제 2 교시

수학 영역(가 형)

5지선다형

1. $\sqrt[3]{8}\times 4^{\frac{3}{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

$(2^3)^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{\frac{3}{2}}$

$= 2 \times 2^3 = 16$

2. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+12n}-3n\right)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{9n^2+12n}-3n)(\sqrt{9n^2+12n}+3n)}{(\sqrt{9n^2+12n}+3n)}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{12n}{\sqrt{9n^2+12n}+3n} = 2$

3. 첫째항이 1이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_3 = a_2 + 6$

일 때, a_4의 값은? [2점]

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

$a_n = 1 \cdot r^{n-1}$

$r^2 = r + 6$.

$r = 3$ $(\because r > 0)$

4. 6개의 문자 a, a, a, b, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 52 ② 56 ③ 60 ④ 64 ⑤ 68

$\frac{6!}{3!\,2!} = 60$

5. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}=10$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2a_n^{\,2}+3n^2}{a_n^{\,2}+n^2}$의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}=10 \Rightarrow$ 수렴 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n^2}+2\cdot\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+3}{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+1}=3$$

6. 두 양수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$를 지나는 직선이 원점을 지날 때, $\log_a b$의 값은? (단, $a\neq 1$) [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

$y=(\log_2 b-\log_4 a)(x-2)+\log_4 a$

$(0, 0)$ 대입

$\log_4\left(\frac{b^2}{a}\right)^2=\log_4 a$

$b^4=a^3$

$b=a^{\frac{3}{4}}$ $\therefore \log_a b=\frac{3}{4}$

7. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}+3}$$

에 대하여 $f(k)=-\frac{1}{3}$을 만족시키는 정수 k의 개수는? [3점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{3}{4} & \left(\frac{x}{4}=-1\right)\\ \frac{1}{4} & \left(\frac{x}{4}=1\right)\\ -\frac{1}{3} & \left(-1<\frac{x}{4}<1\right)\\ \frac{x}{2} & \left(\left|\frac{x}{4}\right|>1\right)\end{cases}$$

$-4<x<4$

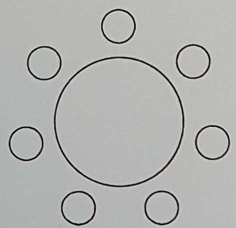
$\Rightarrow x=-3, -2, -1, \cdots, 2, 3$

7개

연속 조건
별거 아닌 것 같지만
꼭 챙겨가자.

8. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 1학년 학생끼리 이웃하고 2학년 학생끼리 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 96 ② 100 ③ 104 ④ 108 ⑤ 112



① ① ② ② ③ ③ ③

$\frac{5!}{5}\times 2!\times 2! = 96$

9. 함수

$$f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$$

가 닫힌구간 $[0, 12]$에서 최댓값 -4, 최솟값 m을 갖는다. $k+m$의 값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$f(x)$: 감소함수

$\therefore f(0) = 2\log_{\frac{1}{2}} k = -4 = \log_{\frac{1}{2}} 16$

$k=4$

$f(12) = 2\log_{\frac{1}{2}} 16 = -8 = m$

$\therefore k+m = -4$

10. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(e^{2x}-1)^2 f(x) = a - 4\cos\frac{\pi}{2}x$$

를 만족시킬 때, $a\times f(0)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① $\frac{\pi^2}{6}$ ② $\frac{\pi^2}{5}$ ③ $\frac{\pi^2}{4}$ ④ $\frac{\pi^2}{3}$ ⑤ $\frac{\pi^2}{2}$

$f(x)$: 연속

$f(x) = \frac{a-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}$

$x=0$; (분모) $\to 0$, (분자) $\to 0$

$\therefore a=4$

$f(x) = \frac{4(1-\cos\frac{\pi}{2}x)}{(e^{2x}-1)^2}$

$f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{4\cdot\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2}}{\left(\frac{e^{2x}-1}{x}\right)^2} = \frac{\cancel{4}\,(1-\cos\frac{\pi}{2}x)}{\cancel{4}\,x^2}$

$= \frac{\sin^2\frac{\pi}{2}x}{x^2(1+\cos\frac{\pi}{2}x)} = \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2} = \frac{\pi^2}{8}$

$\therefore a\times f(0) = 4\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{2}$

