2013 연세대학교 수리논술 문제 복기 SYSTEM

오르비 해원(난만한)

(가) n이 양의 정수일 때, 정의역과 공역이 $\{0,\,1,\,2,\,\cdots,\,2n\}$이고 일대일 대응인 모든 함수의 집합을 S라고 하자.

$$S=\{f_1,\,f_2,\,f_3,\,\cdots,\,f_N\}$$

일 때, A_j, B_j를 다음과 같이 정의한다. (단, j는 $1 \leqq j \leqq N$인 자연수)

$$A_j=\{i\,|\,f_j(i)<f_j(0),\ 1\le i\le n\},\ B_j=\{i\,|\,f_j(i)<f_j(0),\ n+1\le i\le 2n\}$$

A_j의 원소의 개수를 a_j, B_j의 원소의 개수를 b_j라 할 때, D_k, E_k를 다음과 같이 정의한다.

$$D_k=\{f_j\,|\,f_j\in S,\ a_j=k\},\ E_k=\{f_j\,|\,f_j\in S,\ b_j=k\}$$

(나) $2n$명 중에서 k명을 선택하는 경우의 수는 $2n$명의 사람들을 n쌍의 부부라고 가정했을 때 $2n$명 중 뽑힌 사람의 수 k는 부부가 모두 뽑힌 쌍의 수와 부부 중 한명만이 뽑힌 쌍의 수의 총합과 같다.

[1-1] 다음 물음에 답하시오. **[10점]**

① 집합 S의 개수를 구하는 방법을 논하시오.

② $n=3$일 때, 확률변수 X가 집합 A_j에서 a_j에 대응된다고 할 때, $\mathrm{P}(X=1)$의 값을 구하는 방법을 논하시오.

[1-2] $n=3$이라 할 때, 다음 물음에 답하시오. **[20점]**

① $n(D_1\cap E_1)$, $n(D_1\cap E_3)$을 논리적으로 구하시오.

② ①에서 구한 두 값 $n(D_1\cap E_1)$과 $n(D_1\cap E_3)$이 같은지 비교하고 그 원인에 대하여 논하시오.

③ 사건 D_k와 사건 E_k가 표본공간이 S인 사건일 때, D_1과 E_1이 독립인지 아닌지 쓰고 그 이유를 설명하시오.

[1-3] 다음 등식의 빈칸 (가), (나), (다)를 채우고 그 이유를 논리적으로 설명하시오. **[15점]**

$${}_{2n}\mathrm{C}_k=\sum_{i=0}^{(\text{가})}\left\{{}_n\mathrm{C}_i\times{}_{n-i}\mathrm{C}_{(\text{나})}\times 2^{(\text{다})}\right\}$$

[1-4] 다항함수 $g(x)=\displaystyle\sum_{j=1}^{N}(1-x)^{a_j}(1+x)^{b_j}$ $(-1\le x\le 1)$ 의 최댓값을 구하고 그 이유를 논리적으로 설명하시오. **[15점]**