2020년 7월 15일 수요일 오후 4:58

112 (17 사관 21)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0$, $f'(0)=1$
(나) 모든 실수 x, y에 대하여
$f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$이다. : 너무 내용이긴 하지만, 미분계수 정의 활용

$f(-1)=k\ (-1<k<0)$일 때, $\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$의 값을 k로 나타낸 것은? (4점)

- Strategy: $\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y} \Rightarrow \lim_{y\to0}$: $f'(x)=\sim$ get
- (나) : $f(0)=0$; $y=-x$ 대입시 $f(0)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)f(-x)}$
  $\Rightarrow f(x)f(-x)\neq-1$ $\underbrace{f(x)=-f(-x)}_{\text{기함수}}$
- (나) 양변에 $-f(x)$
  $\Rightarrow f(x+y)-f(x)=\dfrac{f(y)[1-\{f(x)\}^2]}{1+f(x)f(y)}$ ---- ☆
- ☆ 양변에 $\lim_{y\to0}$, $\times\frac{1}{y}$
  $\Rightarrow f'(x)=\lim_{y\to0}\left(\dfrac{f(y)}{y}\times\dfrac{1-\{f(x)\}^2}{1+f(x)f(y)}\right)$
  $=f'(0)\times(1-\{f(x)\}^2)$
  $=1-\{f(x)\}^2$

$\therefore \int_0^1\{f(x)\}^2dx$
$=\int_0^1(1-f'(x))dx$
$=1-(f(1)-f(0))$) f는 기함수
$\boxed{=1+k}$

cf) $f(x)$ 구하기
- $f'=1-f^2$, $1-f^2\neq0$

$\Rightarrow \dfrac{f'}{1-f^2}=1$, $f(x)=t$ 치환적분
$\Rightarrow \int\dfrac{1}{1-t^2}dt=x+C$
$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\,dt$
$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$

$\Rightarrow \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}=e^{2x+C}$, $x=0$: $C=0$
$\therefore f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$
↳ 조건이랑 찰떡!