2020년 7월 13일 월요일 오후 10:24

109 (151021)

함수 $f(x)=\sin\pi x$와 이차함수 $g(x)=x(x+1)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\int_{g(x)}^{g(x+1)} f(t)\,dt$$

라 할 때, 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는? (4점)

f와 g는 쉽고, h는 어렵다.

⇒ h를 변형하자: $h(x)=\int_{g(x)}^{g(x+1)} \sin(\pi t)\,dt$

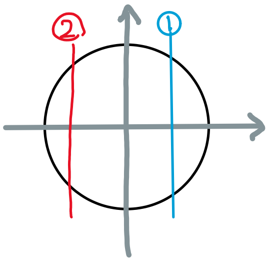
$$= \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\right]_{g(x)}^{g(x+1)}$$

$$= \boxed{-\frac{1}{\pi}\left\{\cos(\pi\cdot g(x+1)) - \cos(\pi\cdot g(x))\right\}}$$

⇒ $h(x)=0 \Leftrightarrow \cos(\pi\cdot g(x+1)) = \cos(\pi\cdot g(x))$

※ g는 쉽지만, cos(g)는 어렵다 (그래프 노가다)

⇒ 방정식에 집중 (두 코사인이 같다)



두 코사인이 같다

; ⓪ : 각도 차이가 $2n\pi$

① : $0°$에 대해 대칭 ; 더해서 $(2n\pi+0)$

② : $180°$에 대해 대칭 ; 더해서 $(2n\pi+2\pi)$

∴ $\boxed{h(x)=0} \Leftrightarrow \cos(\pi\cdot g(x+1)) = \cos(\pi\cdot g(x))$

$\Leftrightarrow$ $|g(x+1)-g(x)| = 2n$ → △

or

$g(x+1)+g(x) = 2n$ → □

△ : $|g(x+1)-g(x)| = |(x+1)(x+2) - x(x+1)|$

$= 2(x+1) \quad (x\in[-1,1])$

⇒ $2(x+1)$이 짝수인 x는 $-1, 0, 1$

□ : $g(x)+g(x+1) = 2(x+1)^2 \quad (x\in[-1,1])$

⇒ $2(x+1)^2$이 짝수인 x는

$-1,\ -1+\sqrt{1},\ \boxed{-1+\sqrt{2},\ -1+\sqrt{3}},\ -1+\sqrt{4}$

$\boxed{\therefore\ x=-1,\ 0,\ -1+\sqrt{2},\ -1+\sqrt{3},\ 1 \quad 5\text{개}}$