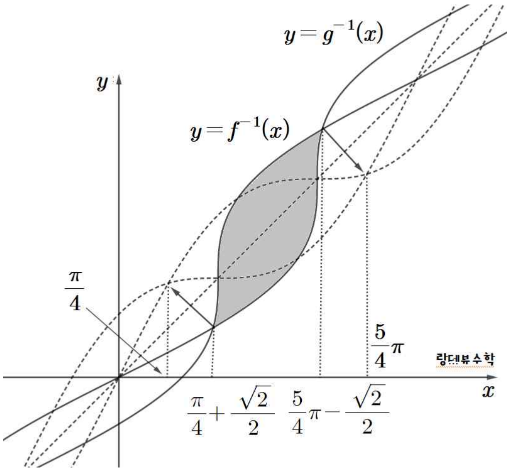
$$h\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f^{-1}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-g^{-1}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

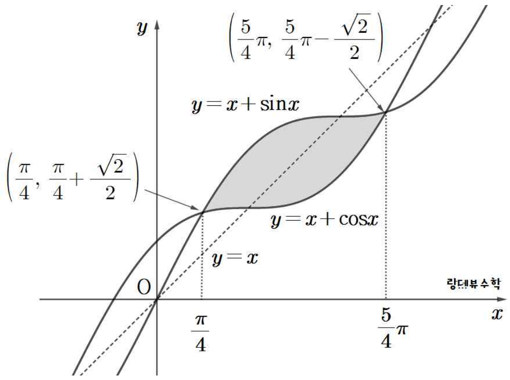
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=0\text{이다.}$$

ㄴ. 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2},\,\frac{5}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$에서 곡선 $y=h(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $x=\frac{\pi}{4}$와 $x=\frac{5}{4}\pi$, $y=x+\cos x$,

$y=x+\sin x$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

즉, $\left|\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{5}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}} f^{-1}(x)-g^{-1}(x)\,dx\right|=\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} f(x)-g(x)\,dx\right|$이다.





$$\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} f(x)-g(x)\,dx\right|$$

$$=\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \cos x-\sin x\,dx\right|$$

$$=\left|\left[\sin x+\cos x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\right|$$

$$=\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=2\sqrt{2}\ \text{(참)}$$

[다른 풀이]-sumath 서영만t

young's의 법칙[랑데뷰세미나 참고]에서

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\int_{f(x_1)}^{f(x_2)} f^{-1}(x)dx=x_2 f(x_2)-x_1 f(x_1)\cdots ㉠$$

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)dx+\int_{g(x_1)}^{g(x_2)} g^{-1}(x)dx=x_2 g(x_2)-x_1 g(x_1)\cdots ㉡$$

이 성립한다.

$\left|\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{5}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}} f^{-1}(x)-g^{-1}(x)\,dx\right|$에서

$x_2=\frac{5}{4}\pi$일 때, $f(x_2)=g(x_2)=\frac{5}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x_1=\frac{\pi}{4}$일 때, $f(x_1)=g(x_1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

㉠-㉡ 을 하면

$$\left|\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{5}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}} f^{-1}(x)-g^{-1}(x)\,dx\right|=\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} f(x)-g(x)\,dx\right|$$

임을 알 수 있다.

ㄷ.

$0<x<\frac{\pi}{4}$에서 $\cos x>\sin x$이므로 $x+\cos x>x+\sin x$이다.

즉, $f(x)>g(x)$

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi$에서 $\cos x<\sin x$이므로 $x+\cos x<x+\sin x$이다.

즉, $f(x)<g(x)$

따라서

$f(x)$와 $g(x)$의 교점 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 사이 범위에서는 $f(x)<g(x)$이므로

그 역함수 $f^{-1}(x)$와 $g^{-1}(x)$는 $f^{-1}(x)>g^{-1}(x)$이다.

따라서 $\int_a^b h(x)dx$는 $a=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{5}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 최댓값을 갖는다.

그런데 $\cos x$와 $\sin x$의 주기가 2π이므로

$\int_a^b h(x)dx=\int_{a+2\pi}^{b+2\pi} h(x)dx$가 성립한다.

즉,

$$\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{5}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}} f^{-1}(x)-g^{-1}(x)\,dx$$

$$=\int_{\frac{9}{4}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{13}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}} f^{-1}(x)-g^{-1}(x)\,dx$$

$$=\int_{\frac{17}{4}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{21}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}} f^{-1}(x)-g^{-1}(x)\,dx$$

$=\cdots$

이다.

