

제 2 교시

수리 영역(가형)

홀수형

5지선다형

1. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 에 대하여, 행렬 $(A+B)(A-B)$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 2
- ② 4
- ③ 6
- ④ 8
- ⑤ 10

2. 일차변환 $f : (x, y) \rightarrow (x+ay, 2x+y)$ 에 의하여, 점 $(1, 2)$ 가 점 $(3, b)$ 로 옮겨질 때, $a+b$ 의 값은? [2점]

- ① 5
- ② $\frac{9}{2}$
- ③ 4
- ④ $\frac{7}{2}$
- ⑤ 3

3. 확률변수 X 가 이항분포 $B(100, p)$ 를 따르고 X 의 표준편차가 5일 때, X 의 평균은? [2점]

- ① 10
- ② 20
- ③ 25
- ④ 40
- ⑤ 50

4. 함수 $f(x) = \begin{cases} ae^x & (x < 1) \\ x^2 - x + b & (x \geq 1) \end{cases}$ 가 모든 실수 x 에서 미분 가능할 때, 두 상수 a, b 의 곱은? [3점]

- ① $\frac{1}{2e}$
- ② $\frac{1}{e}$
- ③ $\frac{2}{e}$
- ④ $\frac{e}{2}$
- ⑤ e

5. 두 자연수 $a, b(a < b)$ 에 대하여 세 집합 A, B, C 가 다음과 같다.

$$A = \{x \mid \frac{1}{x-2a} + \frac{1}{x-2b} \leq 0\}$$

$$B = \{x \mid \frac{1}{x-2a-2b} - \frac{1}{x} \leq 0\}$$

$$C = \{x \mid x \text{는 자연수}\}$$

$n(A \cap C) = 5$ 일 때, $n(B \cap C)$ 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

6. 진공에서 운동하는 입자의 질량 m , 경과시간 t 와 파장 λ 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

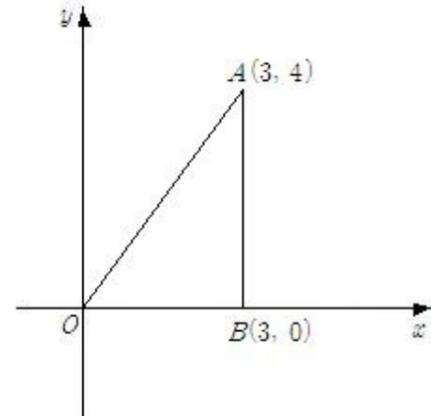
$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} m^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{8}}$$

질량이 각각 $12, 3\sqrt{2}$ 인 두 입자 A, B 에 대하여, 경과시간이 0.15 일 때, 입자 A 의 파장을 λ_A , 경과시간이 1.2 일 때, 입자 B 의 파장을 λ_B 라 하자. $\frac{\lambda_A}{\lambda_B}$ 의 값은? [3점]

- ① $2^{-\frac{9}{8}}$ ② $2^{-\frac{3}{2}}$ ③ $2^{-\frac{15}{8}}$ ④ $2^{-\frac{9}{4}}$ ⑤ $2^{-\frac{21}{8}}$

7. 좌표평면 위에 세 점 $O(0, 0), A(3, 4), B(3, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 가, 원점 O 를 중심으로 하는 회전변환 f 와 닮음변환 g 의 합성변환 $f \circ g$ 에 의하여 직선 $x=6$ 과 만나도록 이동한다. 일차변환 g 를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합을 k 라 할 때, k 의 최솟값은? [3점]

- ① $\frac{12}{5}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ 3 ⑤ 4



8. 어느 학교 축제에 모인 사람들 중, n 명을 임의로 추출하여, 모자를 착용하고 있는 사람들의 비율 \hat{p} 을 측정하였다. 모비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $0.1608 \leq p \leq 0.2392$ 일 때, 임의로 추출한 사람들 중, 모자를 착용하고 있었던 인원은? (단, Z 가 표준정규분포를 따를 때, $P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.4750$ 이다.) [3점]

- ① 5 ② 20 ③ 45 ④ 80 ⑤ 125

9. 함수 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 에 대하여, $\int_1^4 |f'(x)| dx$ 의 값은? [3점]

- ① $2\ln 2 - \frac{e}{2}$ ② $\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2e}$ ③ $\frac{1}{e} - \frac{1}{4} \ln 2$
 ④ $\ln 2 - \frac{1}{e}$ ⑤ $\frac{2}{e} - \frac{\ln 2}{2}$

