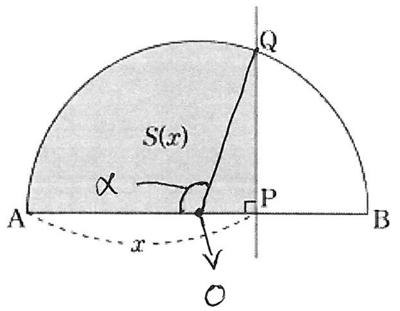
* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3수학 가형 30번.



$\overline{AB}=2$. $\overline{AO}=\overline{OB}=r=1$. $\angle AOQ=\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$

(문제에서 주어진 θ와는 다름. $0<x<2$ 이므로 $0<\alpha<\pi$)

$x=1+\cos(\pi-\alpha)=1-\cos\alpha$.

$\therefore S(x)=$ 부채꼴 $+$ 삼각형 $=\frac{1}{2}\times1^2\times\alpha+\frac{1}{2}\times\cos(\pi-\alpha)\times\sin(\pi-\alpha)=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha\cdot\sin\alpha$

$=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}\sin2\alpha$. $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\le\alpha<2\pi\right.$ 나눠서도 정리해 볼 것$\left.\right)$

$\therefore S(x)=S(1-\cos\alpha)=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}\sin2\alpha$.

(i) $S(1+\sin\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{2}$에서 선대칭이므로 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}S(1+\sin\theta)d\theta=2\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}S(1+\sin\theta)d\theta$

이 때 이미 정리된 $S(1-\cos\alpha)$ 형태를 사용하려면 $\alpha=\frac{\pi}{2}+\theta$로 치환한다.

$$\left.\begin{array}{l}\theta=\frac{\pi}{4}\rightarrow\alpha=\frac{3\pi}{4},\quad d\alpha=d\theta\\ \theta=\frac{\pi}{2}\rightarrow\alpha=\pi,\end{array}\right\}\quad\therefore 2\cdot\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}S(1-\cos\alpha)\,d\alpha\leftarrow2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}S(1+\sin\theta)\,d\theta$$

$$\therefore 2\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}S(1-\cos\alpha)\,d\alpha=2\cdot\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}\sin2\alpha\right\}d\alpha=2\times\left[\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{1}{8}\cos2\alpha\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}$$

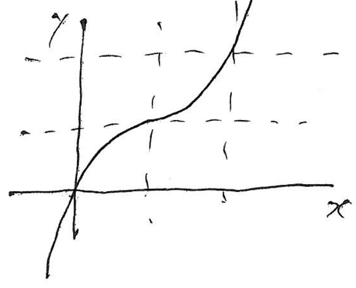
$$=2\times\left[\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{9\pi^2}{64}\right)+\frac{1}{8}(1-0)\right]=\frac{7}{32}\pi^2+\frac{1}{4}.$$

(ii) $S(1+\cos\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{2}$에서 점대칭이므로 $\theta=\frac{\pi}{2}$일 때

피적분함수 $S(1+\cos\theta)$의 값을 적분구간만큼 곱한

값과 같다. $\rightarrow\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}S(1+\cos\theta)\,d\theta=S\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)\times\frac{\pi}{2}$.

ex)



$y=(x-1)^3+1$

$\int_0^2 y\,dx=y(1)\times(2-0)$

$=2$.

$\theta=\frac{\pi}{2}$일 때 $S(1+\cos\theta)=S(1)$. $\alpha=\frac{\pi}{2}$일 때이므로

$S(1-\cos\alpha)=S(1)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}\times\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

$\therefore\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}S(1+\cos\theta)\,d\theta=S(1)\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{8}$

따라서 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\{S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)\}d\theta = \frac{7\pi^2}{32}+\frac{1}{4}-\frac{\pi^2}{8} = \frac{3\pi^2}{32}+\frac{1}{4}$. $\therefore p=\frac{1}{4},\ q=\frac{3}{32}$.

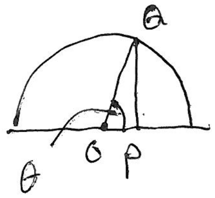
$\therefore \frac{30p}{q} = \frac{\frac{1}{4}\times 30}{\frac{3}{32}} = \frac{240}{3} = 80$ //

→ 치환적분을 할 때 α의 정의역에 맞춰서 적분구간을 조절해야 한다.

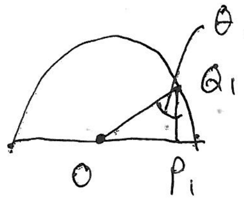
* Version 2.

$S(x)$에서 변수 x는 길이. $S(1+\sin\theta)$와 $S(1+\cos\theta)$를 $x(=\overline{AP})$로 나타내보면.

$\angle QOP=\theta$라 할 때 (단, O는 $\overline{AB}$의 중점)

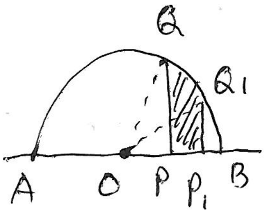


$\overline{OP}=\cos\theta$.

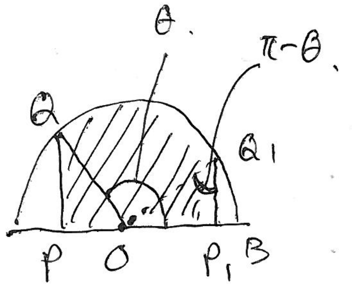


$\overline{OP_1}=\sin\theta$.

$\therefore$ (i) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$



(ii) $\frac{\pi}{2}\le\theta<\pi$

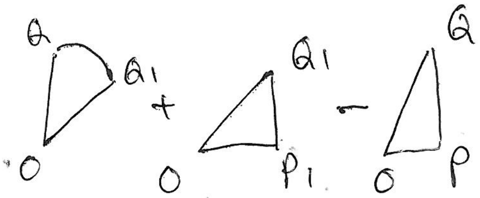


$\therefore \angle Q_1OP_1=\theta-\frac{\pi}{2}$

$\angle QOQ_1=\frac{\pi}{2}$.

빗금친 부분이 $S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)$이므로

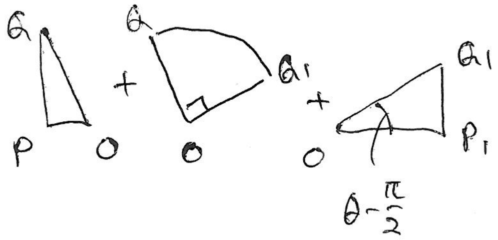
(i)



$= \frac{1}{2}\times 1^2\times\left(\theta-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)+\frac{1}{2}\times\sin\theta\times 1\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{1}{2}\cos\theta\cdot\sin\theta$

$= \theta-\frac{\pi}{4}$.

(ii)



$= \frac{1}{2}\times 1\times\cos(\pi-\theta)\times\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\frac{\pi}{2}$

$+\frac{1}{2}\times 1\times\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\times\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\sin\theta\cos\theta$

$= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin 2\theta$.

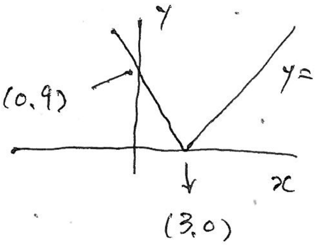
$\therefore \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\theta-\frac{\pi}{4}\right\}d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\left\{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right\}d\theta$

$= \left[\frac{\theta^2}{2}-\frac{\pi}{4}\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{\pi}{4}\theta+\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} = \left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{8}\right)-\left(\frac{\pi^2}{32}-\frac{\pi^2}{16}\right)+\left(\frac{3}{16}\pi^2+0\right)-\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi^2}{32}+\frac{1}{4}$.

