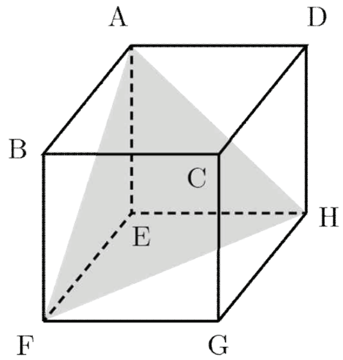
V. 합의 법칙, 곱의 법칙

V001

○○
(1996-인문예체능17/자연17)

오른쪽 정육면체에서 임의의 세 꼭짓점을 택하여 삼각형을 만들 때, 그림과 같은 정삼각형과 합동인 삼각형을 만들 수 있는 방법의 수는? [1.5점][1)]

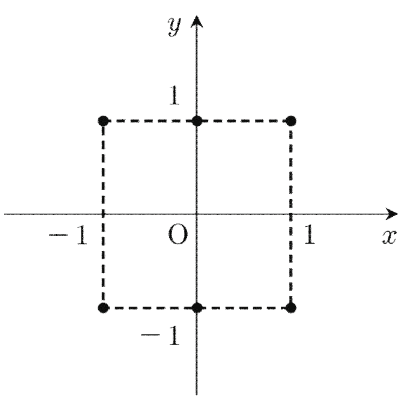


① 4 ② 6 ③ 8
④ 12 ⑤ 24

V002

○○○
(2001-인문20/예체능20)

좌표평면 위에 여섯 개의 점 $(1,\ 1)$, $(1,\ -1)$, $(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(-1,\ -1)$이 있다. 이 중 세 점을 지나는 이차함수 $y=f(x)$의 개수는? [2점][2)]



① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

V003

○○○
(2005(9)-가형25/나형25)

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 함수 $f\ :A\to A$의 개수를 구하시오. [4점][3)]

(가) 함수 f는 일대일 대응이다. (나) $f(1)=7$ (다) $k\geq 2$이면 $f(k)\leq k$이다.

V004

○○
(2006(9)-나형8)

집합 S_1, S_2, S_3은 다음과 같다.

$S_1=\{1,\ 2\}$

$S_2=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

$S_3=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

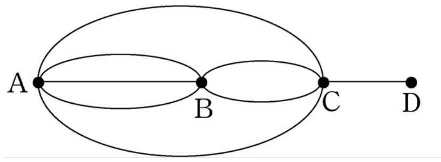
집합 S_1에서 한 개의 원소를 선택하여 백의 자리의 수, 집합 S_2에서 한 개의 원소를 선택하여 십의 자리의 수, 집합 S_3에서 한 개의 원소를 선택하여 일의 자리의 수로 하는 세 자리의 수를 만들 때, 각 자리의 수가 모두 다른 세 자리의 수의 개수는? [3점][4)]

① 8 ② 12 ③ 16
④ 20 ⑤ 24

V005

○○ (2007(6)-가형26이산수학)

다음 그림은 네 지점 A, B, C, D 사이의 도로망을 나타낸 것이다. 도로를 따라 지점 A에서 지점 D까지 가는 방법의 수는? (단, 한 번 지나간 지점은 다시 지나지 않는다.)[3점][5]

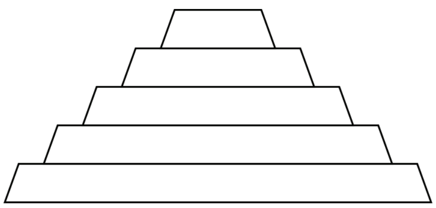


① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

V006

●●● (2009(6)-가형25/나형25)

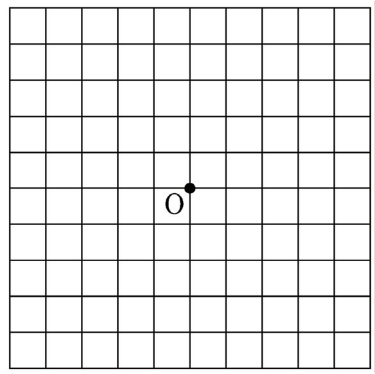
그림과 같은 모양의 종이에 서로 다른 3가지 색을 사용하여 색칠하려고 한다. 이웃한 사다리꼴에는 서로 다른 색을 칠하고, 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠한다. 5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법의 수를 구하시오. [4점][6]



V007

●●● (2009(9)-나형11)

그림과 같이 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 1인 바둑판 모양의 도로망이 있다. 로봇이 한 번 움직일 때마다 길을 따라 거리 1만큼씩 이동한다. 로봇은 길을 따라 어느 방향으로도 움직일 수 있지만, 한 번 통과한 지점을 다시 지나지는 않는다. 이 로봇이 지점 O에서 출발하여 4번 움직일 때, 가능한 모든 경로의 수는? (단, 출발점과 도착점은 일치하지 않는다.) [4점][7]

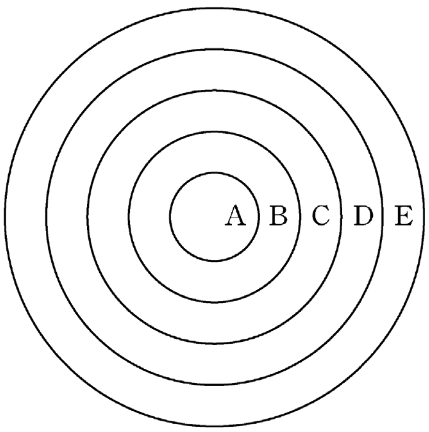


① 88 ② 96 ③ 100
④ 104 ⑤ 112

V008

●●● (2010(6)-나형29)

그림과 같이 중심이 같고 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3, 4, 5인 다섯 개의 원이 있다. 이 다섯 개의 원을 경계로 하여 안에서부터 다섯 개의 영역 A, B, C, D, E로 나누고, 서로 다른 3가지 색의 물감을 칠하여 색칠된 문양을 만들려고 한다. 각 영역은 1가지 색으로만 칠하고, 이웃한 영역은 서로 다른 색을 칠한다. 3가지 색의 물감은 각각 10통 이하만 사용할 수 있고 물감 1통으로는 영역 A의 넓이만큼만 칠할 수 있을 때, 만들 수 있는 서로 다르게 색칠된 문양의 개수는? [4점][8)]



① 9　② 12　③ 15
④ 18　⑤ 21

V009

○○ (2010(6)-가형27이산수학)

두 문자 a, b를 중복을 허락하여 만든 6자리 문자열 중에서 다음 조건을 만족시키는 문자열의 개수는? [3점][9)]

(가) 첫 문자는 a이다.
(나) a끼리는 이웃하지 않는다.

① 16　② 14　③ 12
④ 10　⑤ 8

V010

○○○ (2010-나형14)

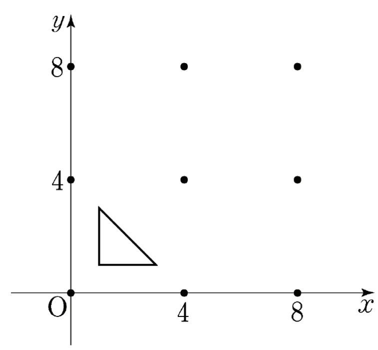
두 인형 A, B에게 색이 정해지지 않은 셔츠와 바지를 모두 입힌 후, 입힌 옷의 색을 정하는 컴퓨터 게임이 있다. 서로 다른 모양의 셔츠와 바지가 각각 3개씩 있고, 각 옷의 색은 빨강과 초록 중 하나를 정한다. 한 인형에게 입힌 셔츠와 바지는 다른 인형에게 입히지 않는다. A인형의 셔츠와 바지의 색은 서로 다르게 정하고, B인형의 셔츠와 바지의 색도 서로 다르게 정한다. 이 게임에서 두 인형 A, B에게 셔츠와 바지를 입히고 색을 정할 때, 그 결과로 나타날 수 있는 경우의 수는? [4점][10)]

① 252　② 216　③ 180
④ 144　⑤ 108

V011

●●● (2011(6)-가형17/나형17)

좌표평면 위에 9개의 점 $(i,\ j)$ $(i=0,\ 4,\ 8,\ j=0,\ 4,\ 8)$이 있다. 이 9개의 점 중 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형 중에서 내부에 세 점 $(1,\ 1)$, $(3,\ 1)$, $(1,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 포함하는 사각형의 개수는? [4점][11)]



① 13　② 15　③ 17
④ 19　⑤ 21

V012

○○
(2020(9)-가형4/나형5)

다음 조건을 만족시키는 두 자리의 자연수의 개수는? [3점][12)]

(가) 2의 배수이다. (나) 십의 자리의 수는 6의 약수이다.

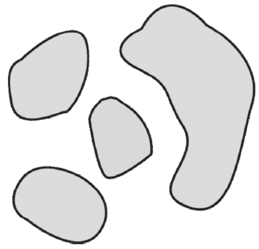
① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

V. 순열

V013

●●●
(1998-인문예체능28/자연28)

오른쪽 그림과 같이 4개의 섬이 있다. 3개의 다리를 건설하여 4개의 섬 모두를 연결하는 방법의 수를 구하시오. [3점][13)]



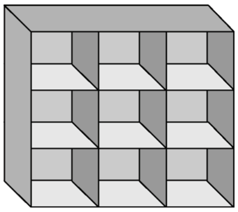
V014

○○
(2005(예비)-나형30)

그림과 같이 여섯 칸으로 나누어진 직사각형의 각 칸에 6개의 수 1, 2, 4, 6, 8, 9를 한 개씩 써 넣으려고 한다. 각 가로줄에 있는 세 수의 합이 서로 같은 경우의 수를 구하시오. [3점][14)]

V015
○○
(2005(6)-가형29확률통계)

세 종류의 상품이 3개씩 있다. 이 상품을 그림과 같은 진열장에 한 칸에 하나씩 모두 진열하고자 한다. 가로줄에는 서로 다른 세 종류의 상품을 진열하고 세로줄에는 같은 종류의 상품이 이웃하지 않게 진열하는 방법의 수는? [4점]15)



① 24 ② 30 ③ 36
④ 42 ⑤ 48

V016
○
(2006(6)-나형21)

1, 2, 3, 4, 5, 6을 한 번씩만 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수 중에서 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 모두 3의 배수인 자연수의 개수를 구하시오. [3점]16)

V017
○○
(2006(6)-가형22)

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에서 A로의 함수 중에서 다음 두 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]17)

(가) 함수 f는 일대일 대응이다. (나) 정의역 A의 한 원소 n에 대하여 $f(n+1)-f(n)=5$이다.

V018
○○○
(2007(6)-가형15/나형15)

어느 회사에서 사원 연수를 위하여 네 지역 서울, 부산, 광주, 대구에서 각각 3명씩 모두 12명의 사원을 선발하였다. 같은 지역에서 선발된 사원끼리는 같은 조에 속하지 않도록 각 지역에서 한 명씩 선택하여 4명으로 구성된 3개의 조로 나누는 방법의 수는? [3점]18)

① 80 ② 144 ③ 216
④ 240 ⑤ 288

V019

○
(2007(9)-나형6)

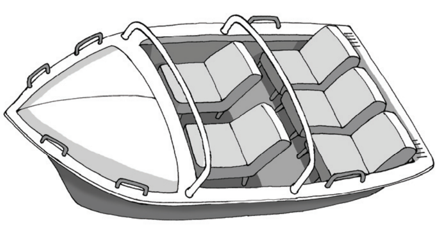
여학생 2명과 남학생 4명이 순서를 정하여 차례로 뜀틀 넘기를 할 때, 여학생 2명이 연이어 뜀틀 넘기를 하게 되는 경우의 수는? [3점][19]

① 120 ② 180 ③ 240
④ 300 ⑤ 360

V020

○○○
(2007-나형23)

어른 2명과 어린이 3명이 함께 놀이 공원에 가서 어느 놀이기구를 타려고 한다. 이 놀이기구는 그림과 같이 앞줄에 2개, 뒷줄에 3개의 의자가 있다. 어린이가 어른과 반드시 같은 줄에 앉을 때, 5명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하시오. [4점][20]



V021

○
(2008(9)-나형7)

여학생 2명이 먼저, 남학생 3명이 나중에 한 명씩 차례로 놀이공원에 입장하려고 한다. 이 학생 5명이 놀이공원에 입장하는 방법의 수는? [3점][21]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

V022

○○
(2008-나형9)

1부와 2부로 나누어 진행하는 어느 음악회에서 독창 2팀, 중창 2팀, 합창 3팀이 모두 공연할 때, 다음 두 조건에 따라 7팀의 공연 순서를 정하려고 한다.

(가) 1부에는 독창, 중창, 합창 순으로 3팀이 공연한다.
(나) 2부에는 독창, 중창, 합창, 합창 순으로 4팀이 공연한다.