또한 대칭성에 의해

$$\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{5}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}} f^{-1}(x)-g^{-1}(x)\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{13}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}} f^{-1}(x)-g^{-1}(x)\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{21}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}} f^{-1}(x)-g^{-1}(x)\,dx$$

$=\cdots$

등도 성립한다.

따라서

$\int_a^b h(x)dx$의 값이 최대일 때 $a+b$의 최솟값은

$a=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{5}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 이므로 $a+b\ge\frac{3}{2}\pi$ (참)

7) 정답 327

[풀이 : 황보백]

3의 배수	$f(3)\times f(6)$	$f(1)$, $f(2)$	$f(4)$, $f(5)$	경우의 수
3	1×3	${}_1H_2$	${}_3H_2$	$1\times6=6$
6	1×6	${}_1H_2$	${}_6H_2$	$1\times21=21$
	2×3	${}_2H_2$	${}_2H_2$	$3\times3=9$
9	3×3	${}_3H_2$	${}_1H_2$	$6\times1=6$
12	2×6	${}_2H_2$	${}_5H_2$	$3\times15=45$
	3×4	${}_3H_2$	${}_2H_2$	$6\times3=18$
15	3×5	${}_3H_2$	${}_3H_2$	$6\times6=36$
18	3×6	${}_3H_2$	${}_4H_2$	$6\times10=60$
24	4×6	${}_4H_2$	${}_3H_2$	$10\times6=60$
30	5×6	${}_5H_2$	${}_2H_2$	$15\times3=45$
36	6×6	${}_6H_2$	${}_1H_2$	$21\times1=21$
합계	327			

8) 정답 147

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

40미만 8의 배수	$f(3)\times f(6)$	$f(1)$, $f(2)$	$f(4)$, $f(5)$	$f(7)$, $f(8)$	경우의 수
8	1×8	${}_1H_2$	${}_8H_2$	${}_1H_2$	$1\times36\times1=36$
	2×4	${}_2H_2$	${}_3H_2$	${}_5H_2$	$3\times6\times15=270$
16	4×4	${}_4H_2$	${}_1H_2$	${}_5H_2$	$10\times1\times15=150$
	2×8	${}_2H_2$	${}_7H_2$	${}_1H_2$	$3\times28\times1=84$
24	3×8	${}_3H_2$	${}_6H_2$	${}_1H_2$	$6\times21\times1=126$
	4×6	${}_4H_2$	${}_3H_2$	${}_3H_2$	$10\times6\times6=360$
32	4×8	${}_4H_2$	${}_5H_2$	${}_1H_2$	$10\times15\times1=150$
합계	1176				

$a=1176$이므로 $\frac{a}{8}=\frac{1176}{8}=147$

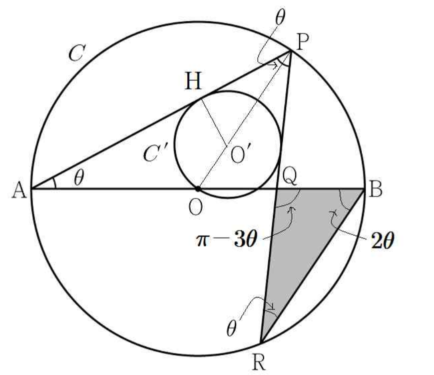
9) 정답 120

[풀이 : 황보백]

원 C'의 중심을 O′라 하면 점 O′는 직선 OP 위에 있고 점 O′에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 원 C'와 직선 AP의 만나는 접점이다.

두 선분 PA와 PQ는 원 C'에 접하므로 $\angle\mathrm{HPO'}=\theta$이다.

직각삼각형 PHO′에서 $\overline{\mathrm{O'H}}=r(\theta)$, $\overline{\mathrm{O'P}}=2-r(\theta)$이므로



$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{O'H}}}{\overline{\mathrm{PO'}}}=\frac{r(\theta)}{2-r(\theta)}$

$r(\theta)=2\sin\theta-r(\theta)\sin\theta$

$(1+\sin\theta)r(\theta)=2\sin\theta$

$r(\theta)=\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}\cdots$㉠

한편,

삼각형 PBR에서 $\angle\mathrm{RPB}=\frac{\pi}{2}-2\theta$이므로

$\frac{\overline{\mathrm{BR}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)}=4$에서 $\overline{\mathrm{BR}}=4\cos2\theta$

삼각형 BQR에서 $\angle\mathrm{RBQ}=2\theta$ ($\because\ \angle\mathrm{APR}=2\theta$)

$\angle\mathrm{RQB}=\pi-3\theta$, $\angle\mathrm{BRQ}=\theta$이므로

$\frac{\overline{\mathrm{RQ}}}{\sin2\theta}=\frac{\overline{\mathrm{BR}}}{\sin(\pi-3\theta)}$이 성립한다.

즉, $\overline{\mathrm{RQ}}=4\cos2\theta\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}$

그러므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BR}}\times\overline{\mathrm{RQ}}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times4\cos2\theta\times4\cos2\theta\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}\sin\theta$

$\lim\limits_{\theta\to+}\frac{S(\theta)}{r(\theta)}$

$=\lim\limits_{\theta\to+}\frac{=\frac{1}{2}\times4\cos2\theta\times4\cos2\theta\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta}\sin\theta}{\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\frac{8}{3}$

$a=\frac{8}{3}$이므로 $45a=15\times8=120$

10) 정답 24

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

직각삼각형 ARB에서 $\angle\mathrm{ABR}=\frac{\pi}{2}-2\theta$이므로

사인법칙에서

$\dfrac{\overline{\mathrm{AR}}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)}=2 \rightarrow \overline{\mathrm{AR}}=2\cos 2\theta$

삼각형 ARQ에서 $\angle\mathrm{AQR}=\pi-3\theta$이므로

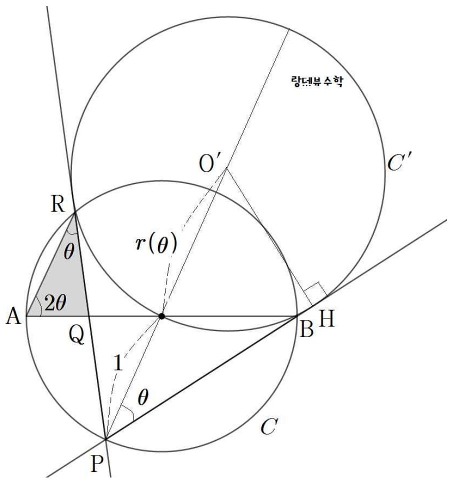
$\dfrac{2\cos 2\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\sin\theta} \rightarrow \overline{\mathrm{AQ}}=2\cos 2\theta\dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$

따라서 삼각형 AQR의 넓이는

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AR}}\times\overline{\mathrm{AQ}}\times\sin 2\theta$

$=\dfrac{1}{2}(2\cos 2\theta)\left(2\cos 2\theta\dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)\sin 2\theta$

원 C'의 중심을 O′라 하자.



O′에서 직선 PB에 내린 수선의 발을 H라 하면

직각삼각형 O′AH에서

$\angle\mathrm{O'PB}=\theta,\ \overline{\mathrm{PO'}}=1+r(\theta),\ \overline{\mathrm{O'H}}=r(\theta)$

따라서 $\sin\theta=\dfrac{r(\theta)}{1+r(\theta)}$

$r(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{1-\sin\theta}$

$\lim\limits_{\theta\to+}\dfrac{S(\theta)}{r(\theta)}$

$=\lim\limits_{\theta\to+}\dfrac{\dfrac{1}{2}(2\cos 2\theta)\left(2\cos 2\theta\dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)\sin 2\theta}{\dfrac{\sin\theta}{1-\sin\theta}}$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{2}{3}\times 2$

$=\dfrac{4}{3}$

$a=\dfrac{4}{3}$이므로

$18a=24$

11) 정답

함수 $f(x)$는 주기가 4이고

$f(1)=f(5)=f(9)=1,\quad f(3)=f(7)=f(11)=-1, f(2k)=0\quad (k$는 정수)이다.

또한 $f'(x)=\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x=0$에서 $f'(2k-1)=0\ \ (k$는 정수)

$g(x)=e^{af(x)}+bf(x)\ \ (0<x<12)$에서

$g'(x)=ae^{af(x)}f'(x)+bf'(x)=f'(x)\{ae^{af(x)}+b\}$

$g'(x)=0$의 해는 $f'(x)=0$ 또는 $ae^{af(x)}+b=0$의 해이다.…㉠

$f'(x)=0$의 해는 $x=2k-1$이고

(가) 조건에 의해 $\alpha_1=1,\ \ \alpha_3=3,\ \ \alpha_5=5,\ \ \alpha_7=7,\ \ \alpha_9=9,\ \ \alpha_{11}=11$이다.

(나) 조건에 의해 $g'(\alpha_2)=0$이라면 $g(\alpha_2)=0$이다.

$ae^{af(\alpha_2)}+b=0$이고, $e^{af(\alpha_2)}+bf(\alpha_2)=0$

따라서 $e^{af(\alpha_2)}-f(\alpha_2)ae^{af(\alpha_2)}=0$에서

$(1-af(\alpha_2))e^{af(\alpha_2)}=0$이므로 $f(\alpha_2)=\dfrac{1}{a}$이다.…㉠

$e^{af(\alpha_2)}+bf(\alpha_2)=0$에 대입하면 $e+\dfrac{b}{a}=0$

$b=-ae$이다.

$g(x)=e^{a\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}-ae\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\ \ (0<x<12)$

$g(1)=e^{a}-ae$

$g(3)=e^{-a}+ae$

$g(1)+g(3)=e^{a}+e^{-a}=e^{3}+e^{-3}$에서

$a=3,\ b=-3e$ 또는 $a=-3,\ b=3e$이다.

한편, $\alpha_1=1,\ \alpha_3=3$이고

$f(1)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1,\ f(3)=\sin\dfrac{3}{2}\pi=-1$이므로

$f(\alpha_2)=\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha_2<0$이다.

따라서 $a=-3,\ b=3e$이다.

$g(x)=e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\dfrac{\pi}{2}x$이므로

㉠에서 $f(\alpha_4)=-\dfrac{1}{3}$이므로 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\alpha_4\right)=-\dfrac{1}{3}$

$12\pi\displaystyle\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}g(x)\cos\dfrac{\pi}{2}x\,dx=12\pi\int_{3}^{\alpha_4}\left\{\left(e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\dfrac{\pi}{2}x\right)\cos\dfrac{\pi}{2}x\right\}dx$

에서 $3\sin\dfrac{\pi}{2}x=t$라 두면

$x:3\rightarrow\alpha_4,\ t:-3\rightarrow-1$

$\dfrac{3}{2}\pi\cos\dfrac{\pi}{2}x\,dx=dt$에서 $\cos\dfrac{\pi}{2}x\,dx=\dfrac{2}{3\pi}dt$이므로

$=8\displaystyle\int_{-3}^{-1}(e^{-t}+et)dt=8e^{3}-40e$

$p=8,\ q=-40$이므로

$p-q=48$

[랑데뷰팁]

$a=3,\ b=-3e$일 때

$g(x)=e^{3\sin\frac{\pi}{2}x}-3e\sin\frac{\pi}{2}x$이므로

㉠에서 $f(\alpha_4)=\frac{1}{3}$이므로 $\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha_4\right)=\frac{1}{3}$

$m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} g(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$

$=12\pi\int_{3}^{\alpha_4}\left\{\left(e^{3\sin\frac{\pi}{2}x}-3e\sin\frac{\pi}{2}x\right)\cos\frac{\pi}{2}x\right\}dx$

에서 $3\sin\frac{\pi}{2}x=t$라 두면

$x:3\to\alpha_4,\ t:-3\to1$

$\frac{3}{2}\pi\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=dt$에서 $\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=\frac{2}{3\pi}dt$이므로

$=8\int_{-3}^{1}(e^t-et)dt=8\left(5e-\frac{1}{e^3}\right)$ (모순)

12) 정답 8

$g(x)=a\ln(f(x)+c)+bf(x)$

$g'(x)=\frac{af'(x)}{f(x)+c}+bf'(x)$

$\quad=f'(x)\left(\frac{a}{f(x)+c}+b\right)$

$g'(x)=0$의 해는 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)+c=-\frac{a}{b}$

$f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$에서 $f'(x)=-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$이고

$f'(x)=0$의 해는 $x=2n$이고 조건 (가)에서 $f(2n-1)+c=-\frac{a}{b}$이다.