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 나형 30번.

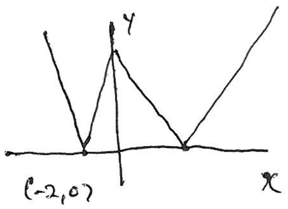
$f(x) = |3x-9|$, $g(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} f(x+k) & (x<0) \\ f(x) & (x \ge 0) \end{cases}$ $k>0$, $h(x) = x^3 + \cdots\cdots$

(가) $g(x)\cdot h(x)$는 미분가능. (나) $h'(3)=15$.

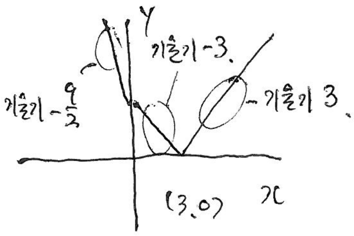


가능한 $g(x)$의 개형들.

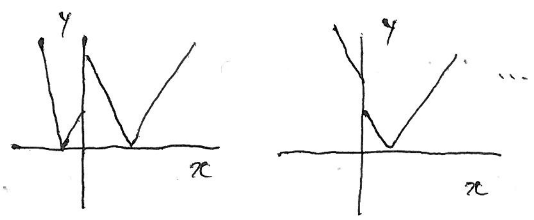
(i) $k=5$.



(ii) $k=1$



(iii) $x=0$에서 $g(x)$가 불연속인 경우들



삼차방정식 $h(x)=0$의 세 실근의 집합을 $\{0, 3, t\}$라 하면 $(\to h(x) = x(x-3)(x-t))$

$h(0)=h(0-)=h(0+)=0$ ($\because g(0-)\neq\infty$, $g(0+)\neq\infty$) 이고, $x=3$과 $x=t$ (0과 3 외의 t가 존재할 때)

에서는 미분가능하다. $\therefore$ $g(x)$가 $x=0$일 때 불연속이라면 ($\to g(0-)\neq 9$ 이라면)

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)h(x)-g(0-)h(0-)}{x-0(-)} = \lim_{x\to 0-}\frac{g(x)h(x)}{x} = \lim_{x\to 0-}\frac{g(x)\cdot x\cdot(x-3)\cdot(x-t)}{x} = g(0-)\cdot(-3)\cdot(-t)$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)h(x)-g(0+)h(0+)}{x-0(+)} = \lim_{x\to 0+}\frac{g(x)h(x)}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{g(x)\cdot x\cdot(x-3)(x-t)}{x} = g(0+)\cdot(-3)\cdot(-t)$$

따라서 $g(x)\cdot h(x)$가 미분가능하려면 $t=0$ ($h(x) = x^2(x-3)$) 이거나, $g(0-)=g(0+)$ 이어야

한다. 위의 개형 분류에서 (iii)의 경우들은 $h(x)=x^2(x-3)$이 된다.

($x=0$ 이외의 $x=3-k$, t 등에서도 미분계수 정의를 활용해서 확인해 볼 것)

(iii) $h(x) = x^2(x-3)$.

$h'(x) = 2x(x-3)+x^2 = x(2x-6+x) = 3x(x-2)$.

$\Big\}$ $h'(3)=9$. (조건에 위배).

$\to$ $g(x)$는 $x=0$에서 연속이어야

$g(x)h(x)$가 미분가능.

(i) $k=5$. $(\to t=-2)$.

$h(x) = x(x-3)(x+2) = x^3-x^2-6x$

$h'(x) = 3x^2-2x-6$

$\Big\}$ $h'(3) = 27-6-6=15$.

→ $h(x) = x(x-3)(x-t)$를 통해 $t=-2$ 임을 찾는 방법 (조건을 충족시키도록) 도 있다.

$\therefore h(k) = h(5) = 125-25-30 = 70.$

↓ (ii)의 예.

(ii) $k=1$ (개형상 $t \neq 0, t \neq 3$ 일 필요가 없다) → $t=0$ 이면 (iii)과 동일.

$h(x) = x(x-3)(x-t) \quad (t \neq 0)$

$h'(x) = (x-3)(x-t) + x(x-t) + x(x-3).$

$h'(3) = 3 \times (3-t) = 15.$

$\therefore t=-2.$

($h(x)$는 (i)과 동일한 식이 나온다).

$\therefore h(1) = 1-1-6 = -6.$

따라서 모든 $h(k)$는 $h(1)$과 $h(5)$이고, 그 합은 $70-6=64$ //

* 추가.

$h(x) = x(x-3)(x-t)$일 때 $x=0$ 이외에서

$$\lim_{x \to t-} \frac{g(x)h(x) - g(t-)h(t-)}{x-t(-)} = \lim_{x \to t-} \frac{g(x) \cdot h(x)}{x-t} = \lim_{x \to t-} \frac{g(x) \cdot x \cdot (x-3) \cdot (x-t)}{x-t}$$

$$= \lim_{x \to t-} g(x) \cdot x \cdot (x-3) = g(t-) \cdot t \cdot (t-3)$$

$\therefore h(t) = 0.$

$$\lim_{x \to t+} \frac{g(x)h(x) - g(t+)h(t+)}{x-t(+)} = \lim_{x \to t+} \frac{g(x) \cdot h(x)}{x-t} = \lim_{x \to t+} \frac{g(x) \cdot x \cdot (x-3)(x-t)}{x-t}$$

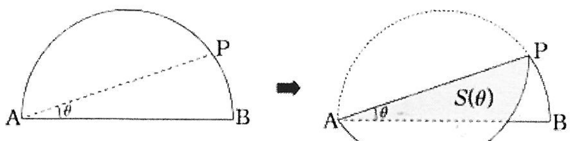
$$= \lim_{x \to t+} \frac{g(x) \cdot x \cdot (x-3) \cancel{(x-t)}}{\cancel{x-t}} = g(t+) \cdot t \cdot (t-3).$$

$\therefore g(t-) = g(t+)$ 이면 미분가능이고,

문제 내용상 연속이면 (위의 결과는 극한값 존재, $g(x)$는 $x \neq 0$ 일 때 연속이므로)

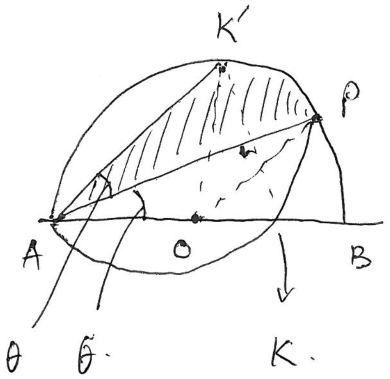
미분가능하다.

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 가형 21번.



$\overline{AB}=2$, 중점을 O라 하면 $\overline{AO}=\overline{OB}=r=1$인 반원.

호AP를 직선 AP에 대하여 접었을 때 직선 AB와의 교점을 K라 하고, 점K의 직선 AP에 대한 대칭점을 K'라 하면 K'은 반원 위의 점이다.



$(0<\theta<\frac{\pi}{4})$

문제에서의 $S(\theta)$는 왼쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이와 같다.

(도형 OKP부분의 넓이를 따로 구하는 것은 비현실적이다)

$\angle K'AP=\theta$, $\angle APO=\theta$ (∵이등변), $\angle K'OP=2\theta$ (중심각=2×원주각) $=\angle POB$.