이 음악회의 공연 순서를 정하는 방법의 수는? [3점][22]

① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

V023

●●● (2009(6)−가형28이산수학)

a, b, c, d, e를 모두 사용하여 만든 다섯 자리 문자열 중에서 다음 세 조건을 만족시키는 문자열의 개수는? [3점][23)]

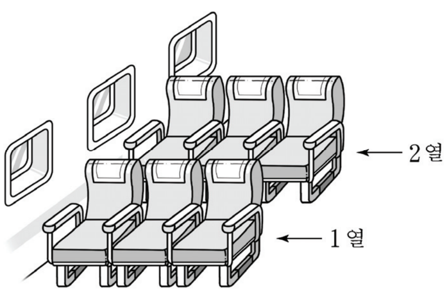
(가) 첫째 자리에는 b가 올 수 없다. (나) 셋째 자리에는 a도 올 수 없고 b도 올 수 없다. (다) 다섯째 자리에는 b도 올 수 없고 c도 올 수 없다.

① 24 ② 28 ③ 32
④ 36 ⑤ 40

V024

○○○ (2009(9)−가형23/나형23)

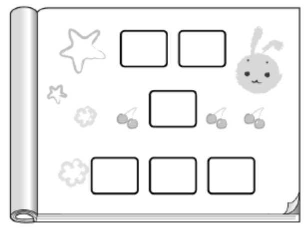
할아버지, 할머니, 아버지, 어머니, 아들, 딸로 구성된 가족이 있다. 이 가족 6명이 그림과 같은 6개의 좌석에 모두 앉을 때, 할아버지, 할머니가 같은 열에 이웃하여 앉고, 아버지, 어머니도 같은 열에 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. [4점][24)]



V025

○○ (2010(9)−나형28)

다음 그림의 빈 칸에 6장의 사진 A, B, C, D, E, F를 하나씩 배치하여 사진첩의 한 면을 완성할 때, A와 B가 이웃하는 경우의 수는? (단, 옆으로 이웃하는 경우만 이웃하는 것으로 한다.) [4점][25)]



① 128 ② 132 ③ 136
④ 140 ⑤ 144

V026

○○ (2018(6)−가형13)

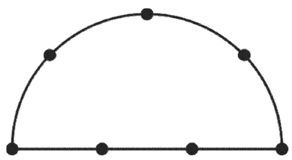
이틀 동안 진행하는 어느 축제에 모두 다섯 개의 팀이 참가하여 공연한다. 매일 두 팀 이상이 공연하도록 다섯 팀의 공연 날짜와 공연 순서를 정하는 경우의 수는? (단, 공연은 한 팀씩 하고, 축제 기간 중 각 팀은 1회만 공연한다.) [3점][26)]

① 180 ② 210 ③ 240
④ 270 ⑤ 300

V. 조합

V027
○○
(1995-인문예체능7/자연7)

아래 그림과 같이 반원 위에 7개의 점이 있다. 이 중 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는? [1점][27)]



① 34 ② 33 ③ 32
④ 31 ⑤ 30

V028
○○
(2000-인문29/자연29)

1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 임의로 선택할 때, 선택된 두 수의 곱이 짝수가 되는 경우의 수를 구하시오. [3점][28)]

V029
○○○
(2005(예비)-가형13/나형13)

자연수 n에 대하여 원소가 $2n$개인 집합 S에서 2개의 원소를 뽑는 경우의 수 ${}_{2n}\mathrm{C}_2$를 다음과 같은 방법으로 구하였다.

> S를 원소가 n개이고 서로소인 두 집합 A와 B로 나누고, 다음과 같은 경우를 생각한다.
> (i) A와 B중 한 집합에서만 두 개의 원소를 뽑는 경우
> (ii) A와 B각 집합에서 원소를 한 개씩 뽑는 경우
> (i)의 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이고 (ii)의 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다. (i)과 (ii)둘 중에서 한 가지 경우만 일어날 수 있으므로 합의 법칙에 의하여
> ${}_{2n}\mathrm{C}_2 = \boxed{(가)} + \boxed{(나)}$이다.

위에서 (가)와 (나)에 알맞은 것은? [3점][29)]

	(가)	(나)
①	${}_n\mathrm{C}_2 \times {}_n\mathrm{C}_2$	${}_n\mathrm{C}_1 \times {}_n\mathrm{C}_1$
②	$2{}_n\mathrm{C}_2$	${}_n\mathrm{C}_1 \times {}_n\mathrm{C}_1$
③	$3{}_n\mathrm{C}_2$	${}_n\mathrm{C}_1 \times {}_n\mathrm{C}_1 - {}_n\mathrm{C}_2$
④	$2{}_n\mathrm{C}_2$	${}_n\mathrm{C}_1 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_1$
⑤	${}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_1$	$2{}_n\mathrm{C}_2$

V030

○○
(2005(6)-나형22)

2005학년도 대학수학능력시험에서 과학탐구 영역을 선택하는 학생은 물리Ⅰ, 화학Ⅰ, 생물Ⅰ, 지구과학Ⅰ, 물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ의 8개 과목 중에서 최대 4과목까지 응시할 수 있다. 단, 물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ의 4개 과목에서는 2과목까지만 선택할 수 있다. 어떤 학생이 과학탐구 영역에서 3개 과목을 선택하려고 할 때, 선택 가능한 모든 경우의 수를 구하시오. [4점][30]

V031

○○○
(2005(6)-가형25/나형25)

갑은 컴퓨터를 이용하여 2000부터 2999까지의 네 자리 자연수를 을에게 전송하려고 한다. 전송 과정에서 일어날지도 모르는 오류를 을이 확인할 수 있도록 하기 위하여, 갑은 다음 규칙에 따라 전송하는 수의 끝에 숫자 하나를 덧붙여서 다섯 자리 수를 전송한다.

'네 자리 수의 각 자리의 수의 합이 짝수이면 0, 홀수이면 1을 전송하는 수의 끝에 덧붙인다.'

예를 들면, 2026은 20260으로, 2102는 21021로 전송한다. 갑이 전송하기 위하여 끝에 0을 덧붙인 다섯 자리 수 중에서 가운데 세 자리의 각각의 숫자가 모두 다른 경우의 수를 구하시오. [4점][31]

V032

○○○
(2005(6)-가형29이산수학)

자연수 n에 대하여 등식

$$_{n}\mathrm{C}_{n}+{}_{n+1}\mathrm{C}_{n}+{}_{n+2}\mathrm{C}_{n}={}_{n+3}\mathrm{C}_{n+1}$$

이 성립함을 다음과 같이 증명하였다.

〈증명〉

$_{n+3}\mathrm{C}_{n+1}$은 집합 $A=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n+3\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수이다. 이것을 다른 방법으로 세어보자.

(ⅰ) 집합 A의 부분집합 중에서, 가장 큰 원소가 $\boxed{\text{(가)}}$ 이고 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수는 $_{n}\mathrm{C}_{n}$이다.

(ⅱ) 집합 A의 부분집합 중에서, 가장 큰 원소가 $\boxed{\text{(나)}}$ 이고 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수는 $_{n+1}\mathrm{C}_{n}$이다.

(ⅲ) 집합 A의 부분집합 중에서, 가장 큰 원소가 $\boxed{\text{(다)}}$ 이고 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수는 $_{n+2}\mathrm{C}_{n}$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) 중에서 한 가지 경우만 일어날 수 있으므로 합의 법칙에 의하여

$_{n}\mathrm{C}_{n}+{}_{n+1}\mathrm{C}_{n}+{}_{n+2}\mathrm{C}_{n}={}_{n+3}\mathrm{C}_{n+1}$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은? [4점][32]

	(가)	(나)	(다)
①	$n-1$	n	$n+1$
②	n	$n+1$	$n+2$
③	$n+1$	$n+2$	$n+3$
④	$n+2$	$n+1$	n
⑤	$n+3$	$n+2$	$n+1$

V033

○○○
(2005(6)−가형30이산수학)

어떤 회사에서 신규 직원 5명을 3개의 팀으로 나눈 후, 대전, 대구, 광주의 세 지점에 각각 한 팀씩 배치하려고 한다. 이들 신규 직원 5명을 이와 같은 방법으로 배치하는 경우의 수를 구하시오. [4점][33)]

V034

○○
(2005(9)−가형21/나형21)

3개의 증권 회사, 3개의 통신 회사, 4개의 건설 회사가 있다. 증권, 통신, 건설 각 업종별로 적어도 하나의 회사를 선택하여 총 4개의 회사에 입사원서를 내는 경우의 수를 구하시오. [3점][34)]

V035

○○
(2006(6)−나형9)

A지역에는 세 곳, B지역에는 네 곳, C지역에는 다섯 곳, D지역에는 여섯 곳의 관광지가 있다. 이 중에서 세 곳을 선택하여 관광하려고 할 때, 선택한 세 곳이 모두 같은 지역이 되는 경우의 수는? [3점][35)]

① 20 ② 25 ③ 30
④ 35 ⑤ 40

V036

●●●
(2006(6)−가형16/나형16)

1부터 100까지의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택할 때, 4개의 수 중에서 두 번째로 작은 수가 k인 경우의 수를 a_k라 하자. 예를 들어, a_{98}은 선택된 4개의 수 중에서 98보다 작은 수가 한 개이고 98보다 큰 수가 2개인 경우의 수이므로 $a_{98}=97$이다. 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점][36)]

ㄱ. $a_3 = {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_{97}\mathrm{C}_2$
ㄴ. $a_{10} = a_{90}$
ㄷ. $\sum_{k=2}^{98} a_k = {}_{100}\mathrm{C}_4$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

V037

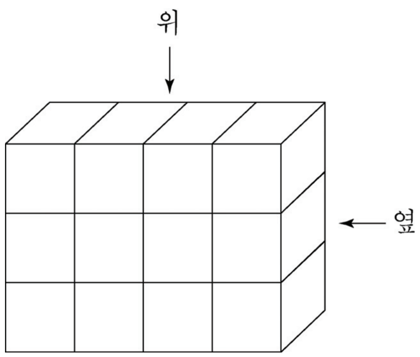
●●●
(2006(6)−가형30확률통계)

아시아 4개국과 아프리카 4개국이 있다. 8개국을 2개국씩 짝지어 4개의 그룹으로 나누려고 한다. 적어도 한 개의 그룹이 아시아 국가만으로 이루어지도록 4개의 그룹으로 나누는 경우의 수를 구하시오. [4점][37)]

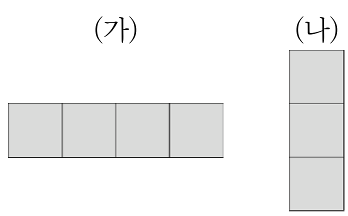
V038

○○○
(2006−가형17/나형17)

다음 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 모양의 투명한 유리 상자 12개로 직육면체를 만들었다.



이 중에서 4개의 유리 상자를 같은 크기의 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣은 직육면체를 위에서 내려다 본 모양이 (가), 옆에서 본 모양이 (나)와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수는? [4점][38)]



① 54 ② 48 ③ 42
④ 36 ⑤ 30

V039

○○○
(2006−나형28)

1부터 30까지의 홀수 중에서 서로 다른 두 수를 선택할 때, 두 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수는? [4점][39)]

① 43 ② 41 ③ 39
④ 37 ⑤ 35

V040

○○○
(2006−가형30확률통계)

네 사람이 다섯 곳의 휴양지 중에서 각각 하나의 휴양지를 임의로 선택한다고 할 때, 세 사람만 같은 휴양지를 선택하는 경우의 수를 구하시오. [4점][40)]

V041

○○○
(2007(6)−가형24/나형24)

8종류의 과자 A, B, C, D, E, F, G, H로 다음 조건에 따라 세트 상품을 만들려고 한다.

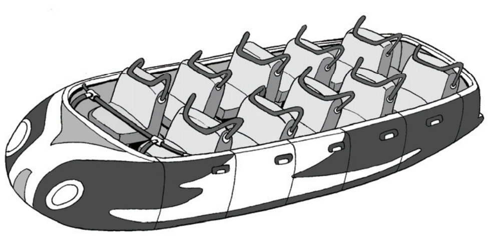
(가) 각 세트에는 서로 다른 4종류의 과자를 각각 한 개씩 담는다.
(나) A 또는 B를 담는 경우에는 A와 B를 같은 세트에 담는다.
(다) A, B, C 모두를 같은 세트에 담지 않는다.