* $x=a$에서 미분가능하다

1. $f(a) = \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x)$ ($\Leftrightarrow$ $x=a$에서 연속이다)

2. $\lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ($\Leftrightarrow$ 좌미분계수 = 우미분계수)

11. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \frac{f(x)}{(e^x+1)^2}$$

라 하자. $f'(0) - f(0) = 2$일 때, $g'(0)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

$f(x) = (e^x+1)^2 g(x)$

$x=0$; $f(0) = 4g(0)$

(미분)

$f'(x) = 2e^x(e^x+1)g(x) + (e^x+1)^2 g'(x)$

$x=0$; $f'(0) = 4g(0) + 4g'(0)$

$f'(0) - f(0) = 4g'(0) = 2$

$\therefore g'(0) = \frac{1}{2}$

Comment

계산 전에는 딱 떨어지게 답이 나올지 모를 수 있는 문제

할 수 있는 것만 하다보면 답이 나옴.

12. 자연수 n이 $2 \le n \le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? [3점]

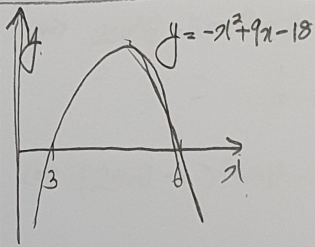
① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

1. 문제 파악

$\sqrt[n]{(\quad)} = -\square$

n=짝수 → ( )=양수

n=홀수 → ( )=음수



$n = 2, 4, 6, 8, 10$

n=짝수 → ( )=양수

$\therefore n = 4$

$n = 3, 5, 7, 9, 11$

n=홀수 → ( )=음수

$\therefore n = 7, 9, 11$

$\therefore n = 4, 7, 9, 11$

$4+7+9+11 = 31$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$\Uparrow$

13. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, $\underbrace{|a-3|+|b-3|=2}_{A}$이거나 $\underbrace{a=b}_{B}$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

$\|a-3\|$	$\|b-3\|$
2	0
1	1
0	2

$\Rightarrow$

a	b
1, 5	3
2, 4	2, 4
3	1, 5

$P(A) = \frac{8}{36}$

$P(B) = \frac{6}{36}$

$P(A\cap B) = \frac{2}{36}$

$\therefore P(A\cup B) = \frac{8+6-2}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

14. $0 \le \theta < 2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2 - (2\sin\theta)x - 3\cos^2\theta - 5\sin\theta + 5 = 0$$

이 실근을 갖도록 하는 θ의 최솟값과 최댓값을 각각 α, β라 하자. $4\beta - 2\alpha$의 값은? [4점]

① 3π ② 4π ③ 5π ④ 6π ⑤ 7π

$D/4 = \sin^2\theta + 3\cos^2\theta + 5\sin\theta - 5 \ge 0$

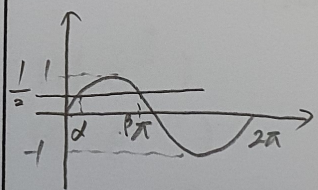
$\Leftrightarrow 2\cos^2\theta + 5\sin\theta - 4 \ge 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 \le 0$

2 − 1
1 − 2

$\Leftrightarrow (2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 2) \le 0$

$\frac{1}{2} \le \sin\theta \le 1$ $(\because -1 \le \sin\theta \le 1)$



$\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5}{6}\pi$

$\therefore 4\beta - 2\alpha = \frac{20\pi}{6} - \frac{2}{6}\pi = 3\pi$

수학 빈칸추론
: 이해가 된다면 Good
이해가 안된다면 $\boxed{\text{등식}}$임을 명시하고 풀것
※ 문제에도 Hint

15. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=(2^{2n}-1)\times 2^{n(n-1)}+(n-1)\times 2^{-n}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n} \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=3$, (우변)$=3$이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = 2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$ + a_{m+1}

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = 2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$
$$+(2^{2m+2}-1)\times \boxed{(가)} + m\times 2^{-m-1}$$ → a_{m+1}

등식
$$=\boxed{(가)}\times\boxed{(나)}-\frac{m+2}{2}\times 2^{-m}$$

등식
$$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times 2^{-(m+1)}$$ 같다.

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n}$$

이다.