∴ $S(\theta)=$ 도형 APK' = 부채꼴 OPK' + 삼각형 AOK' − 삼각형 AOP

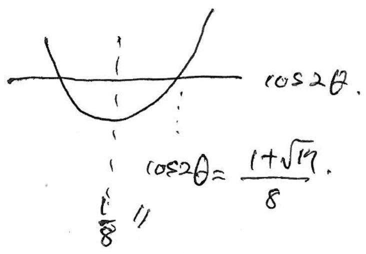
$$=\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta+\frac{1}{2}\times1^2\times\sin(\pi-4\theta)-\frac{1}{2}\times1^2\times\sin(\pi-2\theta)=\theta+\frac{1}{2}\sin4\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta.$$

$$S'(\theta)=1+2\cos4\theta-\cos2\theta=1+2\cos^2 2\theta-2\sin^2 2\theta-\cos2\theta=4\cos^2 2\theta-\cos2\theta-1=0.$$

∴ $S'(\theta)=0$을 만족시키는 $\cos2\theta=\frac{1\pm\sqrt{1+16}}{8}$ 에서 $\cos2\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ $(0<2\theta<\frac{\pi}{2})$.

열린구간 $(0,\frac{\pi}{2})$에서 cosine은 감소. ∴ 위에서의 $\cos2\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ 을 기준으로 볼 때,

$\cos2\theta$는 ⊖→⊕가 되는 곳

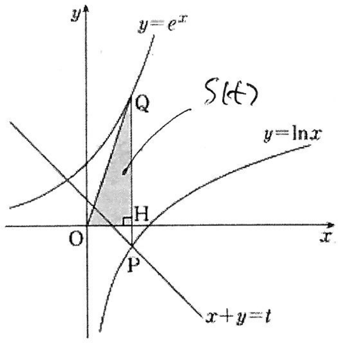


$\cos2\theta$가 증가한다는 것은 θ값이 감소한다는 것이고, θ를 기준으로 θ가 증가한다면 $\cos2\theta$가 감소하는 형태이므로

$S'(\theta)$의 부호는 θ기준으로 ⊕→⊖가 되는 것이다.

∴ 최댓값을 갖도록 하는 $\theta=\alpha$라 할 때 $\cos2\alpha=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ //

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 가형 17번.



점 P의 x좌표를 k $(0<k<1)$ 라 하면

$P(k,\ t-k) = P(k,\ \ln k)$

$H(k,\ 0)$

$Q(k,\ e^k)$

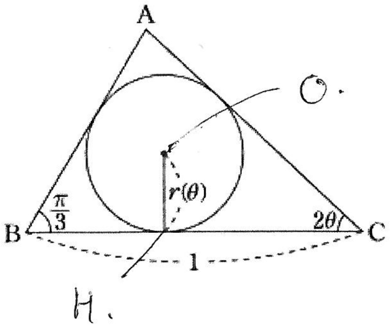
$\therefore\ S(t) = \frac{1}{2} \times k \times e^k$

(t와 설정 변수 k의 관계를 정리).

$t-k=\ln k$ 에서 $t = k+\ln k = \ln e^k + \ln k = \ln k \cdot e^k$. $\therefore\ e^t = k \cdot e^k$.

$\therefore S(t) = \frac{1}{2} k e^k = \frac{1}{2} e^t$. 따라서 $\lim_{t \to 0+} \frac{2S(t)-1}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ //

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 가형 12번.



삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O라 하고, 점 O의 직선 BC 위로의 수선의 발을 H라 하면 $\angle OBH = \frac{\pi}{6}$, $\angle OCH = \theta$ 에서

$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{r(\theta)}{\overline{BH}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\therefore\ \overline{BH} = \sqrt{3}\, r(\theta)$.

$\tan\theta = \frac{r(\theta)}{\overline{HC}} = \frac{r(\theta)}{1-\overline{BH}} = \frac{r(\theta)}{1-\sqrt{3}\,r(\theta)}$

$\therefore\ r(\theta) = \frac{\tan\theta}{1+\sqrt{3}\tan\theta}$. 따라서 $h(\theta) = \frac{r(\theta)}{\tan\theta} = \frac{1}{1+\sqrt{3}\tan\theta}$

$h'(\theta) = \frac{-\sqrt{3}\sec^2\theta}{(1+\sqrt{3}\tan\theta)^2}$. $\therefore\ h'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{2^2} = \frac{-\sqrt{3} \times \frac{4}{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ //

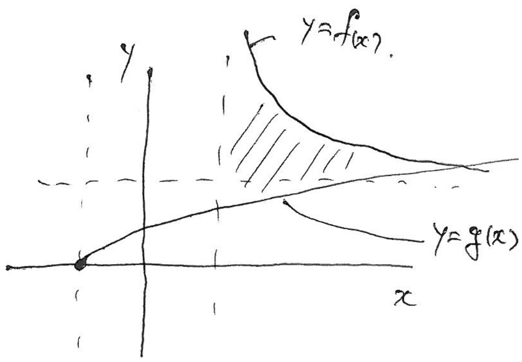
* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 나형 21번.

자연수 n, 함수 $f(x) = \frac{1}{x-n} + n$, $g(x) = \sqrt{x+n}$.

점 $P(a,b)$ 의 개수 $= A_n$.

(가) a, b는 자연수. (나) $n < a \le 3n$, $g(a) < b < f(a)$

$\rightarrow n \le A_n \le 3n$ 을 만족시키는 모든 A_n의 합?



빗금친 부분에 존재하는 점들의 개수 $\rightarrow A_n$.

(i) $n=1$. $\rightarrow a = 2$ or 3

$a=2$. $g(2) = \sqrt{3} = 1.xx$. $f(2) = 1+1 = 2$. $\rightarrow$ X

$a=3$. $g(3) = \sqrt{4} = 2$. $f(3) = \frac{1}{2}+1 = 1.xx$ $\rightarrow$ X

$A_1 = 0$.

n이 고정된 상태에서 $a\uparrow \rightarrow g(a)\uparrow, f(a)\downarrow$.

∴ 특정 a값에서 조건을 충족시키지 못하면 $a+1$ 에서는 더 확인할 필요가 없다.

(ii) $n=2$. $a = 3$ or 4 or 5 or 6.

$a=3$. $g(3) = \sqrt{5} = 2.xx$. $f(3) = 1+2 = 3$. $\rightarrow$ X — $A_2 = 0$.

(iii) $n=3$. $a = 4 \sim 9$.

$a=4$. $g(4) = \sqrt{7} = 2.xx$ $f(4) = 4$. $\rightarrow (4,3)$

$a=5$. $g(5) = \sqrt{8} = 2.xx$ $f(5) = 3.xx \rightarrow (5,3)$

$a=6$. $g(6) = 3$. $f(6) = 3.xx \rightarrow$ X.

$A_3 = 2$. ($n=3 \le A_3 = 2 \le 3n = 9 \Rightarrow$ X)

(iv) $n=4$. $a = 5 \sim 12$.

$a=5$. $g(5) = 3$. $f(5) = 5$. $\rightarrow (5,4)$

$a=6$. $g(6) = 3.xx$. $f(6) = 4.xx$ $\rightarrow (6.4)$

....

$a=11$. $g(11) = \sqrt{15} = 3.xx$. $f(11) = 4.xx \rightarrow (11,4)$

$a=12$. $g(12) = 4$. $f(12) = 4.xx \rightarrow$ X.

∴ $A_4 = 7$. ($n=4 \le A_4 = 7 \le 3n = 12 \Rightarrow$ O)

(v) $n=5$. $a = 6 \sim 15$.

$a=6$. $g(6) = \sqrt{11} = 3.xx$ $f(6) = 6$ $\rightarrow (6,4)(6,5)$

$a=7$. $g(7) = \sqrt{12} = 3.xx$ $f(7) = 5.xx \rightarrow (7,4)(7,5)$

....

$a=10$. $g(10) = \sqrt{15} = 3.xx$. $f(10) = 5.xx \rightarrow (10,4)(10,5)$.

$a=11$. $g(11) = 4$. $f(11) = 5.xx \rightarrow (11,5)$.