서로 다른 세트 상품을 만들 수 있는 방법의 수를 구하시오. [4점]41)

V042

○○○
(2007(6)−나형30)

남학생 2명과 여학생 2명이 함께 놀이 공원에 가서 어느 놀이기구를 타려고 한다. 이 놀이기구는 그림과 같이 한 줄에 2개의 의자가 있고 모두 5줄로 되어 있다. 남학생 1명과 여학생 1명이 짝을 지어 2명씩 같은 줄에 앉을 때, 4명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하시오. [4점]42)



V043

○○
(2007(9)−가형24/나형24)

수련회에 참가한 여학생 5명과 남학생 6명을 4개의 방에 배정하려고 한다. 여학생은 1호실에 3명, 2호실에 2명을 배정하고, 남학생은 3호실과 4호실에 각각 3명씩 배정하는 방법의 수를 구하시오. [4점]43)

V044

○○
(2008(6)−나형12)

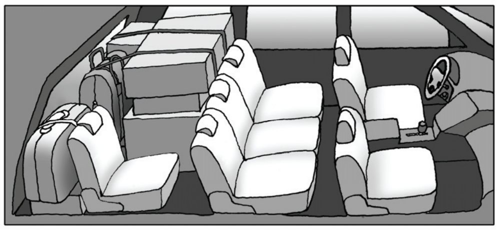
어느 동아리에 속한 여학생 수와 남학생 수가 같다. 이 동아리에서 3명의 대표를 선출하려고 한다. 남녀 구분 없이 3명의 대표를 선출하는 경우의 수가 여학생 중에서 3명의 대표를 선출하는 경우의 수의 10배일 때, 이 동아리에 속한 여학생 수는? [3점]44)

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

V045

○○○
(2008(6)-가형25/나형25)

할머니, 할아버지, 어머니, 아버지, 영희, 철수 모두 6명의 가족이 자동차를 타고 여행을 가려고 한다. 이 자동차에는 앉을 수 있는 좌석이 그림과 같이 앞줄에 2개, 가운데 줄에 3개, 뒷줄에 1개가 있다. 운전석에는 아버지나 어머니만 앉을 수 있고, 영희와 철수는 가운데 줄에만 앉을 수 있을 때, 가족 6명이 모두 자동차의 좌석에 앉는 경우의 수를 구하시오. [4점][45]



V046

○○○
(2008(6)-나형29)

1부터 9까지의 서로 다른 자연수 a, b, c, d, e에 대하여

$a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e$

로 나타내어지는 다섯 자리의 자연수 $abcde$중에서 5의 배수이고 $a > b > c$, $c < d < e$를 만족시키는 모든 자연수의 개수는? [4점][46]

① 53 ② 62 ③ 71
④ 80 ⑤ 89

V047

○○
(2008(6)-가형29이산수학)

색깔이 서로 다른 9개의 열쇠가 하나씩 포장되어 있다. 이 중 4개는 자물쇠 A만을, 3개는 자물쇠 B만을, 2개는 자물쇠 C만을 열 수 있다. 9개의 열쇠 중에서 3개를 임의로 선택할 때, 자물쇠 A와 자물쇠 B는 모두 열리고 자물쇠 C는 열리지 않도록 선택하는 경우의 수는? [4점][47]

① 15 ② 20 ③ 25
④ 30 ⑤ 35

V048

○○○ (2008(9)-가형11/나형11)

$n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 집합 A_n을

$A_n = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$이라 하자. 집합 A_n의 부분집합 중 원소가 2개인 각 부분집합에서 작은 원소를 뽑아 그 원소들의 평균을 a_n이라 하자. 다음은 $a_n = \dfrac{n+1}{3}$임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

〈증명〉

(1) $n=2$일 때, $A_2 = \{1,\ 2\}$의 원소가 2개인 부분집합은 자신뿐이므로 $a_2 = 1 = \dfrac{2+1}{3}$이다.

(2) $n=k$ $(k \geq 2)$일 때 성립한다고 가정하면

$a_k = \dfrac{k+1}{3}$이다.

$A_{k+1} = \{1,\ 2,\ \cdots,\ k,\ k+1\}$의 부분집합 중 원소가 2개인 모든 부분집합은, A_k의 부분집합 중 원소가 2개인 모든 부분집합에 k개의 집합

$\{1,\ k+1\}$, $\{2,\ k+1\}$, $\cdots$, $\{k,\ k+1\}$

을 추가한 것이다. A_k의 부분집합 중 원소가 2개인 부분집합의 개수는 $\boxed{\text{(가)}}$이므로

$a_{k+1} = \dfrac{\boxed{\text{(나)}} + (1+2+\cdots+k)}{{}_{k+1}\mathrm{C}_2}$

$= \dfrac{k+2}{3} = \dfrac{(k+1)+1}{3}$이다.

그러므로 (1), (2)에 의하여 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = \dfrac{n+1}{3}$이다.

위 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은? [4점][48]

	(가)	(나)
①	${}_k\mathrm{C}_2$	${}_k\mathrm{C}_2 \cdot \dfrac{k}{3}$
②	${}_k\mathrm{C}_2$	${}_k\mathrm{C}_2 \cdot \dfrac{k+1}{3}$
③	${}_{k+1}\mathrm{C}_2$	${}_{k+1}\mathrm{C}_2 \cdot \dfrac{k}{3}$
④	${}_{k+1}\mathrm{C}_2$	${}_{k+1}\mathrm{C}_2 \cdot \dfrac{k+1}{3}$
⑤	${}_{k+2}\mathrm{C}_2$	${}_k\mathrm{C}_2 \cdot \dfrac{k}{3}$

V049

○○○ (2008-가형25/나형25)

서로 다른 5종류의 체험 프로그램을 운영하는 어느 수련원이 있다. 이 수련원의 프로그램에 참가한 A와 B가 각각 5종류의 체험 프로그램 중에서 2종류를 선택하려고 한다.

A와 B가 선택하는 2종류의 체험 프로그램 중에서 한 종류만 같은 경우의 수를 구하시오. [4점][49]

V050

○ (2010(6)-가형27확률통계)

1부터 100까지의 자연수에서 서로 다른 3개를 선택하는 방법 중, 17을 포함하도록 선택하는 방법의 수를 a라 하고, 17을 포함하지 않도록 선택하는 방법의 수를 b라고 할 때, $\dfrac{b}{a}$의 값은? [3점][50]

① $\dfrac{94}{3}$ ② $\dfrac{95}{3}$ ③ $\dfrac{97}{3}$ ④ $\dfrac{98}{3}$ ⑤ $\dfrac{100}{3}$

V051

○○
(2010(9)-나형8)

어느 김밥 가게에서는 기본재료만 포함된 김밥의 가격을 1000원으로 하고, 기본재료 외에 선택재료가 추가될 경우 다음 표에 따라 가격을 정한다. 예를 들어 맛살과 참치가 추가된 김밥의 가격은 1500원이다.

선택재료	가격(원)
햄	200
맛살	200
김치	200
불고기	300
치즈	300
참치	300

선택재료를 추가하였을 때, 가격이 1500원 또는 2000원이 되는 김밥의 종류는 모두 몇 가지인가? (단, 선택재료의 양은 가격에 영향을 주지 않는다.) [3점][51)]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

V052

○○
(2010(9)-가형27이산수학)

남자 5명과 여자 3명이 출연하는 방송 프로그램이 있다. 이 프로그램에서 남자와 여자를 같은 수로 선택하여 게임을 시키려고 할 때, 선택할 수 있는 경우의 수는? (단, 한 명도 선택하지 않은 경우는 없다.) [3점][52)]

① 47 ② 49 ③ 51
④ 53 ⑤ 55

V053

(2010-가형12/나형12)

다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{n}\mathrm{C}_{k}}{{}_{n+4}\mathrm{C}_{k}}=\frac{n+5}{5}$$

가 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

〈증명〉

(1) $n=1$일 때,

$$(\text{좌변})=\frac{{}_{1}\mathrm{C}_{0}}{{}_{5}\mathrm{C}_{0}}+\frac{{}_{1}\mathrm{C}_{1}}{{}_{5}\mathrm{C}_{1}}=\frac{6}{5},\ (\text{우변})=\frac{1+5}{5}=\frac{6}{5}$$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=m$일 때, 등식

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}}=\frac{m+5}{5}$$

가 성립한다고 가정하자. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=0}^{m+1}\frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k}}=\boxed{(\text{가})}+\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1}}$$

이다. 자연수 l에 대하여

$${}_{l+1}\mathrm{C}_{k+1}=\boxed{(\text{나})}\cdot{}_{l}\mathrm{C}_{k}(0\le k\le l)$$

이므로

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1}}=\boxed{(\text{다})}\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{m+1}\frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k}}=\boxed{(\text{가})}+\boxed{(\text{다})}\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}}$$

$=\dfrac{m+6}{5}$이다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점][53)]

	(가)	(나)	(다)
①	1	$\frac{l+2}{k+2}$	$\frac{m+1}{m+4}$
②	1	$\frac{l+1}{k+1}$	$\frac{m+1}{m+5}$
③	1	$\frac{l+1}{k+1}$	$\frac{m+1}{m+4}$
④	$m+1$	$\frac{l+1}{k+1}$	$\frac{m+1}{m+5}$
⑤	$m+1$	$\frac{l+2}{k+2}$	$\frac{m+1}{m+4}$

V054

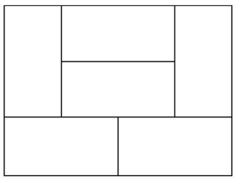
(2011(6)-나형23)

A, B 두 사람이 서로 다른 4개의 동아리 중에서 2개씩 가입하려고 한다. A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 1개 이하가 되도록 하는 경우의 수를 구하시오. (단, 가입 순서는 고려하지 않는다.) [4점][54)]

V055

○○
(2011(9)-가형7/나형7)

그림과 같이 경계가 구분된 6개 지역의 인구조사를 조사원 5명이 담당하려고 한다. 5명 중에서 1명은 서로 이웃한 2개 지역을, 나머지 4명은 남은 4개 지역을 각각 1개씩 담당한다. 이 조사원 5명의 담당 지역을 정하는 경우의 수는? (단, 경계가 일부라도 닿은 두 지역은 서로 이웃한 지역으로 본다.) [3점][55)]



① 720 ② 840 ③ 960
④ 1080 ⑤ 1200

V056

○○
(2011(9)-나형19)

등식 ${}_nP_3 = 12 \times {}_nC_2$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. [3점][56)]

V057

○○
(2011(9)-나형27)

지수는 다음 규칙에 따라 월요일부터 금요일까지 5일 동안 하루에 한 가지씩 운동을 하는 계획을 세우려 한다.

(가) 5일 중 3일을 선택하여 요가를 한다. (나) 요가를 하지 않는 2일 중 하루를 선택하여 수영, 줄넘기 중 한 가지를 하고, 남은 하루는 농구, 축구 중 한 가지를 한다.

지수가 세울 수 있는 계획의 가짓수는? [3점][57)]

① 50 ② 60 ③ 70
④ 80 ⑤ 90

V058

★★★
(2011(9)-가형29이산수학)

집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수 중에서 다음 조건을 만족하는 함수 f의 개수는? [4점][58)]

(가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 2이다. (나) 합성함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수는 1이다.

① 36 ② 42 ③ 48
④ 54 ⑤ 60

V059

○○
(2011-나형18)

등식 $2\times{}_{n}C_{3}=3\times{}_{n}P_{2}$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. [3점][59)]

V060

○○
(2011-나형20)

서로 다른 6개의 공을 두 바구니 A, B에 3개씩 담을 때, 그 결과로 나올 수 있는 경우의 수를 구하시오. [3점][60)]

V061

○
(2017(6)-가형24/나형24)

어느 학교 동아리 회원은 1학년이 6명, 2학년이 4명이다. 이 동아리에서 7명을 뽑을 때, 1학년에서 4명, 2학년에서 3명을 뽑는 경우의 수를 구하시오. [3점][61)]

V062

○○○
(2018(6)-가형27)

집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합을 두 개 선택할 때, 선택한 두 집합이 서로 같지 않은 경우의 수를 구하시오. [4점][62)]

V063

○○○
(2019(9)-가형18)

다음은 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 $f:X\rightarrow X$의 치역 A가 $n(A)=4$이고, 집합 A의 모든 원소의 합이 홀수인 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

(ⅰ) 공역 X의 원소 중 짝수인 원소가 2개이므로 집합 A의 네 원소 중 세 원소는 홀수이고 한 원소는 짝수이다. 따라서 집합 X의 원소 중에서 집합 A의 네 원소를 택하는 경우의 수는 2이다. (ⅱ) 정의역 X를 4개의 부분집합으로 분할할 때, 4개의 부분집합의 원소의 개수는 각각 2, 1, 1, 1이 되어야 한다. 따라서 집합 X를 4개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이다. (ⅲ) (ⅰ)과 (ⅱ)의 각 경우에 대하여 집합 X를 분할한 4개의 부분집합을 집합 A의 네 원소에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다. (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은? [4점][63]

① 498 ② 502 ③ 506
④ 510 ⑤ 514

V064

○○○
(2019-가형17/나형19)

다음은 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$과 함수 $f:X\rightarrow X$에 대하여 합성함수 $f\circ f$의 치역의 원소의 개수가 5인 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

함수 f와 함수 $f\circ f$의 치역을 각각 A와 B라 하자. $n(A)=6$이면 함수 f는 일대일대응이고, 함수 $f\circ f$도 일대일대응이므로 $n(B)=6$이다. 또한 $n(A)\leq 4$이면 $B\subset A$이므로 $n(B)\leq 4$이다. 그러므로 $n(A)=5$, 즉 $B=A$인 경우만 생각하면 된다. (ⅰ) $n(A)=5$인 X의 부분집합 A를 선택하는 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이다. (ⅱ) (ⅰ)에서 선택한 집합 A에 대하여, X의 원소 중 A에 속하지 않는 원소를 k라 하자. $n(A)=5$이므로 집합 A에서 $f(k)$를 선택하는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다. (ⅲ) (ⅰ)에서 선택한 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$ 와 (ⅱ)에서 선택한 $f(k)$에 대하여, $f(k)\in A$이며 $A=B$이므로 $A=\{f(a_1),\ f(a_2),\ f(a_3),\ f(a_4),\ f(a_5)\}\cdots(*)$ 이다. (*)을 만족시키는 경우의 수는 집합 A에서 집합 A로의 일대일대응의 개수와 같으므로 $\boxed{(다)}$이다. 따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $\boxed{(가)}\times\boxed{(나)}\times\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점][64]

① 131 ② 136 ③ 141
④ 146 ⑤ 151

V065

○○○
(2020(6)-가형25)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$의 개수를 구하시오. [3점][65]

(가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 4이다.
(나) $f(a)=a$인 X의 원소 a의 개수는 3이다.

