

새로운 평형점과 물체와 용수철이 분리되는 순간

Yeop's Physics Training 저자
서울대학교 전기정보공학부 도규엽



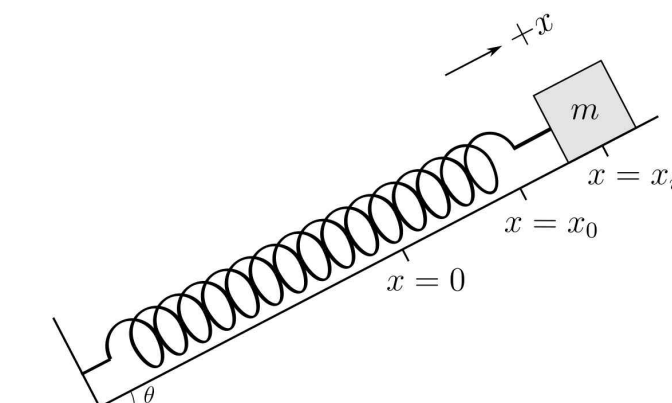
2021학년도 6월 모의고사에서는 용수철에 관한 문제가 출제되었다.

해당하는 문제와 관련해서 물리적으로 중요한 요소들을 분석해보고자 한다.

다음의 내용은 문제와 관련된 중요한 사항들을 내가 분석해본 결과이다.

상황에 따라 조금씩 달라질 수 있으므로, 너무 단순 암기 형식으로 사용하지 말고 상황을 이해하기를 바란다. 하지만, 상황을 이해하기 싫다면 적어도 이것은 기억해둔다면, 혹시나 나중에 도움이 되는 일이 있지 않을까 생각한다.

다음과 같이 경사각이 θ 인 경사면 위에 $x = x_i$ 인 점에 질량 m 인 물체를 용수철과 연결한 후 가만히 놓았다고 하자. $x = 0$ 은 물체에 작용하는 힘이 평형을 이루는 점으로 설정한다. 용수철 상수는 k 이며, 늘어나지 않은 상태에서 용수철의 한쪽 끝은 $x = x_0$ 에 위치한다.



혹의 법칙에 따라 물체가 x 에 위치하였을 때 물체가 용수철에 의해 받는 힘 $F_{s,x}$ 는

$$F_{s,x} = -k(x - x_0)$$

이다. 단위벡터를 이용한 표시는 고등학생들이 어색할 수 있으므로, 부호를 이용해서 방향을 표시하겠다.

물체에 작용하는 중력의 빗면과 나란한 성분은

$$-mg \sin \theta$$

이다.

$x=0$ 에서 물체가 힘의 평형을 이루므로, 뉴턴의 제2법칙을 사용하면,

$$0 = F_{s,x} - mg \sin \theta$$

$$F_{s,x} = mg \sin \theta$$

$$-k(0 - x_0) = mg \sin \theta$$

$$kx_0 = mg \sin \theta$$

를 얻는다.

물체가 x 에 위치하였을 때, 물체에 작용하는 알짜힘 F_x 를 구해보자.

$$\begin{aligned} F_x &= F_{s,x} + (-mg \sin \theta) \\ &= -k(x - x_0) - mg \sin \theta \\ &= -kx + kx_0 - mg \sin \theta. \end{aligned}$$

여기서 $kx_0 = mg \sin \theta$ 임을 이용하면,

$$F_x = -kx$$

를 얻는다.

이 식을 해석하면 이와 같은 상황에서는 $x=0$ 을 마치 수평면에서 연결된 물체와 용수철의 단진동의 중심과 같이 생각해도 된다는 말이다.

즉 물체는 $x=0$ 을 중심으로 하여 단진동 운동을 한다.

물체에 일을 하는 힘은 탄성력, 중력이 있는데 두 힘 모두 보존력이므로 시스템의 역학적 에너지는 보존된다. 이 때 탄성력에 의한 퍼텐셜 에너지와 중력에 의한 퍼텐셜 에너지의 합을 물체의 총 퍼텐셜 에너지라고 정의하자.

퍼텐셜 에너지는 항상 기준을 정해야 하는데, 나는 $x=0$ 인 곳을 총 퍼텐셜 에너지가 0인 곳으로 설정하겠다.