....

$a=15$ $g(15) = \sqrt{20} = 4.xx$. $f(15) = 5.xx \rightarrow (15,5)$.

$A_5 = 15$ ($a=6$부터 $a=10$까지는 2개씩. 그 외 1개)

($n=5 \le A_5 = 15 \le 3n = 15$. $\Rightarrow$ O).

(vi) $n=6$.

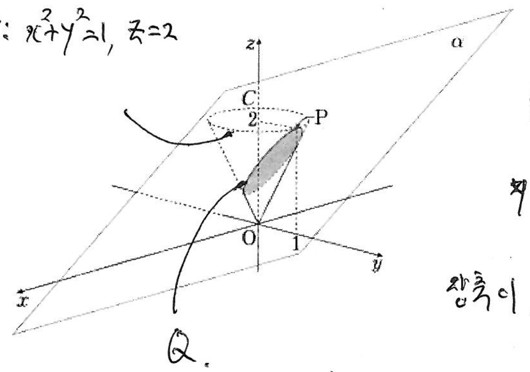
$A_n > 3n$. ∴ 조건에 위배.

∴ 조건에 맞는 모든 A_n은 A_4, A_5 이므로

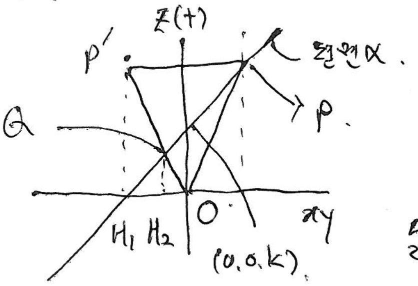
$A_4(=7) + A_5(=15) = 22$//

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 가형 29번.

C: $x^2+y^2=1$, $z=2$



평면 α와 원뿔이 만나는 점들 중 y좌표값이 가장 큰 점을 $P(0,1,2)$라 하고, 가장 작은 점을 Q라 하면, 타원 S는 y축을 장축으로 갖는 타원이고, xy평면에 정사영된 형태가 장축이 $\frac{5}{4}$인 타원이므로 점 Q의 y좌표는 $-\frac{1}{4}$이 된다.

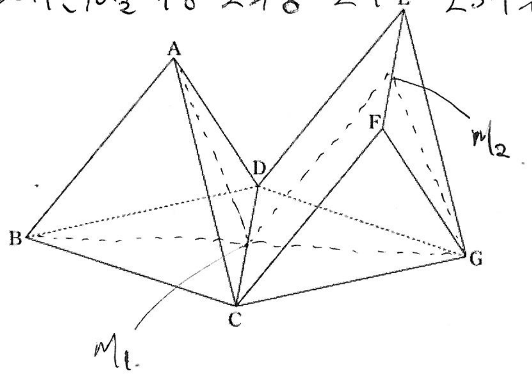


점 P'을 $P'(0,-1,2)$라 하고 P'의 xy평면 위로의 수선의 발을 H_1, 점 Q의 수선의 발을 H_2라 하면, $\triangle H_1OP'$과 $\triangle H_2OQ$는 닮음이다. $\overline{H_2O}=\frac{1}{4}$이므로 $\overline{QH_2}=\frac{1}{2}$. $\therefore Q\left(0,-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

yz평면에서 $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$와 $(1,2)$를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}}=\frac{6}{5}$이므로 직선의 방정식은

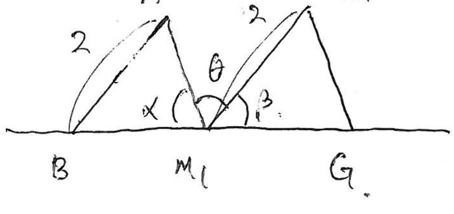
$$z=\frac{6}{5}y+\frac{4}{5}. \quad \therefore k=\frac{4}{5}$$

* 2017년 10월 시행 교육청 모의 고3 수학 가형 15번



선분 BG는 선분 CD의 중점을 지난다. 이 때 선분 CD의 중점을 M_1이라 하고 선분 EF의 중점을 M_2라 하면 문제에서 주어진 각 θ는 $\angle AM_1M_2$에 해당한다.

$\overline{BM_1}=\overline{AM_1}=\sqrt{3}$, $\overline{M_1G}=\overline{M_2G}=\sqrt{3}$, $\overline{M_1M_2}=2$.



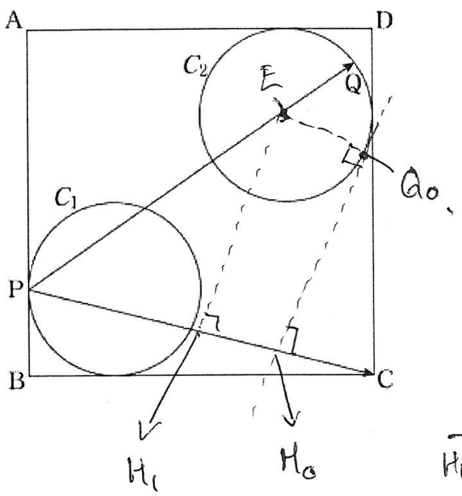
$\angle AM_1B=\alpha$, $\angle M_2M_1G=\beta$라 하면

$4=3+3-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\alpha$에서 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{8}}{3}$

$3=3+4-2\cdot\sqrt{3}\cdot2\cdot\cos\beta$에서 $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \cos\theta=\cos(\pi-(\alpha+\beta))=-\cos(\alpha+\beta)=-\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 가형 28번.



$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 최댓값은 $a+\sqrt{b}$. (단, a와 b는 유리수)

$\overrightarrow{PC}$는 고정되어 있으므로 직선 PC를 기준으로 생각하는 것이 편리하다. 따라서 원 C_2의 접선 중 $\overline{PC}$와 수직으로 만나는 두 접선 중 선분 PH_0의 길이가 큰 경우가 최대.

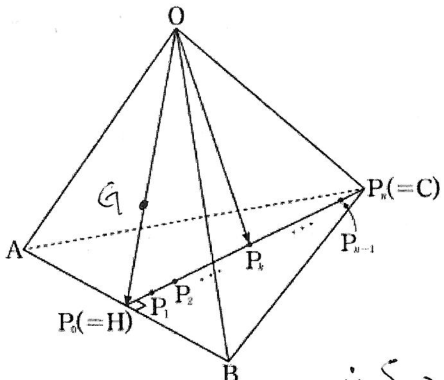
$\overline{H_1H_0}=1$ (원 C_2의 반지름과 동일).

$$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PE}=(4,-1)\cdot(3,2)=10=\overline{PC}\times\overline{PH_1}=\sqrt{17}\times\overline{PH_1}.\quad \therefore \overline{PH_1}=\frac{10}{\sqrt{17}}.$$

따라서 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 최댓값은 $Q=Q_0$일 때 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ_0}=\overline{PC}\times\overline{PH_0}=\sqrt{17}\times\left(\frac{10}{\sqrt{17}}+1\right)$

$=10+\sqrt{17}$, $\quad\therefore a=10,\ b=17.$

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 가형 18번.



$\triangle OAB$의 무게중심을 G라 하면, $\overline{HC}$의 평면 OAB 위로의 정사영은 $\overline{HG}$가 된다. 점 P_k의 선분 HG 위로의 수선의 발을 P_k'이라 하면

$\overline{AO}=6$, $\overline{OH}=3\sqrt{3}$, $\overline{OG}=2\sqrt{3}$

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OP_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{OH}\times\overline{OP_k'}\right)=\sum_{k=1}^{n}3\sqrt{3}\times\left(3\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}k}{n}\right)$$

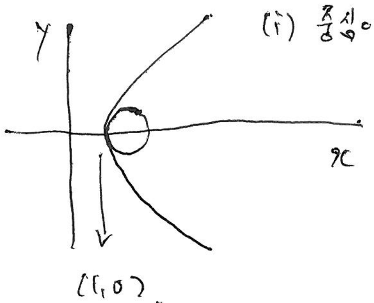
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(27-\frac{9k}{n}\right)=27n-\frac{9}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{45}{2}n-\frac{9}{2}.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{45}{2}n-\frac{9}{2}}{n}=\frac{45}{2}$$

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3수학 가형 20번.

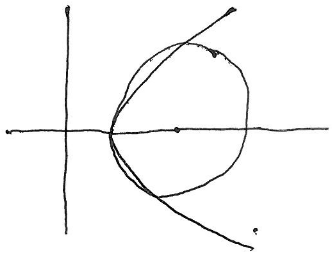
쌍곡선 $x^2-y^2=1$, x축 위의 점 $A(t, 0)$, $\overline{AP}$의 $\min = f(t)$, → $f(t)$는 y축 대칭.

∴ $(0 \le x \le 1)$ $f(t) = 1-t$. → y축 대칭이므로 $x \ge 0$ 에서 구한 뒤에 확장.



(i) 중심이 $(t, 0)$이고 반지름이 $t-1$인 원과 쌍곡선이 $(1, 0)$에서 접할 때.

(ii)



→ (i)과 (ii)의 임계점에 해당하는 t 값을 찾는것이 관건.

$P(a, b)$라 하면 $a \ge 1$일 때 $\overline{AP}^2 = (a-t)^2+b^2$

$P(a, b)$는 쌍곡선 위의 점이므로 $a^2-b^2=1$.

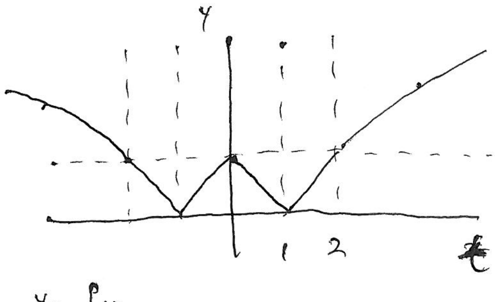
$f(t) = \sqrt{(a-t)^2+b^2} = \sqrt{(a-t)^2+a^2-1}$

$= \sqrt{2a^2-2ta+t^2-1} = \sqrt{2\left(a-\frac{t}{2}\right)^2+\frac{t^2}{2}-1}$.

∴ $a = \frac{t}{2}$ 일 때 $f(t) = \sqrt{\frac{t^2}{2}-1}$ 이고, $a \ge 1$ 이므로 $t \ge 2$ (위에서의 (i)과 (ii)의 임계점이 $(2, 0)$).

따라서 $(1 < x \le 2)$ $f(t) = t-1$, $(x \ge 2)$ $f(t) = \sqrt{\frac{t^2}{2}-1}$ → $(2, 1)$, $(\sqrt{10}, 2)$, ...

$f(t)$의 개형은 다음과 같다.



$y = f(t)$.

$(-2 \le t \le 2)$ 직선
$(x < -2 \text{ or } x > 2)$ 곡선 } 형태.

ㄱ. $f(0) = 1$. → True.

ㄴ. $f(t) = \frac{1}{3}$ 의 실근의 개수는 4 → True

ㄷ. $\lim_{t \to 2-} \frac{f(t)-f(2)}{t-2} = \lim_{t \to 2-} \frac{t-2}{t-2} = 1$.

$\lim_{t \to 2+} \frac{f(t)-f(2)}{t-2} = \lim_{t \to 2+} \frac{\sqrt{\frac{t^2}{2}-1}-1}{t-2}$

$= \lim_{t \to 2+} \dfrac{\frac{t^2}{2}-2 = \frac{1}{2}(t-2)(t+2)}{(t-2)\left(\sqrt{\frac{t^2}{2}-1}+1\right)} = 1$.

∴ $f(t)$가 미분불가능한 t는 $t = -1, 0, 1$ 의 세 곳이다. ∴ ㄷ → False.

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 나형 29번.

자연수 n. 점 $P_n(n, (n-1)a)$ 은 삼각형 $Q_nQ_{n+1}Q_{n+2}$ 의 무게중심. $Q_{10}(9, 90)$. Q_{13} ?

$Q_1(0, 0)$.

$Q_2(1, -1)$. $P_1(1, 0)$. $\therefore Q_3(2, 1)$.

$Q_3(2, 1)$. $P_2(2, a)$ $\therefore Q_4(3, 3a)$

$Q_4(3, 3a)$. $P_3(3, 2a)$ $\therefore Q_5(4, 3a-1)$

$Q_5(4, 3a-1)$ $P_4(4, 3a)$ $\therefore Q_6(5, 3a+1)$

$Q_6(5, 3a+1)$ $P_5(5, 4a)$ $\therefore Q_7(6, 6a)$.

$\therefore Q_{10}(9, 9a)$, $Q_{13}(12, 12a)$

따라서 $9a = 90$ 에서 $a = 10$,

$12 + 12a = 12 + 120 = 132$ //

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 나형 25번.

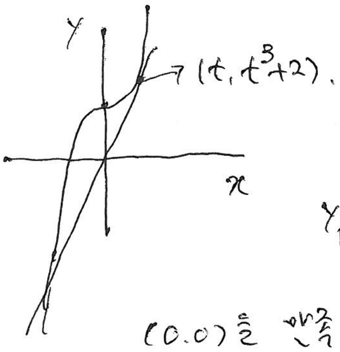
수열 $\{a_n\}$. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \log_2(n^2+n)$. $a_1 = \log_2 2 = 1$. $\sum_{k=1}^{n-1} a_k = \log_2(n^2-n)$.

$\therefore a_n\,(n \geq 2) = \log_2 \frac{n+1}{n-1}$. $\therefore \sum_{k=1}^{15} a_{2k+1} = a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{31}$.

$= \log_2 \frac{3+1}{3-1} + \log_2 \frac{5+1}{5-1} + \log_2 \frac{7+1}{7-1} + \cdots + \log_2 \frac{31+1}{31-1} = \log_2 \frac{32}{2} = \log_2 16 = 4$ //

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 나형 26번.

$y_1 = x^3+2$, $y_2 = kx$ → y_1과 y_2의 교점의 개수를 $f(k)$.



y_1 위의 점 (t, t^3+2)에서의 접선이 원점을 지날 때의 기울기를 기준으로 클 때와 작을 때로 나눈다.

$y_1' = 3x^2$이므로 접선은 $y_3 = (3t^2)(x-t) + t^3+2$.

$(0,0)$을 만족하므로 $-2t^3+2=0$에서 $t=1$. ∴ 접점은 $(1,3)$, 그 때 기울기는 3.

∴ $k = 1$ or 2 → $f(k)=1$

$k=3$ → $f(k)=2$

$k=4,5,6,\cdots$ → $f(k)=3$.

∴ $\sum_{k=1}^{6} f(k) = 1+1+2+3+3+3 = 18$ //

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 나형 13번.

등차수열 $\{a_n\}$, $a_3=5$, $a_6=11$. ∴ $d=2$. ∴ $a_n = 2n-1$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\times(2n+1-2n+1)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ //}$$

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3수학 나형 28번.

자연수 a, b, c, 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수?

(가) $abc = 180 = 2\times 90 = 2^2\times 45 = 2^2\times 3^2\times 5$.

(나) $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$.

$$\left.\begin{aligned} a &= 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1} \\ b &= 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2} \\ c &= 2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\gamma_3} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &= 2 \\ \beta_1+\beta_2+\beta_3 &= 2 \\ \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

a, b, c는 자연수이므로 $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$은 음이 아닌 정수.