V. 교육청, 사관학교, 경찰대 기출문제

V066

○○○
(2005(10)고3-가형12/나형12)

다음은 서로 다른 n개에서 r개를 선택하는 조합의 수 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}(r \le n)$에 대한 어떤 성질을 설명하는 과정이다.

> 서로 다른 n개를 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\cdots$, $\boxed{n}$이라 하자.
> (1)
> $\boxed{1}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.
> $\boxed{2}$를 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.
> $\boxed{3}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.
> $\vdots$
> $\boxed{n}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.
> 이상을 모두 합하면 $n \times \boxed{\text{(가)}}$이다. …㉠
> (2) 그런데 위의 ㉠에 있는 조합의 수 중에는 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\cdots$, $\boxed{r}$의 r개로 구성된 하나의 조합이 $\boxed{\text{(나)}}$번 반복되어 계산되었다.
> (중략)
> (1), (2)로부터 서로 다른 n개에서 r개를 선택하는 조합의 수 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$는
> ${}_{n}\mathrm{C}_{r} = \boxed{\text{(다)}} \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

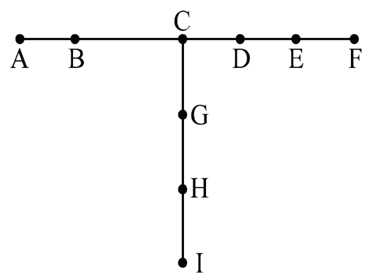
위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]66)

	(가)	(나)	(다)
①	${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$	r	$\dfrac{r}{n}$
②	${}_{n}\mathrm{C}_{r-1}$	r	$\dfrac{n}{r}$
③	${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$	n	$\dfrac{r}{n}$
④	${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$	r	$\dfrac{n}{r}$
⑤	${}_{n}\mathrm{C}_{r-1}$	n	$\dfrac{r}{n}$

V067

○○
(2005(7)고3-나형20)

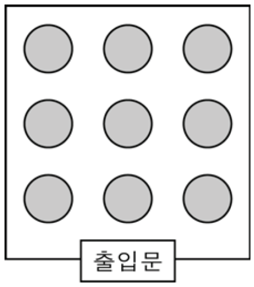
그림과 같이 점 C에서 만나는 두 선분 AF, CI 위에 9개의 점이 있다. 이 중 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수를 구하시오. [3점]67)



V068

○○
(2005(10)고3-나형7)

그림과 같이 정사각형 모양으로 배열된 9개의 원형탁자와 세 가지 색 빨강, 파랑, 노랑 보자기가 각각 3개씩 있다. 이 9장의 보자기로 탁자를 하나씩 덮을 때, 어떤 행과 어떤 열에도 같은 색이 놓이지 않도록 덮는 방법의 수는? [3점]68)

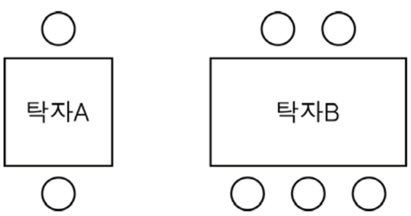


① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

V069

○○○
(2005(10)고3-가형30확률통계)

탁자 A에서 2명, 탁자 B에서 3명이 분임토의를 하고 있다. 이들 5명이 전체 토의를 하려고 탁자 B의 다섯 자리에 임의로 앉을 때, 탁자 B에서 분임토의를 하던 3명은 모두 처음에 앉았던 자리가 아닌 다른 자리에 앉게 되는 경우의 수를 구하시오. [4점]69)



V070

○○
(2006(3)고3-가형19)

6개의 숫자 1, 2, 3, 5, 7, 9를 이용하여 다섯 자리 자연수를 만들 때 7만 중복하여 사용할 수 있다. 7을 2개 이상 포함하고, 7끼리는 이웃하지 않는 서로 다른 자연수의 개수를 구하시오. [3점]70)

V071

○○○
(2006(10)고3-가형27확률통계)

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 f는 A에서 A로의 일대일대응이다. 이때, 임의의 $x\in A$에 대하여 $f(f(x))=x$를 만족하는 일대일대응 f의 개수는? [4점]71)

① 22 ② 26 ③ 30
④ 34 ⑤ 38

V072

○○
(2006(11)고2-가형29)

$10 < a < b < c < d < 20$를 만족하는 자연수 a, b, c, d에 대하여 집합 S를 $S = \{a, b, c, d\}$로 나타낼 때, 집합 S의 개수를 구하시오. [4점]72)

V073

○○
(2006(4)고3-가형26이산수학)

6명의 학생 A, B, C, D, E, F를 일렬로 세울 때, A를 맨 앞에 세우고 B는 A와 이웃하지 않게 세우는 경우의 수는? [3점]73)

① 24 ② 48 ③ 72
④ 96 ⑤ 120

V074

○○○
(2006(4)고3-가형29이산수학)

세 자리 자연수 중 101, 121, 954와 같이 1의 자리, 10의 자리, 100의 자리의 수 중에서 어느 하나의 수가 나머지 두 수의 합으로 되어 있는 자연수의 개수는? [4점]74)

① 100 ② 108 ③ 116
④ 120 ⑤ 126

V075

○○○
(2007사관(1차)-문과30)

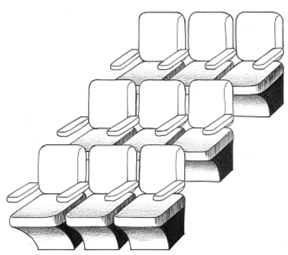
집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 X로의 함수 중에서 다음 조건을 만족하는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]75)

(가) f의 역함수가 존재한다.
(나) $f(1) \neq 1$
(다) $f(2) \neq f(f(1))$

V076

○○
(2007(7)고3-가형8/나형8)

그림과 같은 3좌석씩 3줄인 9개의 좌석에서 남자 5명, 여자 4명이 함께 영화를 관람하려 할 때, 남자끼리 좌우에 이웃하여 앉지 않고, 여자끼리 좌우에 이웃하여 앉지 않는 방법의 수는? [3점]76)

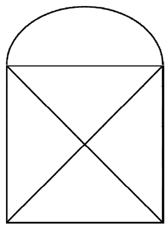


① $4! \times 5!$ ② $2 \times 3! \times 5!$ ③ $3 \times 4! \times 5!$
④ $5! \times 6!$ ⑤ $9 \times 4! \times 5!$

V077

○○
(2007(10)고3-가형24)

그림과 같이 다섯 개의 영역으로 나누어진 도형이 있다. 각 영역에 빨간색, 노란색, 파란색 중 한 가지 색을 칠하는데, 인접한 영역은 서로 다른 색을 칠하여 구별하려고 한다. 칠할 수 있는 방법의 수를 구하시오. [4점][77]



V078

○○○
(2008사관(1차)-문과29)

그림과 같이 4개의 가로줄과 3개의 세로줄로 이루어진 전화기의 숫자판이 있다. 이때, 다음 조건을 모두 만족시키면서 숫자판에 있는 숫자를 누르는 방법의 수를 구하시오. [4점][78]

1	2	3
4	5	6
7	8	9
*	0	#

(가) *, #을 제외한 10개의 숫자 중에서 서로 다른 4개의 숫자를 누른다. 이때, 누르는 순서가 다르면 서로 다른 경우이다.
(나) 4개의 가로줄에서는 각각 숫자를 1개씩 누른다.
(다) 1개의 세로줄에서는 숫자를 2개 누르고, 나머지 2개의 세로줄에서는 각각 숫자를 1개씩 누른다.

V079

○○
(2008(11)고2-가형29)

남학생 6명과 여학생 2명이 있다. 8명 모두를 2개조로 나누어 A, B 두 구역에 청소를 배정하려고 한다. 각 조에는 적어도 3명을 배정하고, 2명의 여학생은 같은 조에 포함되도록 하는 방법의 수를 m가지라 할 때, m의 값을 구하시오. [4점][79]

V080

○○
(2008(3)고3-가형7)

1부터 9까지 9개의 자연수 중에서 서로 다른 세 수를 일렬로 나열하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 그 중 각 자리의 수의 곱이 10의 배수인 자연수의 개수는? [3점][80]

① 60 ② 88 ③ 100
④ 132 ⑤ 144

V081

○○○
(2008(4)고3-가형26이산수학)

두 집합
$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$
에 대하여 다음 조건을 모두 만족하는 함수 $f:X\to Y$의 개수는? [3점][81]

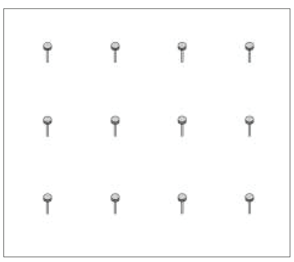
(가) $f(4)=5$ (나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$이다.

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

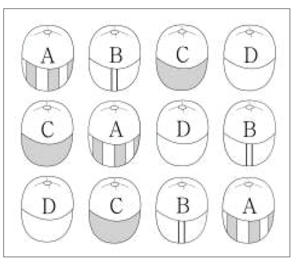
V082

○○○
(2009(10)고3-가형25)

서로 다른 네 종류의 모자 A, B, C, D가 각각 3개씩 모두 12개 있다. 12개의 모자를 〈그림1〉과 같이 일정한 간격으로 배열된 12개의 모자걸이에 각각 걸려고 한다. 이때, 모든 가로 방향과 모든 세로 방향에 서로 다른 종류의 모자가 걸리도록 하려고 한다. 〈그림2〉는 이와 같은 방법으로 모자를 건 예이다.



<그림1 >



<그림2 >

이와 같은 방법으로 12개의 모자를 모자걸이에 걸 수 있는 방법의 수를 모두 구하시오. (단, 같은 종류의 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점][82]

V083

○○
(2009경찰대(1차)-공통12)

3명의 경위와 8명의 순경이 4명, 4명, 3명으로 나누어 서로 다른 세 순찰차에 탑승하려고 한다. 3명의 경위는 각각 다른 순찰차에 탄다고 할 때, 탑승하는 방법의 수는?[83]

① 3360 ② 6720 ③ 8400
④ 10080 ⑤ 13640

V084

○○○
(2009(4)고3-가형28이산수학)

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 A에서 A로의 일대일대응을 f라 할 때, $|f(1)-f(2)|=1$ 또는 $|f(2)-f(3)|=1$을 만족하는 f의 개수는? [4점][84]

① 48 ② 56 ③ 64
④ 78 ⑤ 84

V085

○○○
(2010(10)고3-가형30확률통계)

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에서 A로의 함수 중에서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점][85]

(가) f는 일대일대응이다. (나) $|f(1)-f(2)|=|f(2)-f(3)|$

V086

○○○
(2010(10)고3-나형11)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에서 X로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는?86)

(가) f는 일대일대응이다. (나) $f(f(1))=1$ (다) $f(2)-f(1)=2$

① 36 ② 40 ③ 44
④ 48 ⑤ 52

V087

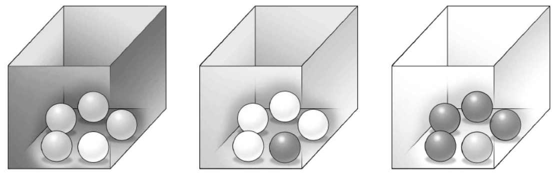
○○
(2011사관(1차)-문과27)

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 서로 다른 두 원소를 $a,\ b$라 하고, 집합 $B=\{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$의 서로 다른 두 원소를 $c,\ d$라 하자. 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 중에서 네 수의 곱 $abcd$가 짝수인 것의 개수를 구하시오. [3점]87)

V088

○○○
(2014(10)고3-A형20)

빨간 공, 파란 공, 노란 공이 각각 5개씩 있다. 이 15개의 공만을 사용하여 빨간 상자, 파란 상자, 노란 상자에 상자의 색과 다른 색의 공을 5개씩 담으려고 한다. 공을 담는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.) [4점]88)



① 6 ② 12 ③ 18
④ 24 ⑤ 30

V089

○○
(2014(3)고2-B형29)

9개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 다음 조건을 만족시키도록 세 자리 자연수를 만들려고 한다.

각 자리의 수 중 어떤 두 수의 합도 9가 아니다.

예를 들어 217은 조건을 만족시키지 않는다. 조건을 만족시키는 세 자리 자연수의 개수를 구하시오. [4점]89)

V090

○○
(2016(3)고3-가형17)

1부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 8장의 카드 중에서 동시에 5장의 카드를 선택하려고 한다. 선택한 카드에 적혀 있는 수의 합이 짝수인 경우의 수는? [4점][90]

① 24 ② 28 ③ 32
④ 36 ⑤ 40

V091

○○○
(2016(10)고3-나형28)

다음 조건을 만족시키도록 서로 다른 5개의 바구니에 빨간색 공 3개와 파란색 공 6개를 모두 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.) [4점][91]

(가) 각 바구니에 공은 1개 이상, 3개 이하로 넣는다. (나) 빨간색 공은 한 바구니에 2개 이상 넣을 수 없다.

