

2021

EBS로
생각
하기

수학 I

- 지수와 로그

Chapter
1

지수와 로그

1. 거듭제곱

1) 거듭제곱

임의의 실수 a 와 양의 정수 n 에 대하여

$$a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a \quad (a \text{를 } n \text{번 곱한 것})$$

를 a 의 n 제곱이라고 한다. 특히 a^2 을 a 의 제곱, a^3 을 a 의 세제곱, \dots 이라 하고, $a^1(=a)$, a^2 , a^3 , \dots 을 통틀어서 a 의 거듭제곱이라고 한다.

2) 거듭제곱근

일반적으로 n 이 2 이상의 자연수일 때, n 제곱하여 실수 a 가 되는 수, 즉 방정식

$$x^n = a$$

를 만족시키는 수 x 를 a 의 n 제곱근이라고 한다.

이때 a 의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, \dots 을 통틀어 a 의 거듭제곱근이라고 한다.

$$\begin{array}{c} x \text{의 } n \text{제곱} \downarrow \\ x^n = a \\ \uparrow a \text{의 } n \text{제곱근} \end{array}$$

[예1]

8의 세제곱근 x 는 $x^3 = 8$ 에서 $x = 2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$

16의 네제곱근 x 는 $x^4 = 16$ 에서 $x = 2, -2, 2i, -2i$

[예2]

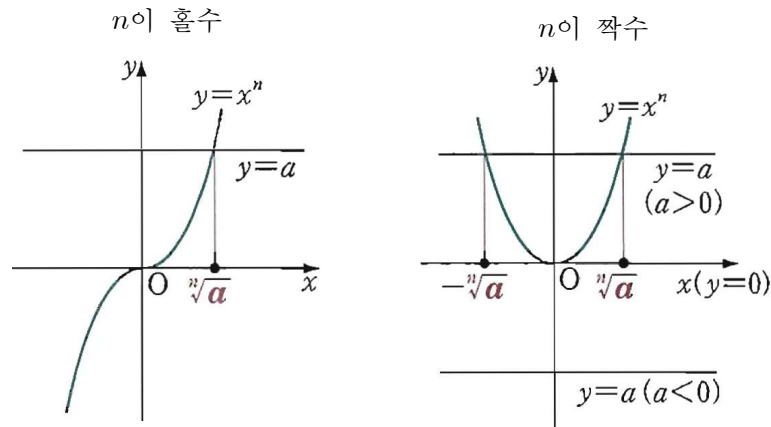
8의 세제곱근 x 는 $x^3 = 8$ 에서 $x = 2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$

세제곱근 8의 의미는 $\sqrt[3]{8} = 2$

16의 네제곱근 x 는 $x^4 = 16$ 에서 $x = 2, -2, 2i, -2i$

네제곱근 16의 의미는 $\sqrt[4]{16} = 2$

3) a 의 실수인 n 제곱근 (n 은 2 이상의 자연수)



	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n 이 짝수	$\sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$	0	없다.

4) 거듭제곱근의 성질

$a > 0, b > 0$ 이고 m, n 은 2 이상의 정수일 때,

- ① $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- ② $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- ③ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$
- ⑤ $\sqrt[n^p]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ (단, p 는 양의 정수)

1. 지수의 확장 : 정수

1) 0 또는 음의 정수인 지수

$a \neq 0$ 이고 n 이 자연수일 때,

❶ $a^0 = 1$ (단, $a \neq 0$)

❷ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (단, $a \neq 0$, n 은 양의 정수)

❸ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (단, $a > 0$, m 은 정수, n 은 2 이상의 정수)

2) 지수가 정수일 때 지수법칙

$a \neq 0, b \neq 0$ 이고 m, n 이 정수일 때,

❶ $a^m a^n = a^{m+n}$

❷ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

❸ $(a^m)^n = a^{mn}$

❹ $(ab)^n = a^n b^n$

2. 지수의 확장 : 유리수

1) 유리수인 지수

$a > 0$ 이고 m, n ($n \geq 2$)이 정수일 때,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ 특히 } a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

2) 지수가 유리수일 때 지수법칙

$a > 0, b > 0$ 이고 r, s 가 유리수일 때,

❶ $a^r a^s = a^{r+s}$

❷ $a^r \div a^s = a^{r-s}$

❸ $(a^r)^s = a^{rs}$

❹ $(ab)^r = a^r b^r$

3. 지수의 확장 : 실수

1) 지수가 실수일 때 지수법칙

$a > 0, b > 0$ 이고 x, y 가 실수일 때,

❶ $a^x a^y = a^{x+y}$

❷ $a^x \div a^y = a^{x-y}$

❸ $(a^x)^y = a^{xy}$

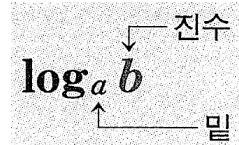
❹ $(ab)^x = a^x b^x$

1. 로그의 뜻

1) 로그

$a > 0, a \neq 1$ 일 때, 임의의 양수 b 에 대하여 $a^x = b$ 를 만족시키는 실수 x 는 오직 하나 존재한다. 이때, x 를 밑으로 하는 b 의 로그라 하고, $x = \log_a b$ 로 나타낸다.

또, b 를 $\log_a b$ 의 진수라고 한다. 곧,



$$a > 0, a \neq 1, b > 0 \text{ 일 때, } a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

[예]

$\log_p(x^2 + px + p)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 정의되기 위한 실수 p 의 조건을 구하여라.

2. 로그의 계산

1) 로그의 성질

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ 일 때,

① $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$

② $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

③ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

④ $\log_a M^k = k \log_a M$ (단, k 는 실수)

[예]

$$\log_a x^3 = 3 \log_a x$$

$$\log_a x^2 = 2 \log_a |x|$$

2) 로그의 밑의 변환

- ❶ $a > 0, a \neq 1, N > 0, c > 0, c \neq 1$ 일 때,

$$\log_a N = \frac{\log_c N}{\log_c a}$$

- ❷ $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ 일 때,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

- ❸ $a > 0, a \neq 1$ 일 때,

$$\log_a b^m = \frac{m}{n} \log_a b$$

- ❹ $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ 일 때,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

- ❺ $a > 0, a \neq 1, b > 0$ 일 때,

$$a^{\log_a b} = b$$

3. 상용로그

1) 상용로그의 뜻

10을 밑으로 하는 로그를 상용로그라고 하며, 양수 N 의 상용로그 $\log_{10}N$ 은 보

통 밑 10을 생략하여

$$\log N$$

으로 나타낸다. 예를 들어 $\log_{10}2$ 는 간단히 $\log 2$ 로 나타낸다.

2) 상용로그 표

$\log 2.25$ 와 같이 진수가 10의 거듭제곱의 꼴이 아닌 상용로그의 값은 상용로그표를 이용하여 대략적인 값을 구할 수 있다.

상용로그표는 0.01의 간격으로 1.00부터 9.99까지의 수에 대한 상용로그의 값을 반올림하여 소수 넷째 자리까지 나타낸 것이다.

예를 들어 상용로그표에서 $\log 2.25$ 의 값을 구하려면 2.2의 가로줄과 5의 세로줄이 만나는 곳에 있는 수 0.3522를 찾으면 된다. 즉

$$\log 2.25 = 0.3522$$

이다.

수	0	1	...	5	6	...
1.1	.0000	.00430212	.0253	...
1.1	.0414	.04530607	.0645	...
...
2.2	.3121	.31113522	.3541	...
2.3	.3617	.36363711	.3729	...
...

수능특강

1. 27의 세제곱근 중 실수인 것을 α , 허수인 것을 각각 β , γ 라 할 때, $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha}$ 의 값은?
- ① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

2. 자연수 n 에 대하여 $(24 \times n^{-3})^{-1}$ 이 자연수가 되도록 하는 n 의 최솟값을 구하시오.

3. $2\sqrt{2}$ 의 6제곱근 중 양의 실수인 것을 α 라 할 때, $\alpha \times 2^{-\frac{5}{4}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

4. 1보다 큰 세 실수 a, b, c 에 대하여

$$\log_a b : \log_{bc} ac = 2 : \log_a bc : 5$$

일 때, $\frac{5}{2} \log_a b - \log_a c$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

5. 두 자연수 a, b 에 대하여 $\log a + \log b = 3 + \log 2$ 를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

- ① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

6. $\log_x(2x+3)=2$ 를 만족시키는 1이 아닌 양의 실수 x 의 값을 구하시오.

7. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 허수 $1+i$ 가 정수 k 의 n 제곱근이 되도록 하는 n 의 최솟값을 p 라 하고, $n=p$ 일 때의 k 의 값을 q 라 하자. $p+q$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)
- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

8. 정의역이 $\{x \mid x > 1\}$ 인 함수 $f(x) = (x^3 \sqrt{x})^{\frac{1}{2}}$ 이 있다. 1보다 큰 자연수 a 에 대하여 $(f \circ f)(a)$ 의 값이 자연수일 때, $(f \circ f)(a)$ 의 최솟값은?
- ① 4 ② 8 ③ 9
 ④ 16 ⑤ 27

9. 두 양의 실수 a, b 에 대하여 두 집합 A, B 가

$$A = \{1, \log_2 ab\}, B = \{2, \log_2 a, \log_2 \sqrt{b^3}\}$$

이고, $A - B = \{3\}$ 일 때, $\log_2 \frac{a}{b}$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$
 ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

10. $\log_3 \sqrt[3]{24} + \log_3 \frac{\sqrt[6]{81^k}}{2}$ 이 자연수가 되도록 하는 10 이하의 자연수 k 의 개수는?

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

11. 1보다 큰 세 실수 a, b, c 가

$$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{3}$$

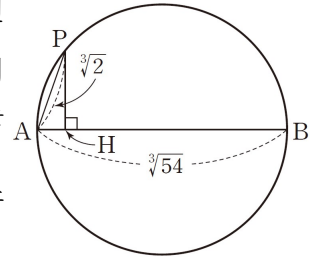
를 만족시킬 때, $\log_a b \div \log_a c$ 의 값은?

- ① $\frac{\sqrt[3]{6}}{3}$ ② $\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$ ③ $\sqrt[3]{6}$
 ④ $2\sqrt[3]{6}$ ⑤ $3\sqrt[3]{6}$

12. 자연수 n 이 $2 \leq n \leq 10$ 일 때, $n^2 - 10n + 21$ 의 n 제곱근 중에 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n 의 값의 합은?

- ① 15 ② 20 ③ 25
 ④ 30 ⑤ 35

- 13.** 그림과 같이 길이가 $\sqrt[3]{54}$ 인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP} = \sqrt[3]{2}$ 이다. 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 PAH의 넓이는 $\frac{q}{2^p + 3^r}$ 이다. $p+q+r$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이고, r 는 정수이다.)



- 14.** $\log_2 n$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 양수 a 의 개수를 $f(n)$ 이라 하자.

- (가) $\log_2 a$ 는 정수이다.
 (나) $\log_a n \times \log_n(n \times a^2)$ 은 자연수이다.

$f(n) = 7$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 k 라 할 때, $\log_4 k$ 의 값을 구하시오. (단, $a \neq 1$)

15. 두 집합 $A = \{x \mid \log_2 x \text{는 자연수}\}$, $B = \{x \mid \log_p x \text{는 자연수}\}$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, p 의 값을 구하시오. (단, p 는 1이 아닌 양의 실수이다.)

(가) $A \cap B = A$

(나) $a \in A, b \in B, 2 \leq a \leq 10, 1 \leq b \leq 1000$ 이고, $\log_a b$ 가 자연수가 되도록 하는 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는 7이다.

수능완성 (나)

16. $x > 1$ 인 실수 x 에 대하여 x 의 제곱근 중 음수인 것을 $f(x)$, x 의 세제곱근 중 실수인 것을 $g(x)$ 라 하자. $(f \circ g)(x)$ 의 값이 정수가 되도록 하는 1보다 큰 실수 x 의 최솟값은?

- ① 8 ② 16 ③ 32
 ④ 64 ⑤ 128

17. 한 변의 길이가 $18^{\frac{1}{4}}$ 인 정삼각형을 밑면으로 하고 높이가 $36\sqrt{6}$ 인 삼각기둥의 부피는?

- ① 81 ② 162 ③ 243
 ④ 324 ⑤ 405

18. 방정식 $3x^2 - 6x + 1 = 0$ 의 두 실근을 각각 $\log \alpha, \log \beta$ 라 할 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

- ① 4 ② $4\sqrt{5}$ ③ 20
 ④ $20\sqrt{5}$ ⑤ 100

19. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이다. $a > b > 1$ 인 두 정수 a, b 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(\log_4 a, 0), (\log_4 b, 0)$ 을 지날 때, 함수 $f(x)$ 의 최솟값은?

- ① -4 ② -2 ③ -1
 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

20. 등식 $\frac{3}{\log_2 a} = \frac{2 + \log_3 a}{\log_9 a}$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은?

- ① $\frac{2\sqrt{3}}{27}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$
 ④ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

21. 이웃한 두 변의 길이가 각각 a, b 인 직사각형의 둘레의 길이를 l , 넓이를 S 라 하자.
 한 변의 길이가 l 인 정사각형의 넓이가 $16S$ 일 때, $\log_b \sqrt[3]{ab}$ 의 값은? (단, $b \neq 1$)

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

수능완성 (가)

22. 이차방정식 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\left(\sqrt{3^\alpha} + \frac{6}{\sqrt{3^\beta}}\right)\left(\sqrt{3^\beta} + \frac{6}{\sqrt{3^\alpha}}\right)$ 의

값은?

- ① 21 ② 23 ③ 25
 ④ 27 ⑤ 29

23. $\left(\frac{2^{-2}}{27}\right)^{\frac{12}{n}}$ 이 자연수가 되도록 하는 모든 정수 n 의 개수는?

- ① 2 ② 3 ③ 4
 ④ 5 ⑤ 6

24. 두 실수 x, y 에 대하여 $2^x + 2^{-y} = 6$, $8^x + 8^{-y} = 72$ 가 성립할 때, $4^x + 4^{-y}$ 의 값을 구하시오.

25. 세 수 $A = \sqrt{\sqrt{3}}$, $B = \sqrt[6]{4}$, $C = \sqrt[3]{\sqrt{5}}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
④ $B < C < A$ ⑤ $C < B < A$

26. 1이 아닌 세 양수 a, b, c 가 $a^2=b^3=c^4$ 을 만족시킬 때, $\log_{\sqrt[3]{a}}b + 2\log_{\sqrt{b}}c$ 의 값은?

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

27. $a > b > 1$ 인 두 실수 a, b 가 다음 조건을 만족시킬 때, $\log_2(a-b)$ 의 값은?

(가) $\log_{a+b}4$
 (나) $\log_2 b \times \log_{b^2} a + \frac{1}{\log_b 4} = \frac{3}{2}$

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

28. 양수 x 가 다음 조건을 만족시킬 때, $30\log x$ 의 값을 구하시오.

(가) $1 < \log x < 2$

(나) $\log 5x^2 - \log \frac{\sqrt{x}}{2}$ 의 값은 정수이다.

정답

- 1) [정답] ②
- 2) [정답] 6
- 3) [정답] ②
- 4) [정답] ④
- 5) [정답] ⑤
- 6) [정답] 3
- 7) [정답] ③
- 8) [정답] ④
- 9) [정답] ④
- 10) [정답] ④
- 11) [정답] ②
- 12) [정답] ③
- 13) [정답] 11
- 14) [정답] 6
- 15) [정답] 8
- 16) [정답] ④
- 17) [정답] ②
- 18) [정답] ⑤
- 19) [정답] ⑤
- 20) [정답] ②
- 21) [정답] ④
- 22) [정답] ③
- 23) [정답] ⑤
- 24) [정답] 20
- 25) [정답] ④
- 26) [정답] ③
- 27) [정답] ⑤
- 28) [정답] 40

EBS로

생각하기

수학 I

지수와 로그



최종필

- 한양대 공과대학 4년 전액 입학 및 졸업
- 오르비 클래스
- 영통 명인학원