∴ (가)에서의 경우의 수는 ${}_3H_2\times {}_3H_2\times {}_3H_1 = 108$.

(나)에서 $a=b$, $b=c$, $c=a$인 경우와 $a=b=c$인 경우를 구해서 (가)에서 각각 빼고 더하면 된다.

(i) $a=b$인 경우 $\alpha_1=\alpha_2$ (0 or 1), $\beta_1=\beta_2$ (0 or 1), $\gamma_1=\gamma_2$ (0) → 4가지.

(ii) $b=c$인 경우 → 4가지. (iii) $c=a$인 경우 4가지. (iv) $a=b=c$인 경우 없음.

∴ $108 - 4\times 3 = 96$ //

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3수학 나형 15번.

X	-2	0	1	계
P(X=x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$a=\frac{1}{6}$	1

∴ $E(X) = -\frac{2}{3}+0+\frac{1}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$.

$E(X^2) = \frac{4}{3}+0+\frac{1}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

∴ $X \sim N\left(-\frac{1}{2}, \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)$

↳ size=16 추출. $\overline{X}$ → $\overline{X} \sim N\left(-\frac{1}{2}, \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{16}\right)$.

∴ $V(\overline{X}) = \frac{5}{4\times 16} = \frac{5}{64}$ //

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 가형 26번.

$X=\{1,2,3,4,5,6\}$. $f: X \to X$.

(가) 함수 $f(x)$는 일대일대응.

(나) $1 \le n \le 2$일 때 $f(2n) < f(n) < f(3n)$

$\to$ $n=1$. $f(2) < f(1) < f(3)$
$n=2$. $f(4) < f(2) < f(6)$.
$\therefore$ $f(4) < f(2)$ 고정.

$f(4) < f(2) < f(6) < f(1) < f(3)$
$< f(1) < f(6) < f(3)$
$< f(1) < f(3) < f(6)$.

(i) $f(4)=1$ $f(2)=2$. $\to {}_4C_3 \times 3 = 12$.

$\Rightarrow$ 3, 4, 5, 6 중 3개를 골라 오름차순으로 왼쪽의 3가지 배열을 맞춰준다.

(ii) $f(4)=1$, $f(2)=3$. $\to {}_3C_3 \times 3 = 3$

(iii) $f(4)=2$, $f(2)=3$ $\to {}_3C_3 \times 3 = 3$

$\therefore$ 구하는 함수 $f(x)$의 개수는 $12+3+3=18$ // ($f(5)$는 자동으로 결정된다. 일대일 대응)

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 나형 14번.

함수 $f(x)=\dfrac{bx}{ax+1}$의 정의역과 치역이 같다. $\to$ 점근선의 교점은 $y=x$ 위에 존재.

$\to$ 정의역 = 치역 = $\{x \ne -\frac{1}{a}$인 모든 실수, 단, $a \ne 0\}$.

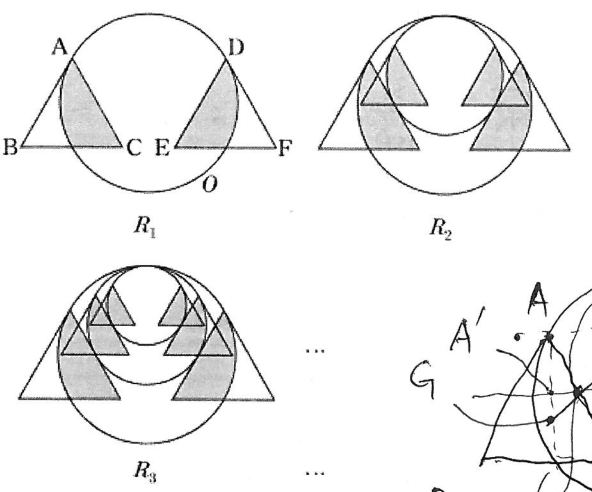
$\therefore$ $\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{a}$ 에서 $b=-1$. 점근선의 교점은 $\left(-\dfrac{1}{a}, \dfrac{b}{a}\right) = \left(-\dfrac{1}{a}, -\dfrac{1}{a}\right)$.

점근선의 교점이 $y=2x+3$ 위에 있으므로 $y=x$와 연립하면 $x=-3$.

$\therefore$ 점근선의 교점은 $(-3, -3)$이다. 따라서 $a=\dfrac{1}{3}$.

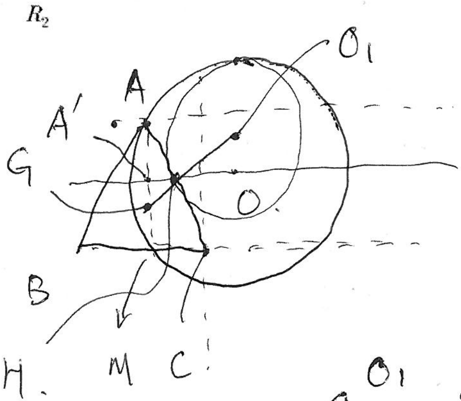
$\therefore$ $a+b = \dfrac{1}{3} - 1 = -\dfrac{2}{3}$ //

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 나형 18번.



1) $n: 2 \to 2$. $\therefore n=1$.

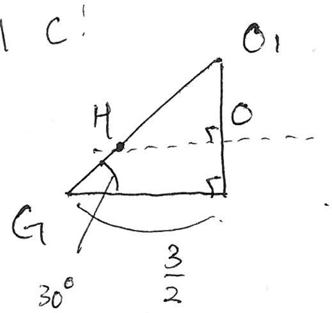
2) R_1을 좀 더 세부적으로 나타내 보면.



$\overline{AM}=\sqrt{3}$. $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}=2$.

$\triangle ABC$의 무게중심을 G라 하면

$\overline{AC} \perp \overline{GO_1}$. 이때



따라서 $\overline{GO_1} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. $\overline{GH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

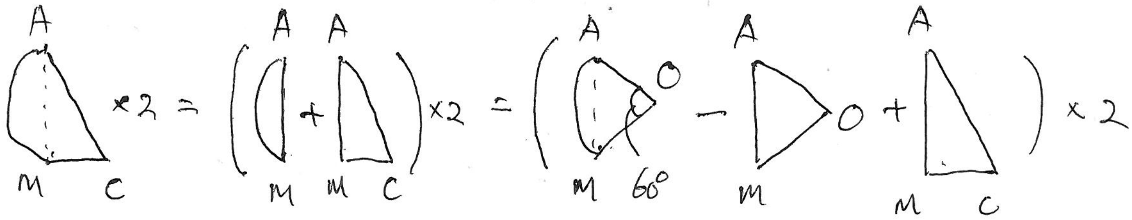
(무게중심의 특징).

$\therefore \overline{HO_1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore l_r: r_1(\sqrt{3}) \to r_2(\overline{HO_1}) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$l_r = \frac{2}{3}$. $S_r = \frac{4}{9}$.

3) a.

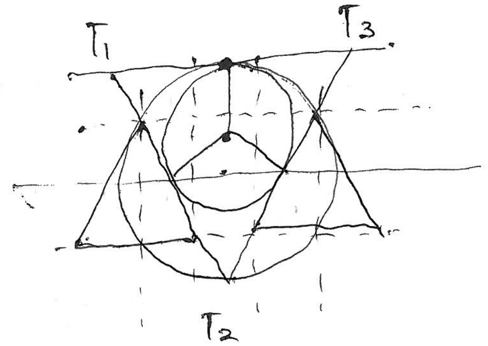


$= \left(\frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\times 1(=\overline{MC})\times\sqrt{3}(=\overline{AM})\right)\times 2 = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{4}{9}} = \dfrac{\frac{2\pi-\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{9}} = \dfrac{18\pi - 9\sqrt{3}}{10}$ //

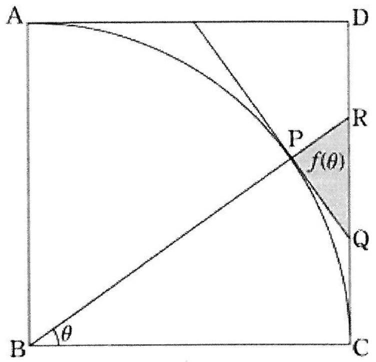
* 추가 Question. 점 H를 선분 AC의 중점으로

생각할 수 있는 근거는?