물체가 $x=x_f$ 에 위치하였을 때, 물체의 운동에너지를 구해보겠다.

물체가 $x=0$ 에서 $x=x_f$ 로 이동할 때,

$$(\text{알짜힘이 한 일}) = \int_0^{x_f} F_x dx = \int_0^{x_f} -kx dx = -\frac{1}{2} kx_f^2$$

을 얻는다.

일-에너지 정리에 따라

$$(\text{물체의 운동에너지 변화량}) = -\frac{1}{2} kx_f^2$$

이며, 역학적 에너지가 보존됨을 이용하면

$$(\text{물체의 퍼텐셜 에너지 변화량}) = \frac{1}{2} kx_f^2$$

이다.

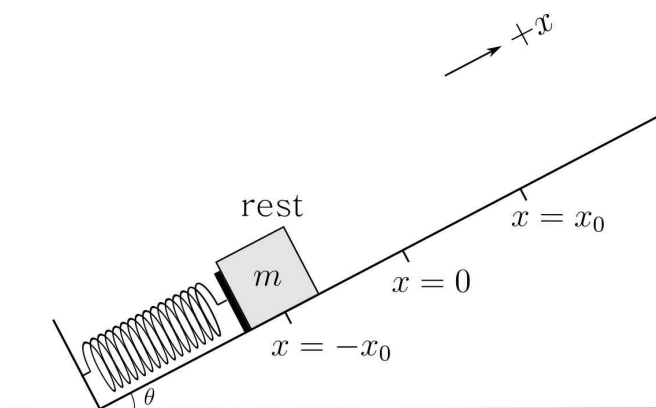
요약하면, 단진동의 중심은 힘의 평형점 $x=0$ 이며, $x=0$ 에서 물체의 총 퍼텐셜 에너지를 0으로 설정하면, 물체가 $x=x_f$ 에 위치할 때 물체의 퍼텐셜 에너지는

$$\frac{1}{2} kx_f^2$$

이다.

다음으로는 물체와 용수철이 분리되는 상황을 보자.

다음과 같이 물체가 힘의 평형을 이루는 위치를 $x=0$ 으로 설정하자. 늘어나지 않은 상태에서 용수철의 한 쪽 끝은 $x=x_0$ 에 위치하며, 물체를 이용해 용수철을 압축해 물체를 $x=-x_0$ 에 위치시킨 후 가만히 놓았다고 하자.



많은 사람들이 물체와 용수철이 분리되는 시점이, 물체의 속력이 최대가 되는 $x=0$ 일 것이라고 생각하나 이는 잘못된 생각이다.

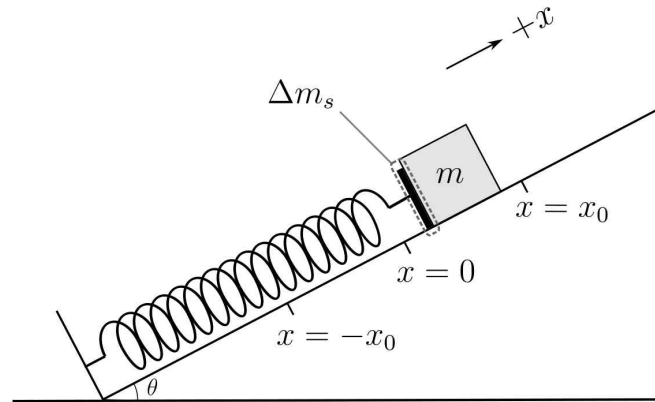
앞에서 용수철과 물체가 연결된 경우를 설명한 적이 있다. 그 이유에 따라 다음과 같은 운동에서 $x=0$ 일 때 물체의 운동에너지가 최대가 되므로, 물체의 속력이 최대가 된다는 것을 알 수 있다. 하지만 이때가 용수철과 물체가 분리되는 시점이 아니다.

물체가 $x < x_0$ 인 x 에 위치하였을 때, 물체와 용수철이 분리되지 않음을 증명하겠다.

증명은 귀류법(contradiction)을 이용하고자 한다.

물체가 $x < x_0$ 인 x 에서 용수철과 분리되었다고 가정하자.

