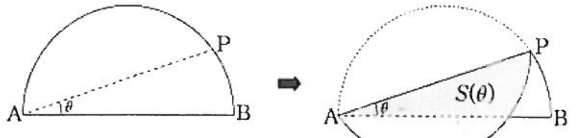
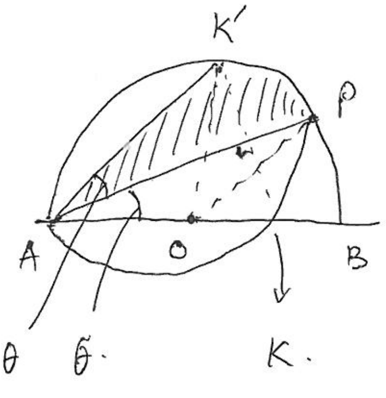
* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 가형 21번.



$\overline{AB}=2$. 중점을 O라 하면 $\overline{AO}=\overline{OB}=r=1$인 반원. 호AP를 직선 AP에 대하여 접었을 때 직선 AB와의 교점을 K라 하고, 점K의 직선 AP에 대한 대칭점을 K'라 하면 K'은 반원 위의 점이다.



$(0<\theta<\frac{\pi}{4})$

문제에서의 $S(\theta)$는 왼쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이와 같다.

(도형 OKP 부분의 넓이를 따로 구하는 것은 비현실적이다)

$\angle K'AP=\theta$, $\angle APO=\theta$ (∵이등변), $\angle K'OP=2\theta$ (중심각=2×원주각) $=\angle POB$.

∴ $S(\theta)$ = 도형 APK' = 부채꼴 OPK' + 삼각형 AOK' − 삼각형 AOP

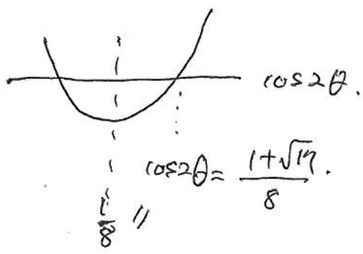
$$=\frac{1}{2}\times 1^2\times 2\theta+\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin(\pi-4\theta)-\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin(\pi-2\theta)=\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta.$$

$$S'(\theta)=1+2\cos 4\theta-\cos 2\theta=1+2\cos^2 2\theta-2\sin^2 2\theta-\cos 2\theta=4\cos^2 2\theta-\cos 2\theta-1=0.$$

∴ $S'(\theta)=0$을 만족시키는 $\cos 2\theta=\frac{1\pm\sqrt{1+16}}{8}$에서 $\cos 2\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ $(0<2\theta<\frac{\pi}{2})$.

열린구간 $(0,\frac{\pi}{2})$에서 cosine은 감소. ∴ 위에서의 $\cos 2\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$을 기준으로 볼 때,

$\cos 2\theta$는 ⊖→⊕가 되는 곳

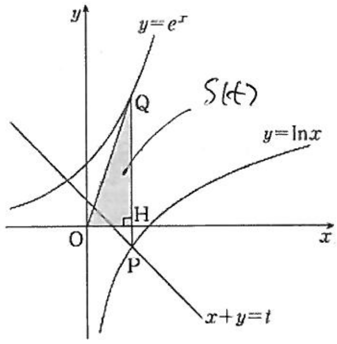


$\cos 2\theta$가 증가한다는 것은 θ값이 감소한다는 것이고, θ를 기준으로 θ가 증가한다면 $\cos 2\theta$가 감소하는 형태이므로

$S'(\theta)$의 부호는 θ기준으로 ⊕→⊖가 되는 것이다.

∴ 최댓값을 갖도록 하는 $\theta=\alpha$라 할 때 $\cos 2\alpha=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ //

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 가형 17번.



점 P의 x좌표를 k $(0<k<1)$ 라 하면

$P(k,\ t-k) = P(k,\ \ln k)$
$H(k,\ 0)$
$Q(k,\ e^k)$

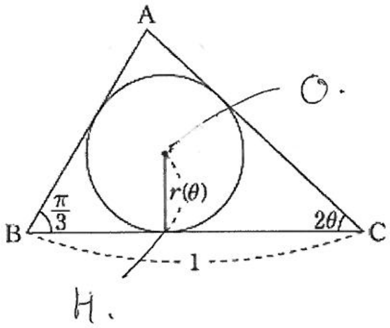
$\therefore\ S(t) = \frac{1}{2} \times k \times e^k$

(t와 설정 변수 k의 관계를 정리).

$t-k=\ln k$ 에서 $t = k+\ln k = \ln e^k + \ln k = \ln k\cdot e^k$. $\quad \therefore\ e^t = k\cdot e^k$.

$\therefore S(t) = \frac{1}{2}ke^k = \frac{1}{2}e^t$. 따라서 $\lim_{t\to 0+} \frac{2S(t)-1}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{e^t-1}{t} = 1$ //

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 가형 12번.



삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O라 하고, 점O의 직선 BC 위로의 수선의 발을 H라 하면 $\angle OBH = \frac{\pi}{6}$, $\angle OCH = \theta$ 에서

$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{r(\theta)}{\overline{BH}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\quad \therefore\ \overline{BH} = \sqrt{3}\,r(\theta)$.

$\tan\theta = \frac{r(\theta)}{\overline{HC}} = \frac{r(\theta)}{1-\overline{BH}} = \frac{r(\theta)}{1-\sqrt{3}r(\theta)}$

$\therefore\ r(\theta) = \frac{\tan\theta}{1+\sqrt{3}\tan\theta}$. 따라서 $h(\theta) = \frac{r(\theta)}{\tan\theta} = \frac{1}{1+\sqrt{3}\tan\theta}$

$h'(\theta) = \frac{-\sqrt{3}\sec^2\theta}{(1+\sqrt{3}\tan\theta)^2}$. $\quad \therefore\ h'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{2^2} = \frac{-\sqrt{3}\times\frac{4}{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ //