* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 가형 19번.

n은 2 이상의 자연수, $1 \le a < b \le n$, $1 \le c < d \le n$, a, b, c, d는 자연수.

$x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 직사각형의 둘레의 길이가 $2n$ → $b-a=X$를 확률변수라 할 때 $E(X)=?$

$\therefore 2(b-a)+2(d-c)=2n$에서 $(b-a)+(d-c)=n$.

$b-a=1 \to d-c=n-(b-a)=n-1$. $\therefore$ $b-a=k$라 하면 $d-c=n-k$.

확률에 앞서 경우의 수로 먼저 접근하면,

$X=b-a=1$. $\to n-1$.

$X=b-a=2$. $\to (n-2)\times 2$

$X=b-a=3$. $\to (n-3)\times 3$.

$\cdots\cdots$

$X=b-a=n-1$ $\to n-1$.

예를 들어 $n=10$이라 하면

$b-a=2 \to (a,b)=(1,3)(2,4)(3,5)\cdots(8,10)$

$d-c=8 \to (c,d)=(1,9)(2,10)$

$\therefore$ 경우의 수는 $8\times 2 = (n-2)\times 2$.

경우의 수의 총합은 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cdot k = n\times\frac{(n-1)\cdot n}{2}-\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} = (n-1)\cdot n\cdot\left(\frac{3n-2n+1}{6}\right)=\underbrace{\frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{6}}_{All}$

$\therefore$ 확률변수 X의 이산확률분포는 다음과 같다.

X	1	2	3	$\cdots$	k	$\cdots$	$n-1$	계
$P(X=k)$	$\frac{n-1}{All}$	$\frac{(n-2)\cdot 2}{All}$	$\frac{(n-3)\cdot 3}{All}$	$\cdots$	$\frac{(n-k)\cdot k}{All}$	$\cdots$	$\frac{n-1}{All}$	1

$\therefore E(X)=\dfrac{1}{All}\times\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot(n-k)\cdot k$

$=\dfrac{6}{(n-1)\cdot n(n+1)}\times\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(nk^2-k^3)$

$=\dfrac{6}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}\times\left\{n\times\dfrac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}-\dfrac{(n-1)^2\cdot n^2}{4}\right\}$

$=\dfrac{6\cdot(n-1)\cdot n^2}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}\times\left\{\dfrac{4n-2}{12}-\dfrac{3n-3}{12}\right\}=\dfrac{6n}{n+1}\times\dfrac{n+1}{12}=\dfrac{n}{2}$.

(가) $b-a$는 $(1,2)(2,3)$ 등의 1, $(1,3)(2,4)$ 등의 2, $\cdots$ $(1,n)$까지의 $(n-1)$의 값을 가진다.

(나) $b-a=k$, $d-c=n-k$. $\therefore c=d-n+k$. $d\le n$.

$c=d-n+k\le n-n+k=k$.

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3수학 나형 19번.

$P_0(0)$, 주사위를 던져서 (A) 1, 2, 3, 6 → x축 방향으로 2 ($p=\frac{2}{3}$)

(B) 4, 5 → x축 방향으로 -1 ($p=\frac{1}{3}$)

종료 조건 : (1) P의 좌표가 9 이상, (2) P의 좌표가 -4이하, (3) 시행 횟수 6.

종료시 P의 위치를 확률변수 X라 할 때, $E(X)=?$

→ 6회 이전에 시행을 종료하려면 네 번 연속 사건 B 또는 다섯번 연속 사건 A가 나오는 경우다.

그 외에는 $n(A)+n(B)=6$ 이면서 4회나 5회에 종료되지 않는 경우이어야 한다.

→ 확률변수 X의 범위를 정리하면

$X=-4$ (4회 종료), $X=10$ (5회 종료), $X=-3, 0, 3, 6, 9$.

$X=-3$ or 9일 때는 $X=-4$ or 10인 경우가 발생되지 않는 경우에 한정된다. 또한 $X=0$일 때도 마찬가지.

→ $X=-3$ ($n(A)=1$, $n(B)=5$) → 처음부터 네 번 연속 사건 B가 나오면 불가.

∴ 기준횟수를 사건 A라 하면 전체 ${}_6C_1$ 에서 2를 뺀다. (BBBBAB, BBBBBA)

$X=0$ ($n(A)=2$, $n(B)=4$) → ${}_6C_2-1$.

$X=9$. ($n(A)=5$, $n(B)=1$) → ${}_6C_5-1$ (AAAAAB)

따라서 확률분포를 나타내면 다음과 같다.

$P(X=-4)={}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4$, $P(X=-3)=({}_6C_1-2)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^5$, $P(X=0)=({}_6C_2-1)\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^4$

$P(X=3)={}_6C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $P(X=6)={}_6C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $P(X=9)=({}_6C_5-1)\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)$

$P(X=10)={}_5C_5\left(\frac{2}{3}\right)^5$.

$$\therefore E(X)=(-4)\times\frac{1}{3^4}+10\times\frac{32}{3^5}+\frac{(-3)\times4\times2+0+3\times20\times8+6\times15\times16+9\times5\times32}{3^6}$$

$$=\frac{-12+320-8+160+480+480}{3^5}=\frac{1420}{243}.$$

(가) $=10$, (나) $={}_6C_1-2=4$, (다) $={}_6C_5-1=5$.