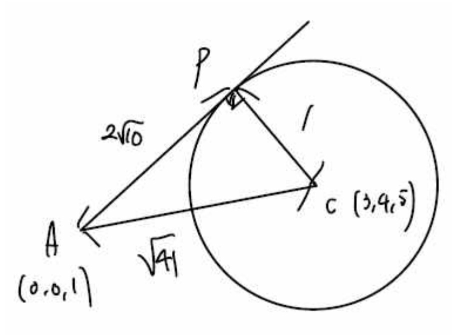
22학년도 예비시행 기하 30번

좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$을 지나는 직선이 중심이 $\mathrm{C}(3,\ 4,\ 5)$이고 반지름의 길이가 1인 구와 한 점 P에서만 만난다. 세 점 A, C, P를 지나는 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\frac{q}{p}\sqrt{41}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22학년도 평가원 예비수능 30번

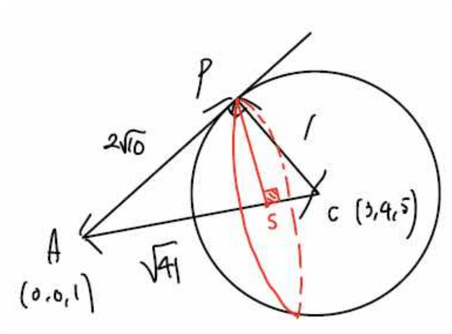
1. $\overline{\mathrm{AP}}$는 구와 접하므로 세 점 A, P, C의 위치 관계는 아래와 같다.



$\triangle \mathrm{ACP}$는 직각삼각형이므로 세 점 A, P, C를 지나는 원의 외심은 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점이다.

따라서 원의 넓이는 $\pi \cdot \left(\dfrac{\sqrt{41}}{2}\right)^2 = \dfrac{41}{4}\pi$이다.

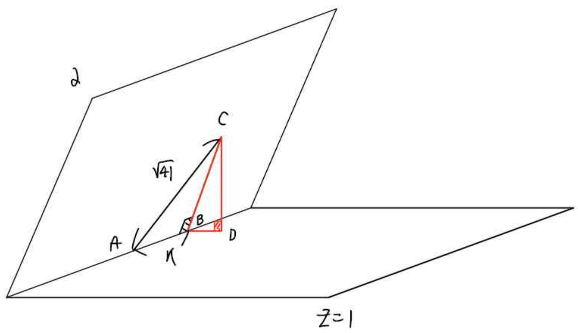
2. 세 점 A, P, C를 지나는 원을 포함한 평면을 평면 α라 하자.
정사영의 넓이가 최대려면 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기가 최소여야 한다.



점 P에서 $\overline{\mathrm{AC}}$에 내린 수선의 발을 점 S라 하자. **점 P의 자취는 중심이 S이고 $\overline{\mathrm{AC}}$에 수직인 원이다.** **따라서 $\overline{\mathrm{AC}}$를 포함한다면 어떠한 평면이라도 평면 α가 될 수 있다.**

평면 APC와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하자.
이면각의 정의를 쓰기 위해서는 두 평면의 교선이 필요하다. xy평면을 평면 $z=1$로 평행이동시키자.
점 A는 평면 $z=1$위의 점이므로 평면 α와 평면 $z=1$의 교선은 점 A를 포함한다.

평면 APC와 평면 $z=1$의 이면각을 구하자.



점 C에서 평면 $z=1$에 내린 수선의 발을 D, 두 평면의 교선에 내린 수선의 발을 B라 하자.
$\overline{\mathrm{AB}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{41}$이므로 $\overline{\mathrm{CB}}=\sqrt{41-k^2}$이다. $\overline{\mathrm{CD}}=4$이므로 $\sin\theta=\dfrac{4}{\sqrt{41-k^2}}$이다.

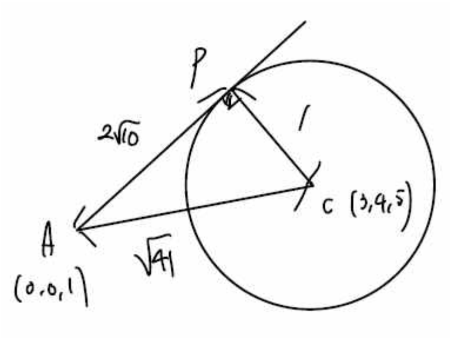
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 k값이 커지면 $\sin\theta$의 값이 커지고, 그에 따라 $\cos\theta$의 값은 작아지므로

$k=0$일 때 $\cos\theta$는 최댓값 $\dfrac{5}{\sqrt{41}}$를 갖는다.

따라서 정사영 넓이의 최댓값은 $\dfrac{41}{4}\pi\times\dfrac{5}{\sqrt{41}}=\dfrac{5}{4}\sqrt{41}\pi$이다.
$p=4$, $q=5$이므로 $p+q=9$이다. **답은 9!!**

※ 공간벡터 회전을 이용한 풀이

1. $\overline{\mathrm{AP}}$는 구와 접하므로 세 점 A, P, C의 위치 관계는 아래와 같다.

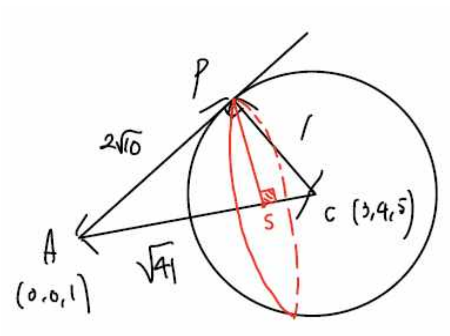


$\triangle\mathrm{ACP}$는 직각삼각형이므로 세 점 A, P, C를 지나는 원의 외심은 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점이다.

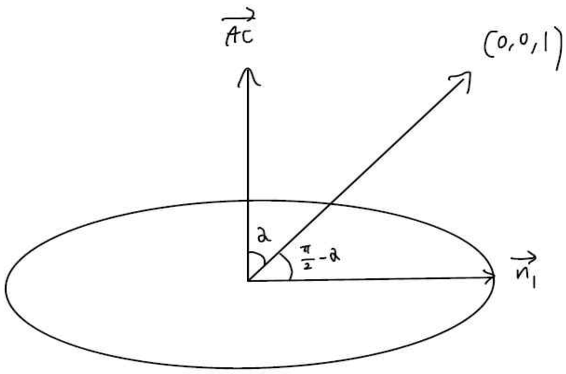
따라서 원의 넓이는 $\pi \cdot \left(\dfrac{\sqrt{41}}{2}\right)^2 = \dfrac{41}{4}\pi$이다.

2. 세 점 A, P, C를 지나는 원을 포함한 평면을 평면 α라 하자. 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하자. **정사영의 넓이가 최대려면 θ가 최소여야 한다.**

이면각을 두 평면의 법선벡터끼리 이루는 각으로 바라보자. xy평면의 법선벡터는 $(0,0,1)$이다. 평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}$라 하자. **$\vec{n}$, 벡터 $(0,0,1)$가 이루는 각은 θ이다.**



점 P에서 $\overline{\mathrm{AC}}$에 내린 수선의 발을 점 S라 하자. **점 P의 자취는 중심이 S이고 $\overline{\mathrm{AC}}$에 수직인 원이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AC}}$를 포함한다면 어떠한 평면이라도 평면 α가 될 수 있으므로 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$이다.**



평면 α의 법선벡터 $\vec{n}$은 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$를 축으로 회전각 90°를 이루며 회전하는 벡터이다.
$\vec{n}$, **벡터** $(0,0,1)$**가 이루는 각** θ**의 최솟값은** $\vec{n}$**가** $\overrightarrow{n_1}$ **위치에 있을 때이다.**

이때의 $\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ **이다.**

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot (0,0,1) = 4$, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{41}$ 이므로 $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$, $\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$ 이다.

따라서 정사영 넓이의 최댓값은 $\frac{41}{4}\pi \times \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5}{4}\sqrt{41}\pi$ 이다.

$p=4$, $q=5$ 이므로 $p+q=9$ 이다. **답은 9!!**