물체가 용수철과 분리되기 직전으로부터 매우 작은 시간 Δt 가 흐른 후의 상황을 분석해보자.



용수철이 물체와 접촉하고 있는 가장 앞부분에서 매우 작은 질량을 Δm_s 라고 하자.

물체와 용수철이 분리되었으므로, Δm_s 가 받는 힘은 훅의 법칙에 따라

$$-k(x-x_0)$$

인데 $x < x_0$ 이므로,

$$-k(x-x_0) > 0$$

이다. Δm_s 에 뉴턴의 제2법칙을 적용하면,

$$(\Delta m_s \text{의 가속도}) = \frac{-k(x-x_0)}{\Delta m_s}.$$

$\Delta m_s \rightarrow 0$ 임을 고려하면, $(\Delta m_s \text{의 가속도})$ 는 $+\infty$ 이다.

반면, 물체의 가속도는 $-g \sin \theta$ 이다.

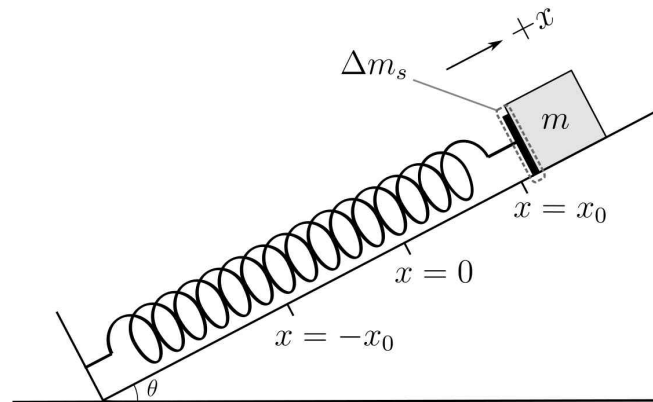
$(\Delta m_s \text{의 가속도})$ 가 물체의 가속도보다 크므로, 물체와 용수철이 분리되었다는 가정에 모순이다.

앞에서 얻는 결과를 통해 물체가 $x < x_0$ 에서 용수철과 분리되지 않음을 알고 있다.

물체와 용수철이 분리되는 위치가 $x = x_0$ 임을 보이고 싶으므로, 귀류법(contradiction)을 이용하여 물체와 용수철이 $x = x_0$ 에서 분리되지 않는다면 모순이 생김을 보이겠다.

물체와 용수철이 물체와 용수철이 $x < x_0$ 과 $x = x_0$ 에서 분리되지 않았다고 가정하자.

물체가 $x = x_0$ 에 위치한 시점으로부터 매우 작은 시간 Δt 만큼 흐른 후의 상황을 분석해보자.



물체와 용수철이 분리되지 않았다면, 물체와 용수철이 서로 연결된 것이 아니므로 서로를 미치는 힘이 작용한다. 물체와 용수철이 서로를 미치는 힘의 크기를 f_1 이라고 하자.

Δm_s 에 작용하는 힘은 용수철에 의한 탄성력 $-k(x-x_0)$ 와 물체가 미치는 힘 $-f_1$ 이 있다. 부호를 통해 힘의 방향을 나타내었다.

물체에 작용하는 힘은 중력 $-mg\sin\theta$ 와 Δm_s 가 물체를 미치는 힘 f_1 이 있다.

물체와 용수철이 분리되지 않았으므로, 물체와 Δm_s 의 가속도를 a 로 같다고 할 수 있다.

Δm_s 에 대해 뉴턴의 제 2법칙을 사용하면,

$$(\Delta m_s)a = -k(x-x_0) - f_1$$

이다. $\Delta m_s \rightarrow 0$ 임을 위 식에 대입하면,

$$0 = -k(x-x_0) - f_1$$

이다. 이항하면,

$$f_1 = -k(x-x_0) < 0$$

이므로 f_1 이 0보다 크다는 것에 모순이다.

따라서 물체와 용수철은 용수철이 원래 길이에 도달할 때, 즉 $x = x_0$ 의 위치일 때 분리된다.

글 작성: 서울대학교 전기정보공학부 도규엽

그림: 서울대학교 의예과 이정빈

내용 검토: 서울대학교 전기정보공학부 이하준

글 수정: 서울대학교 식물생산과학부 공신헌