뒤집은 정삼각형 $T_1T_2T_3$를 생각할 것.

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3수학 가형 27번.



□ABCD는 한 변의 길이가 3인 정사각형.

사분원 BCA. $\overline{BP}=3$. $\overline{BR}=\frac{3}{\cos\theta}$ $\therefore \overline{PR}=\frac{3}{\cos\theta}-3$.

직선 PQ는 점 P에서의 접선이므로 $\overline{BR}\perp\overline{PQ}$. $\therefore \angle RQP=\theta$.

$\overline{PQ}=\frac{\overline{PR}}{\tan\theta}=\frac{3}{\tan\theta\cdot\cos\theta}-\frac{3}{\tan\theta}=\frac{3(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$

$\therefore f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PR}\times\overline{PQ}=\frac{1}{2}\times\frac{3(1-\cos\theta)}{\cos\theta}\times\frac{3(1-\cos\theta)}{\sin\theta}=\frac{9}{2}\times\frac{1}{\cos\theta\cdot\sin\theta}\times\frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}\times\frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}$.

$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{8\times f(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}8\times\frac{1}{\theta^3}\times\frac{9}{2}\times\frac{1}{\cos\theta\cdot\sin\theta}\times\frac{\sin^4\theta}{(1+\cos\theta)^2}=8\times\frac{9}{2}\times\frac{1}{4}=9$ //

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3수학 가형 16번.

$f(x)$는 연속.

(가) $x\neq0$, $\{f(x)\}^2f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

(나) $f(0)=0$.

$\{f(x)\}^2\cdot f'(x)=\left(\frac{1}{3}\{f(x)\}^3\right)'$ 이므로

$\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln(x^2+1)+C=\frac{1}{3}\{f(x)\}^3$. ... ①

$(\because x^2+1>0)$.

$f(x)$는 연속이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$. $\therefore$ ①에서 $x=0$ 대입하면 $C=0$.

따라서 $x=1$일 때 $\ln2=\frac{1}{3}\{f(1)\}^3$ 이므로 $\{f(1)\}^3=3\ln2$ //

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3수학 가형 14번.

$f(x)$, $g(x)$ → 미분가능. $f\circ g(x)=g\circ f(x)=x$. $f(1)=3$, $g(1)=3$. $\therefore g(3)=1$, $f(3)=1$

$\int_1^3\left\{\frac{f(x)}{f'(g(x))}+\frac{g(x)}{g'(f(x))}\right\}dx=\int_1^3\{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)\}dx=\left[f(x)g(x)\right]_1^3$

$=f(3)\cdot g(3)-f(1)g(1)=1-9=-8$ //

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3수학 가형 19번.

n은 2 이상의 자연수. $1 \le a < b \le n$, $1 \le c < d \le n$, a, b, c, d는 자연수.

$x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 직사각형의 둘레의 길이가 $2n$ → $b-a=X$로 확률변수라 할 때 $E(X)=?$

$\therefore 2(b-a)+2(d-c)=2n$에서 $(b-a)+(d-c)=n$.

$b-a=1 \rightarrow d-c=n-(b-a)=n-1$. $\therefore$ $b-a=k$라 하면 $d-c=n-k$.

확률에 앞서 경우의 수로 먼저 접근하면,

$X=b-a=1$. $\rightarrow n-1$.

$X=b-a=2$. $\rightarrow (n-2)\times 2$

$X=b-a=3$. $\rightarrow (n-3)\times 3$.

....

$X=b-a=n-1$ $\rightarrow n-1$.

예를 들어 $n=10$이라 하면

$b-a=2 \rightarrow (a,b)=(1,3)(2,4)(3,5)\cdots(8,10)$

$d-c=8 \rightarrow (c,d)=(1,9)(2,10)$

$\therefore$ 경우의 수는 $8\times 2 = (n-2)\times 2$.

경우의 수의 총합은 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cdot k = n\times\frac{(n-1)\cdot n}{2} - \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} = (n-1)\cdot n\cdot\left(\frac{3n-2n+1}{6}\right) = \underbrace{\frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{6}}_{All}$

$\therefore$ 확률변수 X의 이산확률분포는 다음과 같다.

X	1	2	3	…	k	…	n−1	계
P(X=x)	$\frac{n-1}{All}$	$\frac{(n-2)\cdot 2}{All}$	$\frac{(n-3)\cdot 3}{All}$	…	$\frac{(n-k)\cdot k}{All}$	…	$\frac{n-1}{All}$	1

$$\therefore E(X) = \frac{1}{All}\times\sum_{k=1}^{n-1} k\cdot(n-k)\cdot k$$

$$= \frac{6}{(n-1)\cdot n(n+1)}\times\sum_{k=1}^{n-1}(nk^2-k^3)$$

$$= \frac{6}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}\times\left\{n\times\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)^2\cdot n^2}{4}\right\}$$

$$= \frac{6\cdot(n-1)\cdot n^2}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}\times\left\{\frac{4n-2}{12} - \frac{3n-3}{12}\right\} = \frac{6n}{n+1}\times\frac{n+1}{12} = \frac{n}{2}.$$

(가) $b-a$는 (1,2)(2,3) 등의 1, (1,3)(2,4) 등의 2, ⋯ (1,n)까지의 $(n-1)$의 값을 가진다.

(나) $b-a=k$, $d-c=n-k$. $\therefore c=d-n+k$. $d\le n$

$c=d-n+k \le n-n+k = k$.

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3수학 나형 19번.

$P_0(0)$, 주사위를 던져서 (A) 1, 2, 3, 6 → x축 방향으로 2 $(p=\frac{2}{3})$

(B) 4, 5 → x축 방향으로 -1 $(p=\frac{1}{3})$

종료 조건 : (1) P의 좌표가 9 이상, (2) P의 좌표가 -4이하, (3) 시행 횟수 6.

종료시 P의 위치를 확률변수 X라 할 때, $E(X)=?$

→ 6회 이전에 시행을 종료하려면 네 번 연속 사건 B 또는 다섯번 연속 사건 A가 나오는 경우다.

그 외에는 $n(A)+n(B)=6$ 이면서 4회나 5회에 종료되지 않는 경우이어야 한다.

→ 확률변수 X의 범위를 정리하면

$X=-4$ (4회 종료), $X=10$ (5회 종료), $X=-3, 0, 3, 6, 9$.

$X=-3$ or 9일 때는 $X=-4$ or 10인 경우가 발생되지 않는 경우에 한정된다. 또한 $X=0$일 때도 마찬가지.

→ $X=-3$ $(n(A)=1,\ n(B)=5)$ → 처음부터 네 번 연속 사건 B가 나오면 불가.

∴ 기준횟수를 사건 A라 하면 전체 $_6C_1$ 에서 2를 뺀다. (BBBBAB, BBBBBA)

$X=0$ $(n(A)=2,\ n(B)=4)$ → $_6C_2-1$.

$X=9$. $(n(A)=5,\ n(B)=1)$ → $_6C_5-1$ (AAAAAB)

따라서 확률분포를 나타내면 다음과 같다.