($2n$은 짝수, $2n-1$은 홀수이다.→n이 자연수일 때만 생각해도 된다.)

한편, $f(2n-1)=\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}=0$이므로 $c=-\frac{a}{b}$이다.

따라서 $b=-\frac{a}{c}$이고 $a>0,\ c>1$이므로 $b<0$이다.

따라서

$g(x)=a\ln\left(f(x)-\frac{a}{b}\right)+bf(x)$

$g'(x)=f'(x)\left(\frac{a}{f(x)+c}+b\right)$

$=f'(x)\left(\frac{a}{f(x)-\frac{a}{b}}+b\right)$

$=bf'(x)\left(\frac{a}{bf(x)-a}+1\right)$

$=-\frac{\pi}{2}b\sin\frac{\pi}{2}x\left(\frac{a}{b\cos\frac{\pi}{2}x-a}+1\right)$

$\cdots=g'(1)=g'(2)=g'(3)=g'(4)=\cdots=0$이고

(i) $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}b\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}b-a}+1\right)>0$

→ 왜냐하면 $b<0$이므로 $\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}b-a}>-1$

따라서 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=$(양수)$\times$(양수)$>0$

(ii) $x=\frac{3}{2}$을 대입하면

$g'\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}b\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{a}{-\frac{\sqrt{2}}{2}b-a}+1\right)<0$

→ 왜냐하면 $b<0$이므로 $\frac{a}{-\frac{\sqrt{2}}{2}b-a}<-1$이다.

따라서 $g'\left(\frac{3}{2}\right)=$(양수)$\times$(음수)$<0$

(i), (ii)와 같은 방법으로 증감표를 작성해 보면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗		↘		↗		↘		↗		↘

따라서

$\sin\frac{(2n-1)}{2}\pi=0,\ \cos\frac{4n-2}{2}\pi=\cos\frac{4n}{2}\pi=0$

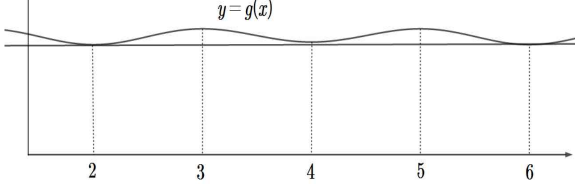
$\sin\frac{4n-2}{2}\pi=-1,\ \sin\frac{4n}{2}\pi=1$

함수 $g(x)$는 $x=2n-1$에서 극대, $x=4n-2$와 $x=4n$에서 극솟값을 갖는다.

$f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$에서 $f(2n-1)=0,\ f(4n-2)=-1,\ f(4n)=1$

⇨ $g(x)=a\ln(f(x)+c)+bf(x)$의 극댓값은 하나의 값이고 극솟값은 다른 두 값으로 나타난다.

그래프 개형은 다음과 같다.



(나)에서 극댓값이 $2a$이므로

$g(2n-1)=a\ln\left(f(2n-1)-\frac{a}{b}\right)+bf(2n-1)$이고

$f(2n-1)=\sin\frac{2n-1}{2}\pi=0$이므로

$a\ln\left(-\frac{a}{b}\right)=2a$에서 $\ln\left(-\frac{a}{b}\right)=2$

$c=-\frac{a}{b}=e^2$

$b=-\frac{a}{e^2}$

그러므로

$g(x)=a\ln\left(f(x)+e^2\right)-\frac{a}{e^2}f(x)$

조건 (나)에서 두 극솟값의 합은

$g(4n-2)+g(4n)=4\ln\left(e^4-1\right)$이다.

$f(4n-2)=-1\rightarrow\ g(4n-2)=a\ln\left(-1+e^2\right)+\frac{a}{e^2}$

$f(4n)=1$이므로 $g(4n)=a\ln\left(1+e^2\right)-\frac{a}{e^2}$

두 극솟값의 합은

$g(4n-2)+g(4n)=4\ln\left(e^4-1\right)=a\ln\left(e^4-1\right)$

따라서 $a=4,\ b=-\frac{4}{e^2},\ c=e^2$

$g(x)=4\ln\left(\cos\frac{\pi}{2}x+e^2\right)-\frac{4}{e^2}\cos\frac{\pi}{2}x$

$g\left(\frac{bc}{a}\right)=g(-1)=4\ln e^2=8$