10. 연속확률변수 X 의 확률밀도함수가

$$f(x) = ax(0 \leq x \leq b)$$

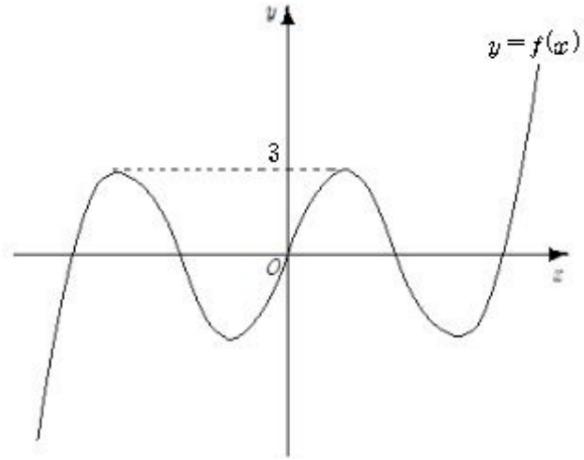
일 때, X 의 평균을 m , 표준편차를 σ 라 하자. $\frac{m}{\sigma}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

11. 좌표평면 위에 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 과 두 초점 F, F' 을 지름으로 하는 원이 있다. 쌍곡선과 원의 교점들 중 하나를 P 라 할 때, 삼각형 $PF F'$ 의 넓이는? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

12. 서로 다른 두 점에서 각각 극댓값 3을 갖고 원점대칭인 오차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



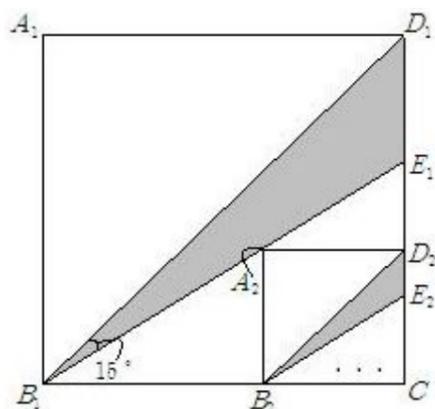
방정식 $\sqrt{-4f(x)+13} = f(|x|)+2$ 의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

13. 양의 실수 a, b 에 대하여 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ 가 있다. 행렬 A 의 모든 성분의 곱이 행렬 A^{-1} 의 모든 성분의 곱과 같을 때, $2\log a + 4\log b$ 의 최댓값은? [3점]

- ① $2\log 2 - 3\log 3$ ② $\log 2 - \log 3$
- ③ $3\log 2 - 2\log 3$ ④ $\log 3 - \log 2$
- ⑤ $3\log 2 - \log 3$

14. 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1CD_1$ 이 있다. 그림과 같이 선분 CD_1 위에 $\angle D_1B_1E_1 = 15^\circ$ 가 되도록 한 점 E_1 을 정한다. 삼각형 $B_1D_1E_1$ 의 넓이를 S_1 이라 하자. 정사각형 $A_2B_2CD_2$ 의 네 꼭짓점이 그림과 같이 삼각형 B_1CE_1 의 각 변에 포함되도록 세 점 A_2, B_2, D_2 를 정한다. 선분 CD_2 위에 $\angle D_2B_2E_2 = 15^\circ$ 가 되도록 한 점 E_2 을 정한다. 삼각형 $B_2D_2E_2$ 의 넓이를 S_2 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$
- ④ $\frac{5-\sqrt{5}}{4}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

15. 이차정사각행렬 X 에 대하여 함수 $f(X)$ 를 X 의 모든 성분의 합이라 하자. 집합 S 가 $S = \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 00 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 00 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$ 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ 두 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 $f(A+B) = f(A) + f(B)$

ㄴ 집합 S 에 속하는 행렬 중에서 중복을 허락하여 m 개의 행렬 A_1, A_2, \dots, A_m 을 선택하였을 때,
 $f(A_1 A_2 \dots A_m) = f(A_m)$

ㄷ 집합 S 에 속하는 행렬 중에서 중복을 허락하여 n 개의 행렬 A_1, A_2, \dots, A_n 을 선택하였을 때,
 $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix}$ 를 만족시키는 두 홀수 n, k 가 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 좌표평면에서 점 F 를 초점으로 하는 포물선 $y^2 = 4x$ 가 있다. 점 Q 가 이 포물선 위의 모든 점을 지날 때, 벡터 $\frac{3\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OQ}}{|3\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OQ}|} = \overrightarrow{OA}$ 의 종점 A 가 나타내는 도형의 길이는? [4점]

- ① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
 ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}\pi$

17. ○○○아파트 경비실 직원 A는 단지 안에서 불법 주차 차량 단속을 위해 스티커 10장을 제작하였다. 6월 1일 0시부터 동료 직원 B에게 불법 주차 차량에 스티커를 한 장씩 붙이도록 하고, 매일 0시에 남은 스티커의 개수를 확인하였더니, 3일 후인 6월 4일 0시에 처음으로 스티커 10장을 모두 사용하여 남는 것이 없었다. 이 때, 6월 2일 하루 동안 적발 된 불법 주차 차량이 존재하였을 확률은? [4점]

- ① $\frac{9}{11}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{5}{7}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

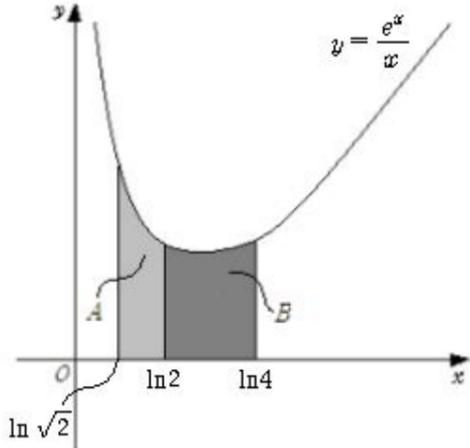
18. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 3$ 이고, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 에 대하여, $(n-2)(S_{n-1}-1) + na_n = 0$ ($n \geq 2$)을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정의 일부이다.

주어진 식을 전개하면,
 $nS_{n-1} - 2S_{n-1} - n + 2 + na_n = 0$
 이다. $a_n = S_n - S_{n-1}$ 을 대입하여 정리하면,
 $S_n - 1 = \boxed{\text{(가)}} \cdot (S_{n-1} - 1)$
 $b_n = S_n - 1$ 이라 하고 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하면,
 $b_n = \boxed{\text{(나)}} \cdot 2^n$
 따라서 $a_n = b_n \cdot \boxed{\text{(다)}}$ ($n \geq 2$)

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$, (다)에 알맞은 식을 $h(n)$ 이라 할 때, $\frac{f(10)}{g(5)h(8)}$ 의 값은? [4점]

- ① -12 ② -10 ③ -8 ④ -6 ⑤ -4

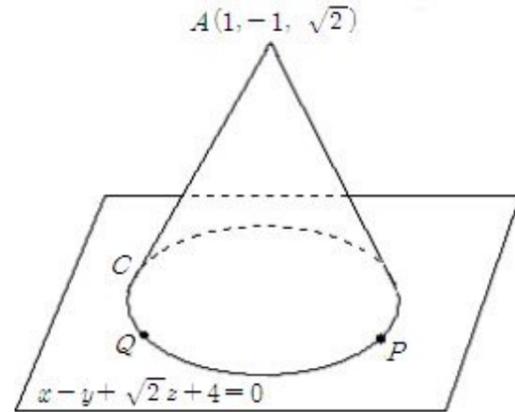
19. 그림과 같이 곡선 $y = \frac{e^x}{x}$ 가 세 직선 x 축, $x = \ln \sqrt{2}$, $x = \ln 2$ 로 둘러싸인 부분을 A , 곡선 $y = \frac{e^x}{x}$ 가 세 직선 x 축, $x = \ln 2$, $x = \ln 4$ 로 둘러싸인 부분을 B 라 하자.



A 를 x 축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 B 의 넓이 s 로 나타낸 것은? [4점]

- ① $\frac{s^2}{4}\pi$
- ② $\frac{s^2}{2}\pi$
- ③ $s^2\pi$
- ④ $s\pi$
- ⑤ $2s\pi$

20. 그림과 같이 좌표공간에 반지름의 길이가 3이고 평면 $x - y + \sqrt{2}z + 4 = 0$ 위에 있는 원 C 를 밑면으로 하고 점 $A(1, -1, \sqrt{2})$ 를 꼭짓점으로 하는 직원뿔이 있다. C 위의 두 점 P, Q 에 대하여, 두 벡터 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ 의 내적 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 최솟값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]



- ① -8
- ② -5
- ③ -2
- ④ 1
- ⑤ 4

21. 실수 전체에서 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하는 삼차함수 $f(x) = 2x^3 + kx + 4$ ($k \neq 0$)에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ $(f^{-1})'(4) = \frac{1}{k}$

ㄴ 점 $(4, 0)$ 은 곡선 $y = f^{-1}(x)$ 의 변곡점이다.

ㄷ 두 곡선 $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ 가 제 1사분면에서 만나도록 하는 k 는 없다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 함수 $f(x)$ 가 $\int_a^x f(t)dt = \ln(x+a)$ (a 는 상수)를 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

23. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여, $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n a_n - 3)$ 이 수렴할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12a_n + 3^{-n}}{a_n - 2^{-n}}$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 좌표공간에서 평면 $2x+3y-z=4$ 위의 한 점 $P(a, b, c)$ 를 x 축에 대하여 대칭 이동한 점을 Q 라 하자. 점 Q 가 직선 $\frac{x-1}{2}=y+2=\frac{-z}{2}$ 위에 있을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 어떤 실수 x 에 대하여, 5개의 수 $a, 3\sin 2x, 3\tan x, 5\sin x, b$ (a 와 b 는 상수)가 순서대로 공차가 0이 아닌 등차수열을 이룰 때, $(a+b)^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 다항함수 $f(x)$ 와 그 합성함수 $g(x)=f(f(x))$ 가 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x^6 f(x)} = -1, \lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ 를 만족시킨다. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$ 에서의 접선의 방정식이 $y=18x-k$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하시오. [4점]

27. 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 O 이고 두 점

$A(-1, 0), B(1, 0)$ 를 지름으로 하는 원 위에 있다. 점 B 를 지나고

기울기가 $\tan\theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ 인 직선을 l_1 이라 하자. l_1 과 수직이고

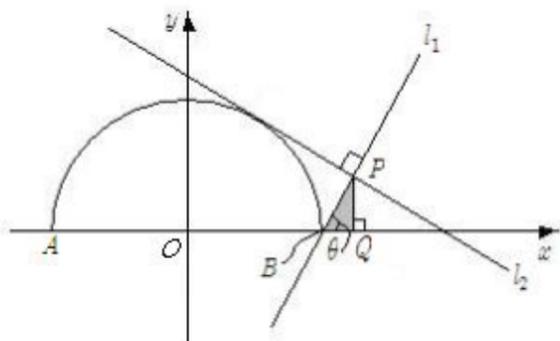
원과 제 1사분면 위의 한 점에서 접하는 직선을 l_2 라 하자. 두 직선

l_1, l_2 의 교점을 P , 점 P 에서 x 축 위에 내린 수선의 발을 Q 라

하고, 삼각형 PBQ 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta^5} = \frac{q}{p}$ 일 때,

$p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]



28. 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 의 시각 t 에서의 위치가

$$\begin{cases} x = \sin t - 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases} \quad (\text{단, } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}) \text{이다.}$$

점 P 의 속력이 최대일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 a 이다. $15a$ 의 값을

구하시오. [4점]

29. 좌표공간에 밑면이 xy 평면 위에 있고 높이가 2인 원기둥과, xy 평면 위에 있는 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 이 있다. 타원의 두 초점을 F, F' 라 하자. 다음 조건을 만족하도록 점 P 를 잡는다.

- (가) 점 P 에서 xy 평면 위에 내린 수선의 발 H 가 타원 위에 있다.
- (나) 점 P 에서 xy 평면까지 거리와 타원의 장축까지 거리는 각각 $\sqrt{3}, 2$ 이다.
- (다) 세 직선 PF, PF', FF' 는 각각 원기둥과 한 점에서 만난다.

원기둥이 삼각형 PPF' 에 의하여 잘린 단면의 넓이는 $k\pi$ 이다. $100k$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 자연수 a, b 에 대하여 두 곡선 $y - a = 2^x, by = 2^x$ 가 있다. 곡선 $y - a = 2^x$ 위에 임의로 한 점을 잡고, P 라 하자. 점 P 에서 y 축의 음의 방향으로 a 만큼 이동한 점을 Q 라 하자. 점 Q 를 지나고, x 축과 평행한 직선이 곡선 $by = 2^x$ 와 만나는 점을 R 이라 하자. 두 점 P, R 의 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수일 때, 다음 조건을 만족시키는 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오. 예를 들어, $a = 6, b = 16$ 은 다음 조건을 만족시킨다. [4점]

- (가) $2 \leq a \leq 100, 2 \leq b \leq 100$
- (나) 선분 PR 을 내분하면서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은 오직 하나만 존재한다.