+ a_{m+1}

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\dfrac{g(7)}{f(3)}$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

$a_{m+1}=(2^{2m+2}-1)\times 2^{(m+1)m}+m\times 2^{-m-1}$

$\therefore$ (가) $=2^{(m+1)m}$

(가) $\times$ (나) $=2^{(m+1)(m+2)}=2^{m^2+3m+2}$

(가) $=2^{m^2+m}=f(m)$

$\therefore$ (나) $=2^{2m+2}=g(m)$

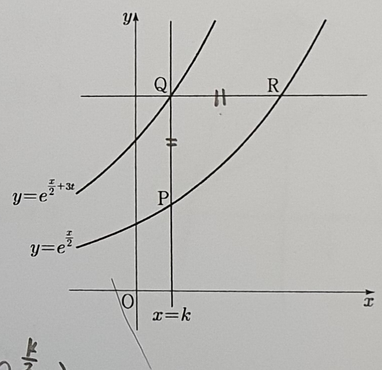
$\therefore \dfrac{g(7)}{f(3)}=\dfrac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16.$

16. 양수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 값을 $f(t)$라 하자.

> 직선 $x=k$와 두 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$, $y=e^{\frac{x}{2}+3t}$이 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$과 만나는 점을 R라 할 때, $\overline{PQ}=\overline{QR}$이다.

함수 $f(t)$에 대하여 $\lim_{t\to 0+} f(t)$의 값은? [4점]

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $\ln 4$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$



$P(k, e^{\frac{k}{2}})$

$Q(k, e^{\frac{k}{2}+3t})$

$R(k+6t, e^{\frac{k}{2}+3t})$

$\overline{PQ}=e^{\frac{k}{2}+3t}-e^{\frac{k}{2}}$

$\overline{QR}=6t$

$e^{\frac{k}{2}}(e^{3t}-1)=6t$

실수 k의 값 : $f(t)$

$e^{\frac{f(t)}{2}}=\dfrac{6t}{e^{3t}-1}$, $\lim_{t\to 0+} e^{\frac{f(t)}{2}}=\lim_{t\to 0+}\dfrac{6t}{e^{3t}-1}=2$

$\therefore \dfrac{f(t)}{2}=\ln 2$, $f(t)=\ln 4$

→ ※ 지수, 로그함수와 다항함수의 비교.

1. 직접적인 비교가 불가하다 ex) 교점, 기울기 ···

⇒ 특정 점들을 활용한 부등식 문제

2. 기울기, 넓이, 지수 등에 주목하여 해결
(로그)

17. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

> (가) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 4보다 큰 수가 적혀 있는 카드가 있다.
> (나) 5가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 5보다 작은 수가 적혀 있는 카드가 있다.

① $\frac{1}{28}$ ② $\frac{1}{14}$ ③ $\frac{3}{28}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{5}{28}$

1 2 3 4 5 6 7

_ $\boxed{4}$ _ : 5, 6, 7

_ $\boxed{5}$ _ : 1, 2, 3, 4

i) 4 옆에 5가 없을 때

$\underbrace{{}_2P_2}_{6,7\text{ 배열}} \times \underbrace{{}_3P_2}_{1,2,3\text{ 배열}} \times 3! = 72$

3! : (_4_) (_5_) □ 배열

ii) 4 옆에 5가 있을 때

$\underbrace{{}_2C_1}_{4\text{옆의 5 왼쪽 or 오른쪽}} \times \underbrace{{}_3C_1}_{5\text{옆의 수}} \times \underbrace{{}_2C_1}_{4\text{옆의 수}} \times 4! = 288$

4! : (_5 4_) □ □ □ 배열

∴ $72 + 288 = 360$

$\frac{360}{7!} = \frac{1}{14}$

18. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

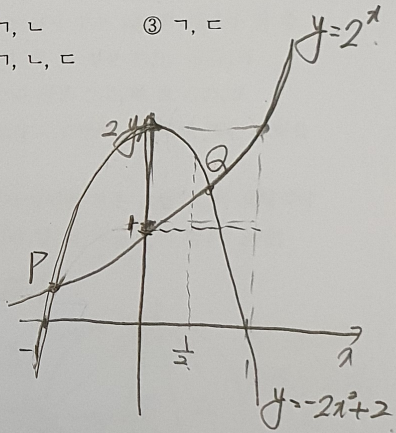
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$P(x_1, y_1)$

$Q(x_2, y_2)$

$f(x) = 2^x$

$g(x) = -2x^2 + 2$



ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

⇒ $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$ $f(\frac{1}{2}) < g(\frac{1}{2}) \Rightarrow x_2 > \frac{1}{2}$

$g(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

ㄴ. $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 1$ ⇒ 기울기 ⇒ 왜 하필 1?

$f(0) = 1$, $f(1) = 2$ ⇒ 기울기 1인 직선

$\overline{PQ}$ 기울기 < 1

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} < 1$

$2^{-\frac{1}{2}} < 2^{x_1 + x_2} < 2^0$

$-\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < 0$

$-1 < x_2 < -\frac{1}{2}$

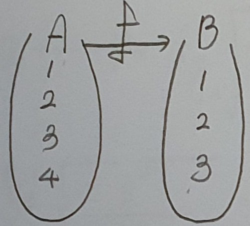
$\frac{1}{2} < x_1 < 1$

$-\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < \frac{1}{2}$

19. 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3\}$에 대하여 A에서 B로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

$\underbrace{f(1) \geq 2\text{이거나}}_{A}$ $\underbrace{\text{함수 } f\text{의 치역은 } B}_{B}$이다.

① $\frac{16}{27}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{20}{27}$ ④ $\frac{22}{27}$ ⑤ $\frac{8}{9}$



$P(A) = \frac{2 \cdot 3^3}{3^4} = \frac{2}{3}$

$P(B) = \frac{S(4,3) \times 3!}{3^4} = \frac{6 \times 3!}{3^4} = \frac{4}{9}$

$P(A \cap B) = \frac{S(4,3) \times 2 \times 2!}{3^4} = \frac{6 \times 2 \times 2!}{3^4} = \frac{8}{27}$

$P(A \cup B) = \frac{18+12-8}{27} = \frac{22}{27}$

20. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$이고 $\angle B_1AC_1 = \frac{\pi}{3}$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 D_1, 세 점 A, D_1, C_1을 지나는 원이 선분 AB_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_2라 할 때, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 B_2D_1로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 호 C_1D_1로 둘러싸인 부분인 ◺ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1C_1에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1과 만나는 점을 각각 D_2, C_2라 하자. 세 점 A, D_2, C_2를 지나는 원이 선분 AB_2와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_3이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 B_3D_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 호 C_2D_2로 둘러싸인 부분인 ◺ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

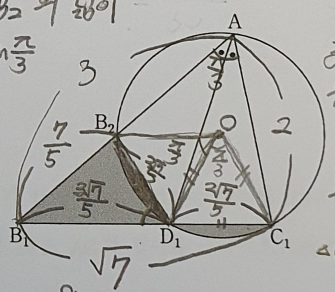
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

첫항: $\triangle B_1D_1B_2$의 넓이

$= \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{7}}{5} \times \frac{3\sqrt{7}}{5} \times \sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{21\sqrt{3}}{50}$

R_1



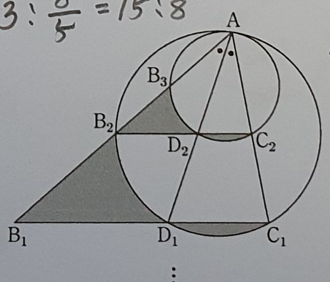
한 원에서 원주각 동일
⇓
호, 현의 길이 동일

$\triangle OD_1C_1$, $\triangle OB_2D_1$
⇓
정삼각형
$\therefore \angle B_2D_1B_1 = \frac{\pi}{3}$

닮음비
$\Rightarrow \overline{AB_1} : \overline{AB_2} = 3 : \frac{8}{5} = 15 : 8$

넓이 비
$\Rightarrow 15^2 : 8^2$

R_2



⋮ ⋮

① $\frac{27\sqrt{3}}{46}$ ② $\frac{15\sqrt{3}}{23}$ ③ $\frac{33\sqrt{3}}{46}$ ④ $\frac{18\sqrt{3}}{23}$ ⑤ $\frac{39\sqrt{3}}{46}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1-\frac{64}{225}} = \frac{27\sqrt{3}}{46}$

21. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$$

이다. $\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은? [4점]

① 150 ② 154 ③ 158 ④ 162 ⑤ 166

$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = \log_2 \sqrt{\frac{2\cdot 2}{\cancel{3}} \times \frac{2\cdot \cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{2\cdot \cancel{4}}{\cancel{5}} \times \cdots \times \frac{2\cdot \cancel{m+1}}{m+2}}$

$= \log_2 \sqrt{\frac{2^{m+1}}{m+2}} = \frac{m+1 - \log_2(m+2)}{2} \le 100$ $\boxed{\text{자연수}}$

$\therefore m+2 = 2^k$ (k는 음이 아닌 정수)

$\Rightarrow m$: 짝수 $\Rightarrow m+1$: 홀수 $\Rightarrow k$: 홀수

$k=3,\ m=6$ (o)

$k=5,\ m=30$ (o)

$k=7,\ m=126$ (o)

$k=9,\ m=510$ (x)

$\therefore$ m의 값의 합 $= 6+30+126 = 162$

단답형

22. 다항식 $(1+2x)^4$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오. [3점]

${}_4C_2 \cdot (2x)^2 \cdot 1^2$

$= 6 \cdot 4x^2 = 24x^2$

24

23. 반지름의 길이가 15인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $\sin B = \frac{7}{10}$일 때, 선분 AC의 길이를 구하시오. [3점]

21

$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = 30$

$\therefore \overline{AC} = 21$

24. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=9$, $a_2=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$$

을 만족시킨다. $|a_k|=3$을 만족시키는 100 이하의 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

33

Cycle

$a_1=9$

$a_2=3$

$a_3=3-9=-6$

$a_4=-6-3=-9$

$a_5=-9+6=-3$

$a_6=-3+9=6$

$a_7=6+3=9$

$a_8=9-6=3$

$\vdots$

$6\times16=96$

$|a_{98}|=3$

$16\times2+1=33$

25. 곡선 $x^3-y^3=e^{xy}$ 위의 점 $(a, 0)$에서의 접선의 기울기가 b일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

$a^3=1$

$a=1$,

4

미분

$3x^2-3y^2\frac{dy}{dx}=e^{xy}y+e^{xy}x\frac{dy}{dx}$

$(1, 0)$ 대입

$3=\frac{dy}{dx}=b$

$b=3$

$a+b=4$

26. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값을 구하시오. [4점]

$S_{k+2}-S_k=4=a_{k+2}+a_{k+1}=2a_k+6$.

7

$a_k=-1=a_1+2(k-1)$

$a_1+2k=1$

$S_k=\frac{k(a_1-1)}{2}=-16$.

$a_1-1=-2k$

$k^2=16$, $k=4$

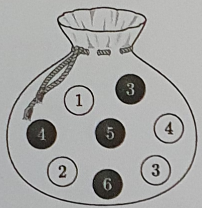
$a_1=-7$

$a_{2k}=a_8=a_1+14=7$.

수선적으로 할 수 있는 것만 하자.
필요한 조건을 구할 수 없다면
주변도형을 살피자.

27. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있을 때, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

46



1 2 3 4
3 4 5 6

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_3C_1 \times {}_3C_1 - 1}{{}_6C_2 + {}_6C_2 - 1}$$

$$= \frac{17}{29} = \frac{q}{p}$$

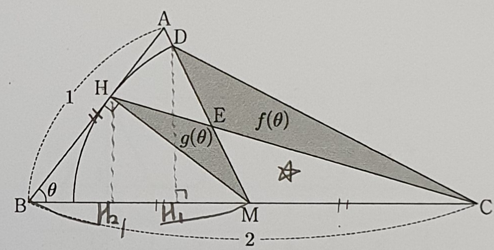
$$= p+q = 29+17 = 46$$

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 두 선분 AB, BC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\overline{MH}$인 원이 선분 AM과 만나는 점을 D, 선분 HC가 선분 DM과 만나는 점을 E라 하자. $\angle ABC = \theta$라 할 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 MEH의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3} = a$일 때, $80a$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]

15



$f(\theta), g(\theta)$: 삼각형 넓이 $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \times 밑변 \times 높이 \\ \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin\theta \end{array}\right.$

$\overline{MH} = \overline{MD} = \sin\theta$

그 이외의 $f(\theta), g(\theta)$에 관련된 정보 ×

→ 주변관찰 → $(f(\theta)+☆) - (g(\theta)+☆)$

$$f(\theta)+☆ = \frac{1}{2} \times 1 \times \overline{DM} \times \sin(\angle DMH_1)$$
$$= \frac{1}{2}\sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\theta \cos\frac{\theta}{2}$$

$$g(\theta)+☆ = \frac{1}{2} \times 1 \times \overline{MH} \times \sin(\angle HMH_2)$$
$$= \frac{1}{2}\sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{1}{2}\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\right)}{\theta^3} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\cos\frac{\theta}{2}-\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)}{2\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(2\cos\frac{\theta}{2}+1\right)}{2\theta^2} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}\left(2\cos\frac{\theta}{2}+1\right)}{2\theta^2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{3}{16} = a$$

$$\therefore 80a = 80 \times \frac{3}{16} = 15$$

→ 계산과정 편의를 위해 로피탈 사용

29. 검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 4자루, 빨간색 볼펜 4자루가 있다. 이 9자루의 볼펜 중에서 5자루를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.

중복조합 ← (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

□ ○○○○ △△△△

검1 파4 빨4

114

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$

학생

□○○○○ ${}_2H_1 \times {}_2H_4$ = 10

□○○○△ ${}_2H_1 \times {}_2H_3 \times {}_2H_1$ = 16

□○○△△ ${}_2H_1 \times {}_2H_2 \times {}_2H_2$ = 18

□○△△△ ${}_2H_1 \times {}_2H_1 \times {}_2H_3$ = 16

□△△△△ ${}_2H_1 \times {}_2H_4$ = 10

○○○○△ ${}_2H_4 \times {}_2H_1$ = 10

○○○△△ ${}_2H_3 \times {}_2H_2$ = 12

○○△△△ ${}_2H_2 \times {}_2H_3$ = 12

○△△△△ ${}_2H_1 \times {}_2H_4$ = 10 +

114

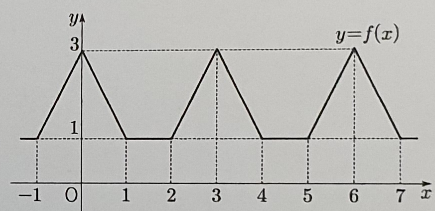
30. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0 \le x < 3$일 때 $f(x) = |x-1| + |x-2|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3) = f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \lim_{h \to 0+} \left| \frac{f(2^{x+h}) - f(2^x)}{h} \right|$$ → 미분계수 식?

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린구간 $(-5, 5)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ (n은 자연수)라 할 때,

$n + \sum_{k=1}^{n} \frac{g(a_k)}{\ln 2}$의 값을 구하시오. [4점]

331



$g(x)$가 불연속 → $x=a$에서의 |좌미분계수|와 |우미분계수| 확인

$f(x)$: $x = 1, 2, 4, 5, 7, 8, \cdots$ 에서 |좌미분계수| ≠ |우미분계수|

$\therefore 2^a = 1, 2, 4, 5, \cdots$ → $2^{a_1} = 1$, $2^{a_2} = 2$, $2^{a_3} = 4$ ---

$-5 < a < 5$ → $\frac{1}{32} < 2^a < 32$

$2^a = 1, 2, 4, 5, \cdots, 29, 31$ → 총 21개

$\therefore n = 21$

로) $\lim_{h \to 0+} \left| \frac{f'(2^{x+h}) 2^{x+h} \ln 2}{1} \right| = |f'(2^x) \cdot 2^x \ln 2|$ (우미분계수)

$g(a_1) = |f'(1) \cdot 1 \cdot \ln 2| = 0$

$g(a_2) = |f'(2) \cdot 2 \cdot \ln 2| = 4\ln 2$　　$\therefore n + \sum_{k=1}^{n} \frac{g(a_k)}{\ln 2}$

$g(a_3) = |f'(4) \cdot 4 \cdot \ln 2| = 0$

$g(a_4) = |f'(5) \cdot 5 \cdot \ln 2| = 10\ln 2$　　$= 21 + \frac{2\ln 2(2+5+\cdots+29)}{\ln 2}$

⋮

$= 21 + 310 = 331$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.