$P(X=-4)={}_4C_4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4$, $P(X=-3)=({}_6C_1-2)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^5$, $P(X=0)=({}_6C_2-1)\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4$

$P(X=3)={}_6C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $P(X=6)={}_6C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $P(X=9)=({}_6C_5-1)\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)$

$P(X=10)={}_5C_5\left(\frac{2}{3}\right)^5$.

$$\therefore E(X)=(-4)\times\frac{1}{3^4}+10\times\frac{32}{3^5}+\frac{(-3)\times4\times2+0+3\times20\times8+6\times15\times16+9\times5\times32}{3^6}$$

$$=\frac{-12+320-8+160+480+480}{3^5}=\frac{1420}{243}.$$

(가) $=10$, (나) $={}_6C_1-2=4$, (다) $={}_6C_5-1=5$.

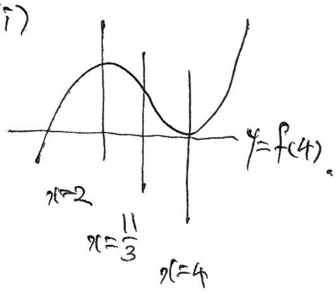
* 2017년10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 나형 20번.

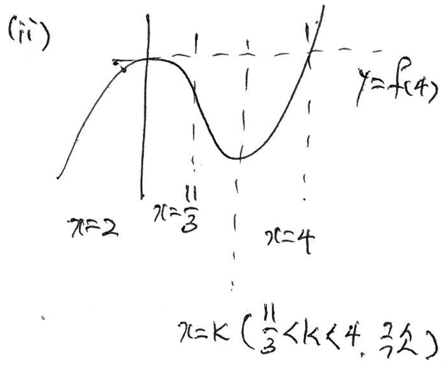
$f(x) = x^3 + \cdots\cdots$

(가) $f'\left(\frac{11}{3}\right) < 0$ → 극대, 극소 존재.

(나) $f(2) = 35$ (극대).

(다) $f(x) = f(4)$ → 서로 다른 두 실근





(i) $f'(x) = 3(x-2)(x-4) = 3(x^2-6x+8) = 3x^2-18x+24$

$\therefore f(x) = x^3-9x^2+24x+C$. $f(2) = 8-36+48+C = 35$. $\therefore C=15$. $f(0) = C = 15$.

(ii). $f'(x) = 3(x-2)(x-k) = 3(x^2-(2+k)x+2k) = 3x^2-3(2+k)x+6k$.

$\therefore f(x) = x^3-\frac{3}{2}(2+k)x^2+6kx+C$. $f(2)=f(4)=35$.

$f(2) = 8-6(2+k)+12k+C = -4+6k+C = 35$.
$f(4) = 64-24(2+k)+24k+C = 16+C = 35$.

$\therefore C=19$. $k=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$.

→ 조건에 위배

$\therefore f(0) = C = 15$ // ((i)만 조건 충족).

* 2017년10월시행 교육청 모의고사 고3 수학 나형 12번.

수직선 위를 움직이는 점P의 시각t에서의 속도 $v(t)$, $(t\geq 0)$.

$v(t) = -t^2+10t$.

가속도 $a(t) = (v(t))' = -2t+10$. $\therefore$ $t=5$에서 가속도가 0. $\therefore a=5$.

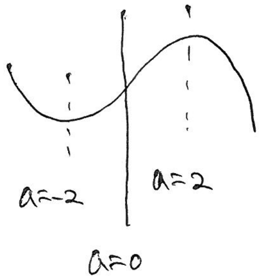
* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3수학 나형 16번.

함수 $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & (x<0) \\ -x^2+2x+2 & (x \geq 0) \end{cases}$, $a>0$, $\int_{-a}^{a} f(x)dx$의 최댓값은?

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} \{2x+2\} dx + \int_{0}^{a} \{-x^2+2x+2\} dx = \left[x^2+2x\right]_{-a}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3}+x^2+2x\right]_{0}^{a}$$

$$= 0-(a^2-2a)+\left(-\frac{a^3}{3}+a^2+2a\right)-0 = -\frac{a^3}{3}+4a = -\frac{1}{3}a(a^2-12)$$

$a>0$, $-\frac{1}{3}a(a^2-12)$의 개형은 다음과 같다. $\left(-\frac{a^3}{3}+4a\right)' = -a^2+4 = -(a+2)(a-2)$



$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = -\frac{a^3}{3}+4a$의 최댓값은 $a=2$일 때이므로

$-\frac{8}{3}+8 = \frac{16}{3}$ //

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3수학 나형 17번.

$f(x) = x^2+\cdots$.

$\lim_{x\to 0} |x| \times \left\{ f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(-\frac{1}{x}\right) \right\} = a$.

$\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = 3$.

$\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0+} f(t) = 3$. $\therefore f(0)=3$. ($\because$ 연속)

$\therefore f(x) = x^2+kx+3$.

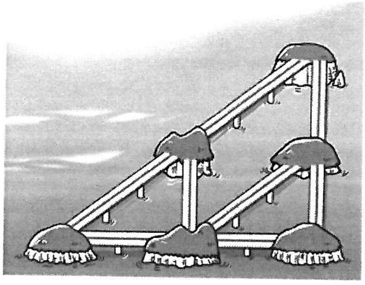
$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}+\frac{k}{x}+3$, $f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}-\frac{k}{x}+3$. $\therefore f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{2k}{x}$.

$$\therefore \lim_{x\to 0} |x| \times \left\{ f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(-\frac{1}{x}\right) \right\} = \lim_{x\to 0} |x| \times \frac{2k}{x} = \underbrace{\lim_{x\to 0+} \frac{x\cdot 2k}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x\cdot 2k}{x}}_{\text{「극한값이 존재한다」는 의미를 생략}} = a.$$

$\therefore k=0$, $a=0$.

따라서 $f(x) = x^2+3$. $f(2) = 7$ //

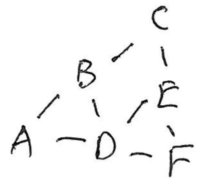
* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 가형 13번.



흰색 깃발 2개, 노란색 깃발 2개, 파란색 깃발 2개.

→ 색상을 각각 ① ② ③ 이라 하고

왼쪽 그림의 섬들을



라 하자.

→ D는 A, B, E, F와 연결되므로 D와 C는 같은 색상의 깃발을 꽂아야 한다.

→ 이 때 A와 B, E와 F는 D와 C에 꽂은 깃발과 다른 두 가지 색 중 하나를 고르면 된다.

$$\therefore \underbrace{{}_3C_1}_{D,C} \times \underbrace{{}_2C_1}_{A} \times \underbrace{{}_1C_1}_{B} \times \underbrace{{}_2C_1}_{E} \times \underbrace{{}_1C_1}_{F} = 12$$

오른쪽 그림과 같은 구조로 이해할 수도 있다.

A	B	C
D		E
F		

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 나형 27번.

$X \sim N(m, \sigma^2)$. m은 자연수, $F(x) = P(X \le x)$ → $F(x)$는 확률밀도함수가 아님.

$0.5 \le F(\frac{11}{2}) \le 0.6915$ ……① $F(\frac{13}{2}) = 0.8413$ ……②

$m \le \frac{11}{2} \le m + \frac{\sigma}{2}$. $m + \sigma = \frac{13}{2}$.

$m=5,\ \sigma = \frac{3}{2}$ → OK.

$m=4,\ \sigma = \frac{5}{2}$ → X.

$m=3$ 이하는 모두 X.

$\therefore m=5,\ \sigma=\frac{3}{2}$.

$F(k) = 0.9772$ 이면 $k = m + 2\sigma$

$= 5 + 3 = 8$