V092

○○○
(2016(3)고3-가형29)

집합 $X=\{-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) X의 모든 원소 x에 대하여 $\lvert f(x)+f(-x)\rvert=1$이다. (나) $x>0$이면 $f(x)>0$이다.

함수 $f(x)$의 개수를 구하시오. [4점][92]

V093

○○○
(2017경찰대(1차)-공통7)

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $C=\{a,\ b,\ c\}$에 대하여 두 함수 $f:A\to B$, $g:B\to C$의 합성함수 $g\circ f:\ A\to C$가 역함수를 갖도록 하는 순서쌍 $(f,\ g)$의 개수는? [4점][93]

① 108 ② 144 ③ 216
④ 432 ⑤ 864

V094

(2017(10)고3-가형26)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

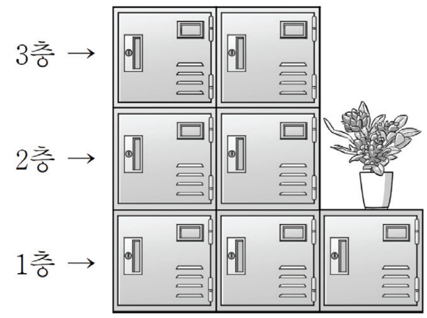
(가) 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.
(나) $1 \le n \le 2$일 때, $f(2n) < f(n) < f(3n)$이다.

함수 $f(x)$의 개수를 구하시오. [4점][94)]

V095

(2017(3)고3-가형29)

그림과 같은 7개의 사물함 중 5개의 사물함을 남학생 3명과 여학생 2명에게 각각 1개씩 배정하려고 한다. 같은 층에서는 남학생의 사물함과 여학생의 사물함이 서로 이웃하지 않는다. 사물함을 배정하는 모든 경우의 수를 구하시오. [4점][95)]



V096

●●●
(2018(4)고3-가형19)

다음은 1부터 n까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 세 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우의 수를 구하는 과정이다. (단, $n \geq 5$)

> 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우는
> '(i) 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우' 에서
> '(ii) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우' 와
> '(iii) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우' 를 제외하면 된다.
> (i)의 경우:
> n개의 공이 들어 있는 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_nC_3$이다.
> (ii)의 경우:
> 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우의 수는 $(n-2)$이다.
> (iii)의 경우:
> 연속되는 두 수 중 하나가 1인 경우의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$
> 이고, 마찬가지로 연속되는 두 수 중 하나가 n인 경우의 수도
> $\boxed{\text{(가)}}$이다.
> 또한 연속되는 두 수 중 어느 하나도 1과 n이 아닌 경우의 수는
> $\boxed{\text{(나)}}$이다.
> 따라서 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우의 수는
> $2\times(\boxed{\text{(가)}})+\boxed{\text{(나)}}$이다.
> (i), (ii), (iii)에 의하여 n개의 공이 들어 있는 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우의 수는 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $p(n)$, $q(n)$, $r(n)$이라 할 때, $\dfrac{p(18)\times q(17)}{r(16)}$의 값은? [4점][96)]

① $\dfrac{15}{2}$　② 9　③ $\dfrac{21}{2}$　④ 12　⑤ $\dfrac{27}{2}$

V097

○○○
(2018경찰대(1차)-공통23)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에서 집합 X로의 함수 $f(x)$가

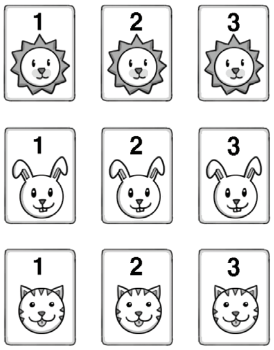
$$(f\circ f\circ f)(x)=x$$

를 만족시킬 때, 함수 f의 개수를 구하시오. [4점][97)]

V098

○○
(2018(10)고3-나형27)

그림과 같이 숫자 1, 2, 3이 각각 하나씩 적힌 세 가지 그림의 카드 9장이 있다. 이 중에서 서로 다른 5장의 카드를 선택할 때, 숫자 1, 2, 3이 적힌 카드가 적어도 한 장씩 포함되도록 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 카드를 선택하는 순서는 고려하지 않는다.) [4점][98]



V099

★★★
(2019경찰대(1차)-공통20)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는? [5점][99]

$$\{(f\circ f)(x)\mid x\in X\}\cup\{4,\ 5\}=X$$

① 402 ② 424 ③ 438
④ 456 ⑤ 480

아래부터 답과 해설입니다.

1)

V001 | 답 ③

[풀이]

문제에서 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 1로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

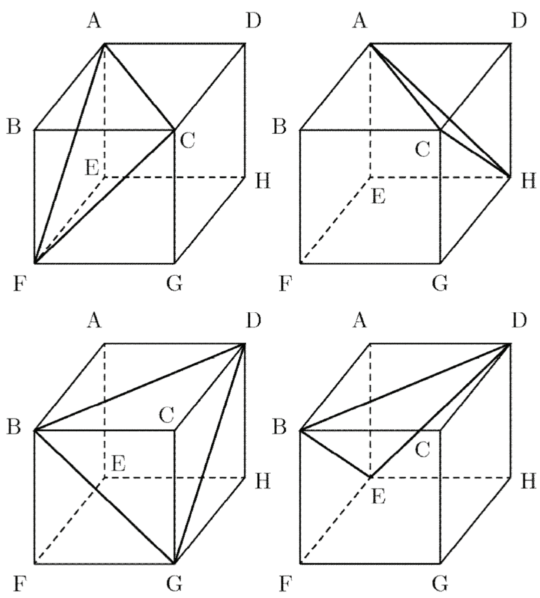
피타고라스의 정리에 의하여 정삼각형 AFH의 한 변의 길이를 구하면 $\sqrt{2}$이다.

(그리고 정육면체의 8개의 꼭짓점 중에서 임의로 선택한 2개의 꼭짓점 사이의 거리는 1 또는 $\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{3}$이다.)

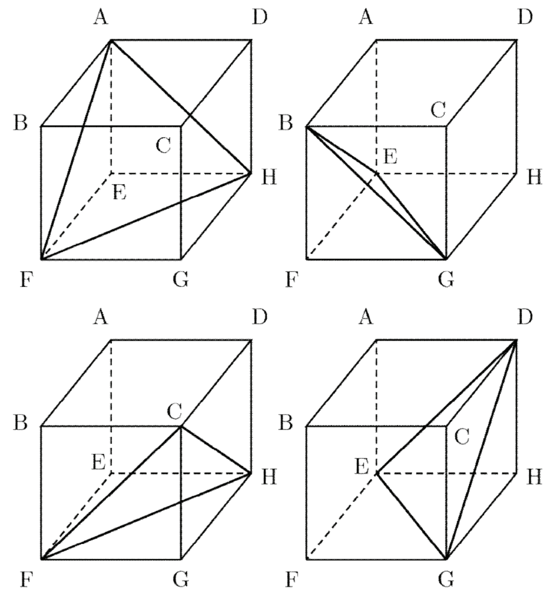
삼각형 AFH와 합동인 삼각형의 3개의 꼭짓점 모두가 정사각형 ABCD의 꼭짓점일 수는 없다. 왜냐하면 정사각형 ABCD의 4개의 꼭짓점 중에서 3개의 꼭짓점을 연결하여 만들어진 삼각형은 정삼각형이 아니기 때문이다.

마찬가지의 이유로 삼각형 AFH와 합동인 삼각형의 3개의 꼭짓점 모두가 정사각형 EFGH의 꼭짓점일 수는 없다.

(1) 삼각형 AFH와 합동인 삼각형의 3개의 꼭짓점 중에서 2개가 정사각형 ABCD의 꼭짓점인 경우



(2) 삼각형 AFH와 합동인 삼각형의 3개의 꼭짓점 중에서 1개가 정사각형 ABCD의 꼭짓점인 경우



(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$4+4=8$

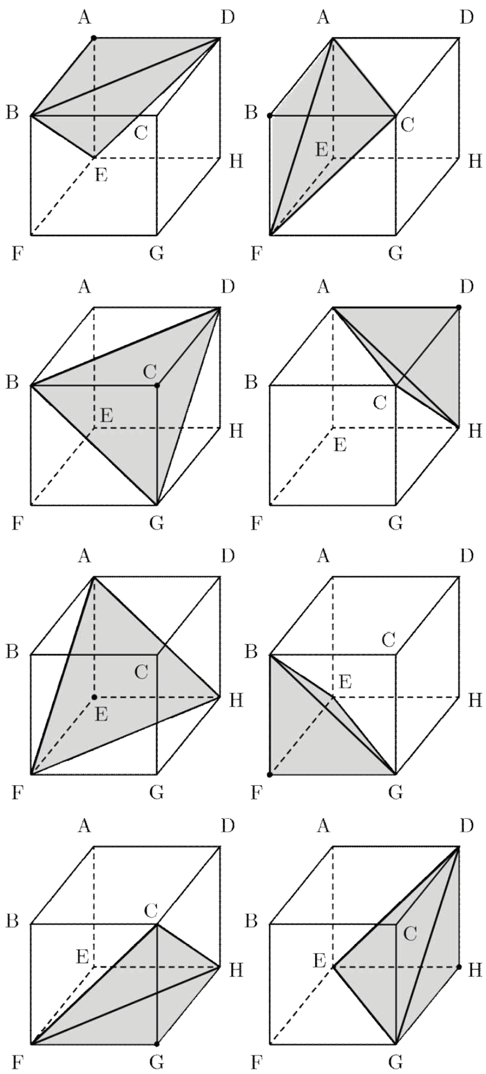
답 ③

[참고1]

아래 표와 같이 '꼭짓점$-$정삼각형(밑면)$-$사면체' 의 일대일대응을 생각할 수 있다.

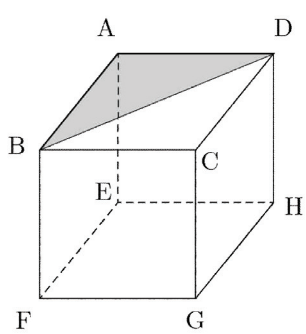
꼭짓점	정삼각형	사면체
A	BDE	ABDE
B	ACF	BACF
C	BDG	CBDG
D	ACH	DACH
E	AFH	EAFH
F	BEG	FBEG
G	CFH	GCFH
H	EDG	HEDG

위의 표를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



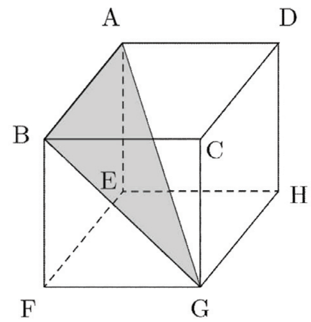
[참고2]
다음과 같이 여집합의 관점에서 경우의 수를 구해도 좋다.
문제에서 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 1로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

(1) 만들어진 삼각형이 빗변의 길이가 $\sqrt{2}$인 직각이등변삼각형인 경우



경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$4 \times 6 = 24$
즉, 6개의 면에 각각 4개씩 만들어진다.

(2) 만들어진 삼각형의 세 변의 길이가 각각 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$인 경우

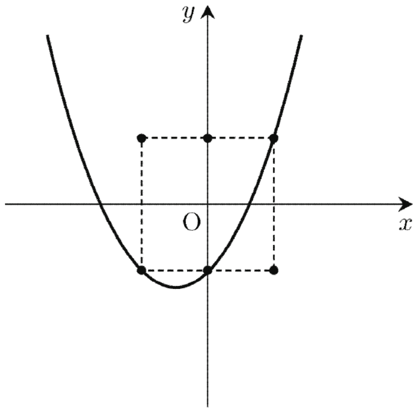


경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$4 \times 6 = 24$
여섯 개의 평면
ABGH, FCDE, BCHE,
AFGD, AEGC, BFHD
에 각각 4개씩 만들어진다.
구하는 경우의 수는
${}_8\mathrm{C}_3 - (24 + 24) = 8$
답 ③

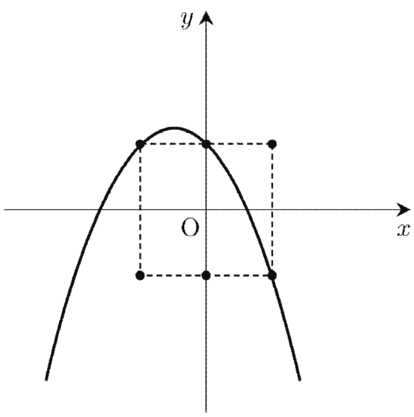
2)
V002
|답 ③

[풀이]
문제에서 주어진 6개의 점을 각각
$\mathrm{A}_1(-1,\ 1)$, $\mathrm{A}_2(0,\ 1)$, $\mathrm{A}_3(1,\ 1)$,
$\mathrm{B}_1(-1,\ -1)$, $\mathrm{B}_2(0,\ -1)$, $\mathrm{B}_3(1,\ -1)$
이차함수 $f(x)$의 방정식을
$f(x) = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ $\cdots (*)$
함수 $f(x)$의 그래프가 세 점 A_1, A_2, A_3을 동시에 지난다고 가정하자.
점 A_1을 (*)에 대입하면
$a - b + c = 1$
점 A_2를 (*)에 대입하면
$c = 1$
점 A_3을 (*)에 대입하면
$a + b + c = 1$
a, b, c에 대한 연립방정식을 풀면
$a = b = 0$, $c = 1$
이는 가정에 모순이다.
따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 세 점 A_1, A_2, A_3을 동시에 지날 수 없다.
마찬가지의 방법으로 함수 $f(x)$의 그래프는 세 점 B_1, B_2, B_3을 동시에 지날 수 없다.

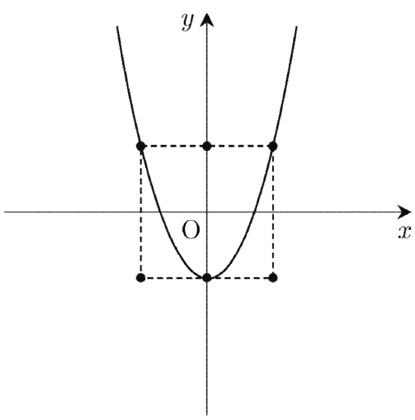
함수의 정의에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 A_i, $\mathrm{B}_i(i=1,\ 2,\ 3)$을 동시에 지날 수 없다.
이상에서 함수 $f(x)$의 그래프로 가능한 것은 아래의 6가지이다.



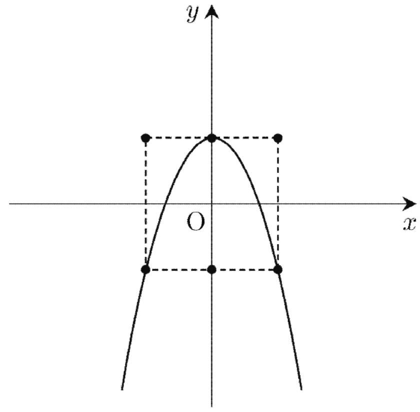
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x^2+x-1$



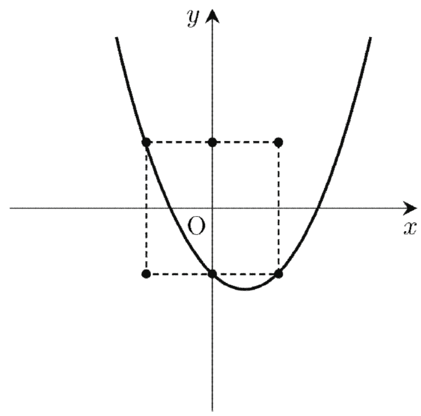
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=-x^2-x+1$



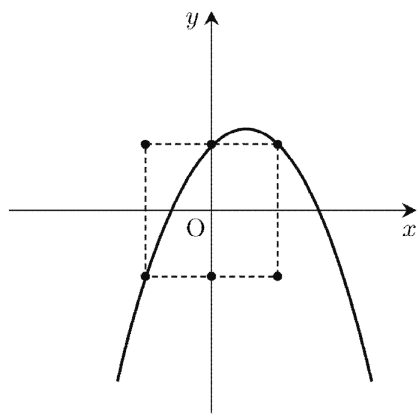
함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=2x^2-1$



함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=-2x^2+1$



함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=x^2-x-1$



함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=-x^2+x+1$

답 ③

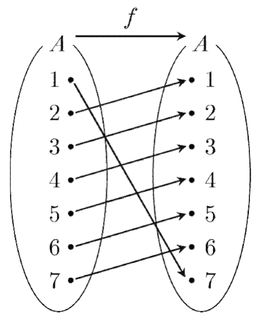
3)

V003

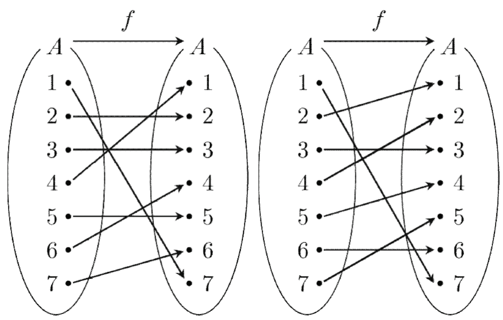
| 답 32

[풀이]
조건 (나)에서 $f(1)=7$이다.
조건 (다)에서 $f(2)$가 가질 수 있는 값은 1 또는 2다.
예를 들어 $f(2)=1$이라고 하자.
조건 (다), (가)에서 $f(3)$가 가질 수 있는 값은 2 또는 3이다. 예

를 들어 $f(3)=2$라고 하자.
조건 (다), (가)에서 $f(4)$가 가질 수 있는 값은 3 또는 4이다. 예를 들어 $f(4)=3$이라고 하자.
조건 (다), (가)에서 $f(5)$가 가질 수 있는 값은 4 또는 5이다. 예를 들어 $f(5)=4$라고 하자.
조건 (다), (가)에서 $f(6)$가 가질 수 있는 값은 5 또는 6이다. 예를 들어 $f(6)=5$라고 하자.
이제 $g(7)=6$으로 결정된다.



혹은 아래와 같은 경우들도 가능하다.



⋮
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$2\times2\times2\times2\times2\times1=32$
답 32

4)
V004 | 답 ⑤

[풀이]
우선 세 자리 자연수를 몇 개 만들어보자.

1	2	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	백의 자리: 1

~~1~~	2	3	4	~~5~~	~~6~~	십의 자리: 3

~~1~~	2	~~3~~	4	5	6	일의 자리: 5

⋮

1	2	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	백의 자리: 2

1	~~2~~	3	4	~~5~~	~~6~~	십의 자리: 4

1	~~2~~	3	~~4~~	5	6	일의 자리: 6

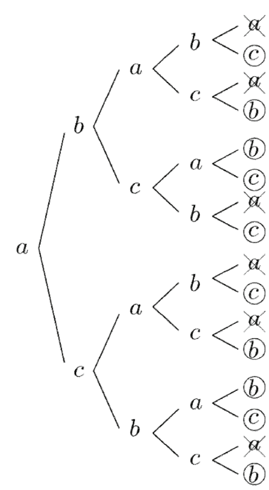
⋮
백의 자리, 십의 자리, 일의 자리를 선택하는 경우의 수는 각각 2, 3, 4이다. 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$2\times3\times4=24$
답 ⑤

5)
V005 | 답 ③

[풀이]
(1) B를 거쳐서 가는 경우
경로는 $A\to B\to C\to D$이므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$3\times2\times1=6$
(2) B를 거쳐서 가지 않는 경우
경로는 $A\to C\to D$이므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$2\times1=2$
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $6+2=8$이다.
답 ③

6)
V006 | 답 30

[풀이1] ★
3가지 색을 각각 a, b, c라고 하자.
예를 들어 맨 위의 사다리꼴에 a가 색칠될 때, 수형도를 이용하여 나머지 사다리꼴에 색칠되는 색을 쓰면 다음과 같다. 이때, 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에는 서로 다른 색이 칠해져야 한다.



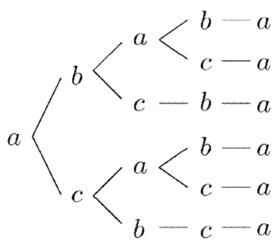
맨 위의 사다리꼴에 a가 색칠될 때, 문제에서 주어진 조건을 만족시키도록 나머지 사다리꼴에 칠하는 방법의 수는 10이다.
맨 위의 사다리꼴에 칠할 수 있는 서로 다른 색의 수는 3이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$3\times10=30$
답 30

[풀이2]

3가지 색을 각각 a, b, c라고 하자.
문제에서 주어진 조건을 각각 (가), (나)라고 하자.
(가): 이웃한 사다리꼴에는 서로 다른 색을 칠한다.
(나): 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠한다.
조건 (가)를 만족시키는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times2\times2\times2\times2=48$ ⋯㉠

이제 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 같은 색을 칠하는 방법의 수를 구하자.
예를 들어 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 a가 색칠될 때, 수형도를 이용하여 나머지 사다리꼴에 색칠되는 색을 쓰면 다음과 같다.



맨 위의 사다리꼴에 a가 색칠될 때, 조건 (나)를 만족시키지 않도록 나머지 사다리꼴에 칠하는 방법의 수는 6이다. 맨 위의 사다리꼴에 칠할 수 있는 서로 다른 색의 수는 3이므로 조건 (나)를 만족시키지 않도록 나머지 사다리꼴에 칠하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times6=18$ ⋯㉡

㉠, ㉡에서 구하는 방법의 수는

$48-18=30$

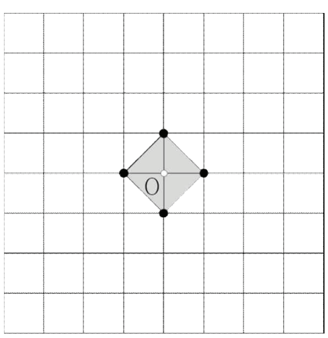
답 30

7)

V007 | 답 ③

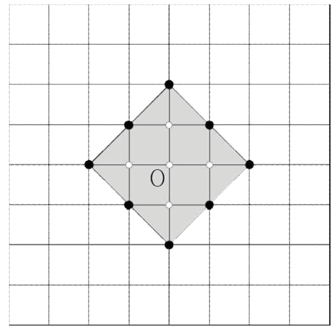
[풀이1]

- 로봇이 1번 움직였을 때, 아래 그림에서 어두운 영역의 내부 및 둘레에 속한 점 ●은 로봇의 도착점으로 가능하다. (단, ◯는 도착점이 아니다.)



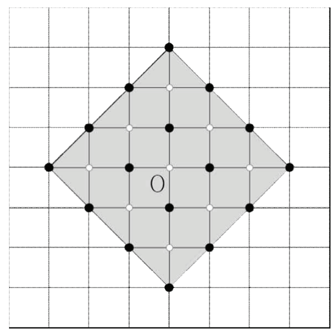
가능한 경로의 수는 4이다.

- 로봇이 2번 움직였을 때, 아래 그림에서 어두운 영역의 내부 및 둘레에 속한 점 ●은 로봇의 도착점으로 가능하다. (단, ◯는 도착점이 아니다.)



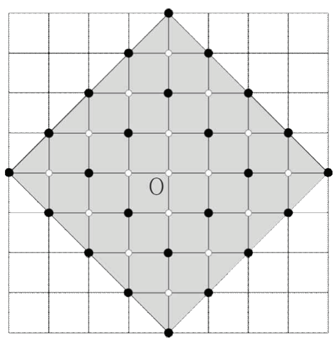
가능한 경로의 수는 4×3이다.

- 로봇이 3번 움직였을 때, 아래 그림에서 어두운 영역의 내부 및 둘레에 속한 점 ●은 로봇의 도착점으로 가능하다. (단, ◯는 도착점이 아니다.)

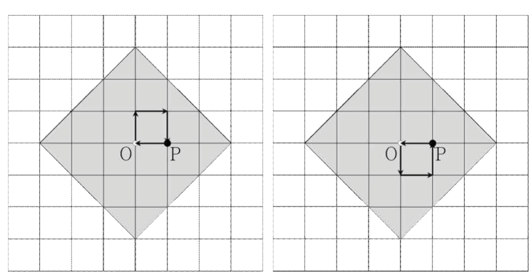


가능한 경로의 수는 $4\times3\times3$이다.

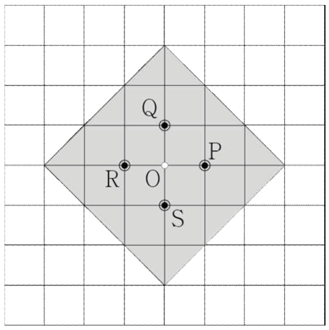
- 로봇이 4번 움직였을 때, 아래 그림에서 어두운 영역의 내부 및 둘레에 속한 점 ●은 로봇의 도착점으로 가능하다. (단, ◯는 도착점이 아니다.)



만약 로봇이 3번 움직여서 도착한 점이 P일 때, 로봇은 ←의 방향으로 움직일 수 없다. 왜냐하면 지점 O가 도착점이 될 수 없기 때문이다.

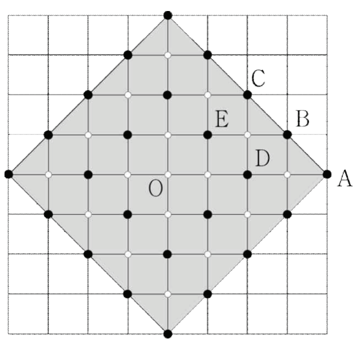


마찬가지의 이유로 로봇이 3번 움직여서 도착한 점이 Q, R, S일 때, 로봇은 각각 ↓의 방향, →의 방향, ↑의 방향으로 움직일 수 없다.

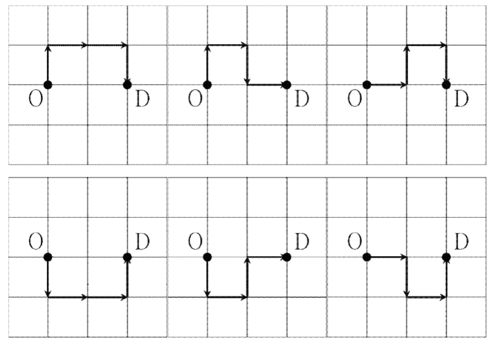


따라서 가능한 경로의 수는
합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여
$4\times3\times3\times3-4\times2=100$
답 ③

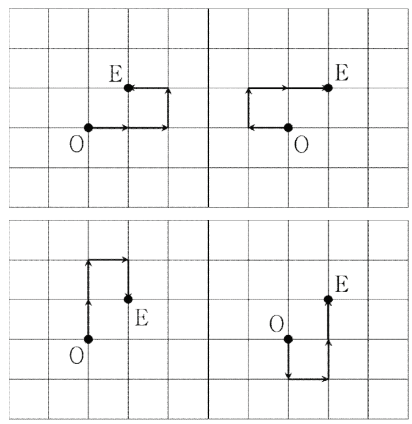
[풀이2]
아래 그림에서 어두운 영역의 내부 및 둘레에 속한 점 ●은 로봇의 도착점으로 가능하다.
(단, ○는 도착점이 아니다.)



(1) 지점 O에서 출발하여 지점 A에 도착하는 경우
지점 O에서 지점 A까지 도로를 따라
최단거리로 가는 경우의 수를 구하면 된다.
(→, →, →, →)
경우의 수는 1이다.
(2) 지점 O에서 출발하여 지점 B에 도착하는 경우
지점 O에서 지점 B까지 도로를 따라
최단거리로 가는 경우의 수를 구하면 된다.
(→, →, →, ↑), (→, →, ↑, →),
(→, ↑, →, →), (↑, →, →, →)
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\dfrac{4!}{3!}=4$이다.
(3) 지점 O에서 출발하여 지점 C에 도착하는 경우
지점 O에서 지점 C까지 도로를 따라
최단거리로 가는 경우의 수를 구하면 된다.
(→, →, ↑, ↑), (→, ↑, →, ↑), (→, ↑, ↑, →),
(↑, →, →, ↑), (↑, →, ↑, →), (↑, ↑, →, →)
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$이다.
(4) 지점 O에서 출발하여 지점 D에 도착하는 경우
아래 그림처럼 경우의 수는 6이다.



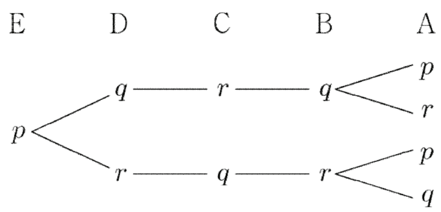
(5) 지점 O에서 출발하여 지점 E에 도착하는 경우
아래 그림처럼 경우의 수는 4이다.



(1)~(5)에서 구하는 경우의 수는
합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여
$1\times4+4\times8+6\times4+6\times4+4\times4=100$
답 ③

8)
V008
| 답 ②

[풀이1]
다섯 개의 영역 A, B, C, D, E의 넓이는 각각
1π, 3π, 5π, 7π, 9π
이다. 주어진 조건에 의하여 물감 1통으로 1π 넓이만큼만 칠할 수 있다.
서로 다른 세 가지 색의 물감을 각각 p, q, r이라 하고, 넓이가 가장 넓은 E부터 시작하여 안쪽 방향으로 색칠할 때, 그려지는 수형도는 다음과 같다.



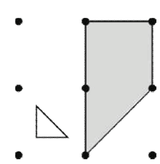
위의 수형도에 의하여 영역 E에 물감 p를 칠했을 때
가능한 경우의 수는 4이다.
영역 E에는 물감 q 또는 r을 칠할 수도 있으므로
구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$4 \times 3 = 12$
답 ②

[풀이2]
다섯 개의 영역 A, B, C, D, E의 넓이는 각각
1π, 3π, 5π, 7π, 9π
이다. 주어진 조건에 의하여 물감 1통으로 1π 넓이만큼만 칠할 수 있으므로 1가지 색으로 세 개의 영역 A, C, E를 모두 칠하는 것은 불가능하다. 따라서 1가지 색으로 서로 다른 세 개의 영역을 모두 칠하는 것은 불가능하다.
다음과 같은 두 가지의 경우가 가능하다.
• A와 C에 같은 색을 칠하고 B와 D에 같은 색을 칠하는 경우
경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_3P_3 = 3!$이다.
• A와 E에 같은 색을 칠하고 B와 D에 같은 색을 칠하는 경우
경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_3P_3 = 3!$이다.
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $3! + 3! = 12$
답 ②

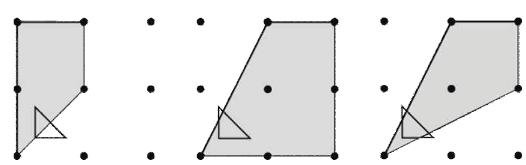
9)
V009 | 답 ⑤
[풀이]
조건 (가), (나)에 의하여 문자열은 ab로 시작해야 한다.
ab○○○○
나머지 자리에 a가 3개 이상 오면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
• 나머지 자리에 a가 2개 오는 경우
aba○a○
aba○○a
ab○a○a
(단, ○에는 b가 온다.)
• 나머지 자리에 a가 1개 오는 경우
aba○○○
ab○a○○
ab○○a○
ab○○○a
(단, ○에는 b가 온다.)
• 나머지 자리에 a가 오지 않는 경우
$abbbbb$
따라서 구하는 경우의 수는 8이다.
답 ⑤

10)
V010 | 답 ④
[풀이]
인형 A에게 3개의 셔츠 중에서 하나를 입히고, 인형 B에게 남은 2개의 셔츠 중에서 하나를 입히자. 곱의 법칙에 의하여 두 인형 A, B에게 셔츠를 입힐 경우의 수는 $6(=3 \times 2)$이다.
인형 A에게 3개의 바지 중에서 하나를 입히고, 인형 B에게 남은 2개의 바지 중에서 하나를 입히자. 곱의 법칙에 의하여 두 인형 A, B에게 바지를 입힐 경우의 수는 $6(=3 \times 2)$이다.
A인형의 셔츠와 바지의 색은 각각 빨강, 초록으로 결정하거나 초록, 빨강으로 결정하면 된다. 이때, 경우의 수는 2이다.
B인형의 셔츠와 바지의 색은 각각 빨강, 초록으로 결정하거나 초록, 빨강으로 결정하면 된다. 이때, 경우의 수는 2이다.
구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$6 \times 6 \times 2 \times 2 = 144$
답 ④

11)
V011 | 답 ②
[풀이1]
만약 사각형의 한 꼭짓점이 원점이 아니라면
아래 그림과 같이 사각형은 삼각형을 포함하지 않는다.

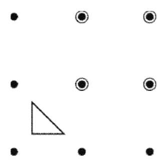


사각형의 한 꼭짓점이 원점일 때,
만약 사각형의 나머지 세 꼭짓점 중에서 두 꼭짓점이 각각
$(4,\ 0)$ 또는 $(8,\ 0)$이 아니고,
$(0,\ 4)$ 또는 $(0,\ 8)$이 아니라면
아래 그림과 같이 사각형은 삼각형의 일부만을 포함한다.

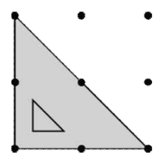


따라서 사각형이 삼각형을 완전히 포함하기 위해서는
사각형의 네 꼭짓점 중에서 세 꼭짓점은 반드시
• 원점

• $(4,\ 0)$ 또는 $(8,\ 0)$
• $(0,\ 4)$ 또는 $(0,\ 8)$
이어야 한다.
이제 아래와 같은 네 가지의 경우로 구분하여 생각할 수 있다.
사각형의 네 꼭짓점 중에서 세 꼭짓점이 각각
(1) 원점, $(4,\ 0)$, $(0,\ 4)$인 경우
(2) 원점, $(8,\ 0)$, $(0,\ 4)$인 경우
(3) 원점, $(4,\ 0)$, $(0,\ 8)$인 경우
(4) 원점, $(8,\ 0)$, $(0,\ 8)$인 경우
이제 사각형의 나머지 한 꼭짓점을 아래 그림에서 ◉ 표시한 4개의 점 중에서 정하면 된다.

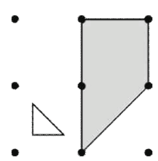


하지만 (4)에서 아래처럼 삼각형이 되는 경우는 제외해야 한다.

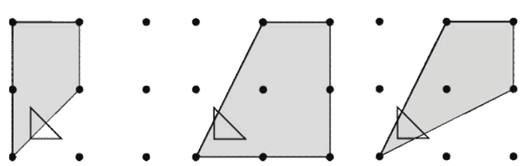


따라서 구하는 경우의 수는
$4^2-1=15$
답 ②

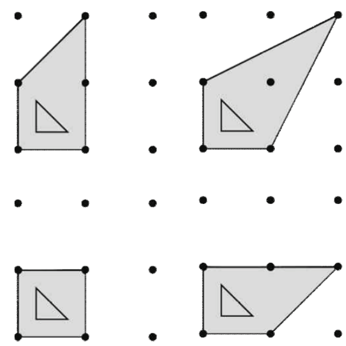
[풀이2]
만약 사각형의 한 꼭짓점이 원점이 아니라면
아래 그림과 같이 사각형은 삼각형을 포함하지 않는다.



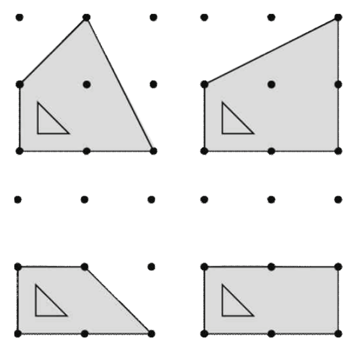
사각형의 한 꼭짓점이 원점일 때,
만약 사각형의 나머지 세 꼭짓점 중에서 두 꼭짓점이 각각
$(4,\ 0)$ 또는 $(8,\ 0)$이 아니고,
$(0,\ 4)$ 또는 $(0,\ 8)$이 아니라면
아래 그림과 같이 사각형은 삼각형의 일부만을 포함한다.



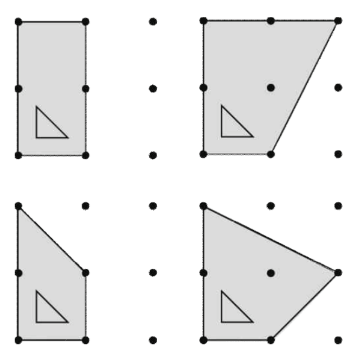
따라서 사각형이 삼각형을 완전히 포함하기 위해서는
사각형의 네 꼭짓점 중에서 세 꼭짓점은 반드시
• 원점
• $(4,\ 0)$ 또는 $(8,\ 0)$
• $(0,\ 4)$ 또는 $(0,\ 8)$
이어야 한다.
(1) 사각형의 네 꼭짓점 중에서 세 꼭짓점이 각각
원점, $(4,\ 0)$, $(0,\ 4)$인 경우



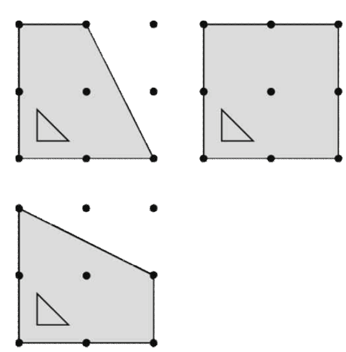
(2) 사각형의 네 꼭짓점 중에서 세 꼭짓점이 각각
원점, $(8,\ 0)$, $(0,\ 4)$인 경우



(3) 사각형의 네 꼭짓점 중에서 세 꼭짓점이 각각
원점, $(4,\ 0)$, $(0,\ 8)$인 경우



(4) 사각형의 네 꼭짓점 중에서 세 꼭짓점이 각각
원점, $(8,\ 0)$, $(0,\ 8)$인 경우



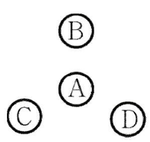
(1)~(4)는 동시에 발생하지 않으므로
경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$4+4+4+3=15$
답 ②

12)
V012
|답 ②

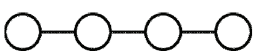
[풀이]
두 자리의 자연수를 $a\times10+b$라고 하자.
조건 (가)에 의하여 b가 가질 수 있는 값은
0, 2, 4, 6, 8 (총 5개)
조건 (나)에 의하여 a가 가질 수 있는 값은
1, 2, 3, 6 (총 4개)
구하는 값은 곱의 법칙에 의하여
$5\times4=20$
답 ②

13)
V013
|답 16

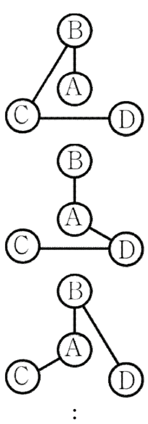
▶ 실전풀이: [풀이2]
[풀이1]
문제에서 주어진 4개의 섬을 아래 그림처럼 각각 A, B, C, D라고 하자.



(1) 각각의 섬에 1개 또는 2개의 다리만을 건설하는 경우
섬들의 연결 상태는 아래 그림과 같아진다.



예를 들어 아래와 같은 경우들이 가능하다.



ABCD
또는
DCBA

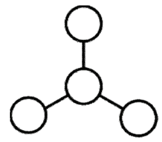
BADC
또는
CDAB

CABD
또는
DBAC

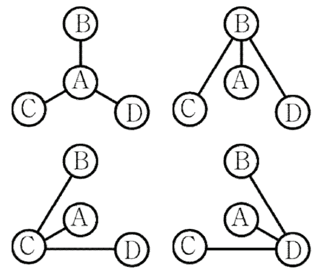
⋮ ⋮

4개의 섬 A, B, C, D를 일렬로 나열하는 경우의 수는
순열의 수에 의하여 $4!$이므로 경우의 수는 $12\left(=\frac{4!}{2}\right)$이다.

(2) 각각의 섬에 1개 또는 3개의 다리만을 건설하는 경우
섬들의 연결 상태는 아래 그림과 같아진다.

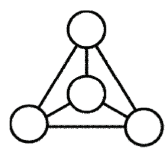


다음의 4가지의 경우가 가능하다.

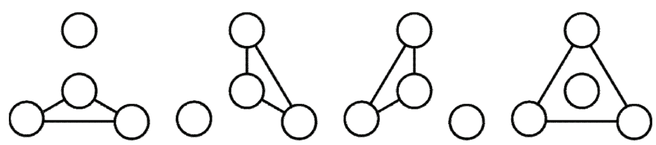


(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$12+4=16$
답 16

[풀이2]
모든 섬에 각각 3개의 다리만을 건설하여 4개의 섬을 모두 연결하면 다음과 같다.
이때, 필요한 다리의 개수는 6이다.



6개의 다리 중에서 3개의 다리를 없애서 4개의 섬 중에서 연결되지 않는 섬이 있도록 하는 경우는 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는
${}_6C_3-4=20-4=16$
답 16

14)
V014
|답 72

[풀이]
문제에서 주어진 6개의 수에 대하여
$\frac{1+2+4+6+8+9}{2}=15$

이므로 위, 아래의 가로줄에 있는 세 수의 합이 각각 15이면 된다.
$1+6+8=15$, $2+4+9=15$
이므로 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
구하는 경우의 수는 $2\times{}_3P_3\times{}_3P_3=72$이다.

답 72

15)
V015 | 답 ①

[풀이]
세 종류의 상품을 각각 a, b, c라고 하자.
맨 위의 가로줄에 서로 다른 세 종류의 상품을 진열하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $3!$이다.
예를 들어 아래와 같이 진열되었다고 하자.

a	b	c

중간의 가로줄에 서로 다른 세 종류의 상품을 진열하는 방법의 수는 2이다.
예를 들어 아래와 같이 진열되었다고 하자.

a	b	c
b	c	a

a	b	c
c	a	b

위의 각각의 경우에 대하여 맨 아래의 가로줄에 서로 다른 세 종류의 상품을 진열하는 방법의 수는 2이다.
예를 들어 아래와 같이 진열되었다고 하자.

a	b	c
b	c	a
a	b	c

a	b	c
b	c	a
c	a	b

a	b	c
c	a	b
a	b	c

a	b	c
c	a	b
b	c	a

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$3!\times2\times2=24$

답 ①

16)
V016 | 답 48

[풀이]
일의 자리와 백의 자리에 3의 배수가 오는 경우는 다음과 같이 2가지다.

			3		6

			6		3

각각의 경우에 대하여 나머지 네 자리에 1, 2, 4, 5를 배열하면 된다.
따라서 구하는 자연수의 개수는
곱의 법칙과 순열의 수에 의하여
$2\times4!=48$

답 48

17)
V017 | 답 120

[풀이]
집합 A의 가장 큰 원소와 가장 작은 원소의 차는
$6-1=5$
이므로 조건 (나)에 의하여
$f(n+1)=6$, $f(n)=1$
예를 들어 $n=1$일 때,
$f(1)=1$, $f(2)=6$
조건 (가)에 의하여
집합 $\{3, 4, 5, 6\}$에서 집합 $\{2, 3, 4, 5\}$로의 일대일대응의 개수는 함수 f의 개수와 같다.
경우의 수는 순열의 수에 의하여 $24(=4!)$이다.
n이 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로
곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$5\times4!=120$

답 120

18)
V018 | 답 ③

[풀이1] ★
서울, 부산, 광주, 대구 지역의 사원을 각각
a_i, b_i, c_i, d_i(단, $i=1, 2, 3$)
라고 하자.
서울에서 온 3명의 사원은 각각 다른 조에 속하므로
이들이 속한 3개의 조의 이름을 각각
'a_1조', 'a_2조', 'a_3조'
라고 하자.

	a_1조	a_2조	a_3조
부산			
광주			
대구			

위의 표에 부산, 광주, 대구 지역의 사원을 배치하는 방법의 수는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
$3!\times3!\times3!=216$

답 ③

[풀이2] ★
서울, 부산, 광주, 대구 지역의 사원을 각각
a_i, b_i, c_i, d_i(단, $i=1$, 2, 3)
라고 하자.

	1조	2조	3조
서울			
부산			
광주			
대구			

위의 표에 서울, 부산, 광주, 대구 지역의 사원을 배치하는 방법의 수는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
$3!\times 3!\times 3!\times 3!$
그런데 '1조', '2조', '3조'를 나열하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $3!$이므로
구하는 방법의 수는
$3!\times 3!\times 3!\times 3!\times \dfrac{1}{3!}=216$

답 ③

[풀이3] ★
서울, 부산, 광주, 대구 지역의 사원을 각각
a_i, b_i, c_i, d_i(단, $i=1$, 2, 3)
라고 하자. 이를 표로 나타내면 다음과 같다.

서울	a_1	a_2	a_3
부산	b_1	b_2	b_3
광주	c_1	c_2	c_3
대구	d_1	d_2	d_3

(1) 우선 각 지역에서 한 명씩 선택할 경우의 수는 3^4이다.
예를 들어 아래와 같이 선택하였다고 하자.

서울	a_1		
부산			b_3
광주			c_3
대구		d_2	

(2) (1)의 경우에 대하여 각 지역에서 한 명씩 선택할 경우의 수는 2^4이다.
예를 들어 아래와 같이 선택하였다고 하자.

서울		a_2	
부산	b_1		
광주		c_2	
대구			d_3

(3) (2)의 경우에 대하여 각 지역에서 한 명씩 선택할 경우의 수는 1^4이다.
예를 들어 아래와 같이 선택하였다고 하자.

서울			a_3
부산		b_2	
광주	c_1		
대구	d_1		

이제 세 조를 나열하면 다음과 같다.
(1): $\{a_1,\ b_3,\ c_3,\ d_2\}$
(2): $\{a_2,\ b_1,\ c_2,\ d_3\}$
(3): $\{a_3,\ b_2,\ c_1,\ d_1\}$
그런데 (1), (2), (3)에서 만들어진 세 집합을 나열하는 경우의 수는 순열의 수에 의하여 $3!$이므로
구하는 경우의 수는
$\dfrac{3^4 2^4 1^4}{3!}=216$

답 ③

19)
V019 |답 ③

[풀이]
여학생 2명을 각각 a_1, a_2, 남학생 4명을 각각 b_1, b_2, b_3, b_4라고 하자.
6명의 학생 중에서 여학생 a_2를 제외한 5명의 학생이 차례로 뜀틀 넘기를 하게 되는 경우의 수는 순열의 수에 의하여 $5!$이다.
예를 들어 다음과 같은 순서로 뜀틀 넘기를 한다고 하자.
b_1, a_1, b_4, b_2, b_3
$5!$의 각각의 경우에 대하여 여학생 a_1의 바로 전에 혹은 바로 후에 여학생 a_2가 뜀틀 넘기를 한다고 하면 여학생 2명은 연이어 뜀틀 넘기를 하게 된다.
예를 들어 다음과 같은 순서가 가능하다.
b_1, a_2, a_1, b_4, b_2, b_3
b_1, a_1, a_2, b_4, b_2, b_3
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$5!\times 2=240$

답 ③

20)
V020 |답 72

[풀이1] ★
어른 2명 중 1명은 앞줄에 앉고, 1명은 뒷줄에 앉아야 한다. 앞줄에 2개, 뒷줄에 3개의 의자가 있으므로 어른이 앉을 방법의 수는

곱의 법칙에 의하여

$2 \times 2 \times 3 = 12$

(단, 맨 앞에 곱해진 2는 앞줄에 앉을 어른을 선택하는 경우의 수이다.)

이제 남은 자리에 어린이 3명이 앉으면 된다.

어린이가 앉을 방법의 수는 순열의 수에 의하여

$3! = 6$

구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$12 \times 6 = 72$

답 72

[풀이2] +확률과 통계(조합) ★

문제에서 주어진 조건을 무시할 때, 어른 2명과 어린이 3명이 놀이기구의 의자에 앉을 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $5!$이다.

(1) 어른 2명이 모두 앞줄에 앉을 경우

어린이 3명은 모두 뒷줄에 앉게 된다.

순열의 수와 곱의 법칙에 의하여 방법의 수는

$2! \times 3! = 12$

(2) 어른 2명이 모두 뒷줄에 앉을 경우

어린이 3명 중에서 2명은 앞줄에 1명은 뒷줄에 앉게 된다.

어른 2명이 앉을 자리는 결정하는 방법의 수는 조합의 수에 의하여

${}_3\mathrm{C}_2 (=3)$

이 3가지 경우 각각에 대하여 어른 2명과 어린이 3명이 앉는 경우의 수는

순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$2! \times 3! = 12$

경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3 \times 12 = 36$

따라서 구하는 경우의 수는

$5! -$ ((1)의 경우+(2)의 경우)

$= 5! - (12 + 36) = 72$

답 72

21)

V021 |답 ②

[풀이]

여학생 2명이 놀이공원에 입장하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $2!$이고, 남학생 3명이 놀이공원에 입장하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $3!$이다.

구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

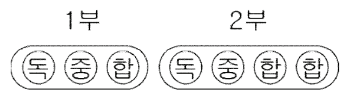
$2! \times 3! = 12$

답 ②

22)

V022 |답 ④

[풀이]



독창 2팀의 공연 순서를 정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $2!$, 중창 2팀의 공연 순서를 정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $2!$, 합창 3팀의 공연 순서를 정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $3!$이다.

구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2! \times 2! \times 3! = 24$

답 ④

23)

V023 |답 ②

[풀이1]

조건 (가), (나), (다)에 의하여 b는 둘째 자리에 오거나 넷째 자리에 와야 한다.

(1) b가 둘째 자리에 오는 경우 (◯b◯◯◯)

ab◯◯◯

나머지 자리에 c, d, e를 배열하는 경우의 수는

순열의 수에 의하여 $3! - 2!$이다.

이때, $2!$은 c가 다섯째 자리에 올 때의 경우의 수이다.

◯b◯a◯

나머지 자리에 c, d, e를 배열하는 경우의 수는

순열의 수에 의하여 $3! - 2!$이다.

이때, $2!$은 c가 다섯째 자리에 올 때의 경우의 수이다.

◯b◯◯a

나머지 자리에 c, d, e를 배열하는 경우의 수는

순열의 수에 의하여 $3!$이다.

합의 법칙에 의하여 경우의 수는 $4 + 4 + 6 = 14$이다.

(2) b가 넷째 자리에 오는 경우 (◯◯◯b◯)

a◯◯b◯, ◯a◯b◯, ◯◯◯ba

(1)과 같은 방법으로 경우의 수는 14이다.

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 경우의 수는

$14 + 14 = 28$

답 ②

[풀이2]

문제에서 주어진 문자를 모두 사용하여 만든 다섯 자리 문자열만을 원소로 하는 전체집합을 U라고 하자. 전체집합 U의 세 부분집합 P, Q, R은 다음을 만족시킨다고 하자.

셋째 자리에 a가 오는 다섯 자리 문자열만을 원소로 하는 집합을

P, 첫째 자리 또는 셋째 자리 또는 다섯째 자리에 b가 오는 다섯 자리 문자열만을 원소로 하는 집합을 Q, 다섯째 자리에 c가 오는 다섯 자리 문자열만을 원소로 하는 집합을 R이라고 하자.
순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
$n(U)={}_5\mathrm{P}_5=5!=120$
$n(P)={}_4\mathrm{P}_4=4!=24$
$n(Q)=3\times{}_4\mathrm{P}_4=3\times4!=72$
$n(R)={}_4\mathrm{P}_4=4!=24$
$n(P\cap Q)=2\times{}_3\mathrm{P}_3=2\times3!=12$
$n(Q\cap R)=2\times{}_3\mathrm{P}_3=2\times3!=12$
$n(R\cap P)={}_3\mathrm{P}_3=3!=6$
$n(P\cap Q\cap R)={}_2\mathrm{P}_2=2!=2$
세 조건 (가), (나), (다)를 모두 만족시키는 집합은
$P^C\cap Q^C\cap R^C$
이므로
$n(P^C\cap Q^C\cap R^C)=n((P\cup Q\cup R)^C)$
$=n(U)-n(P\cup Q\cup R)$
$=n(U)-n(P)-n(Q)-n(R)$
$+n(P\cap Q)+n(Q\cap R)+n(R\cap P)$
$-n(P\cap Q\cap R)$
$=120-24-72-24+12+12+6-2$
$=28$
답 ②

24)
V024 |답 64

[풀이]
(1) 할머니와 할아버지가 1열에 앉을 경우
할아버지와 할머니가 앉을 좌석을 결정하는
경우의 수는 곱의 법칙과 순열의 수에 의하여
$2\times2!=4$
아버지와 어머니가 앉을 좌석을 결정하는
경우의 수는 곱의 법칙과 순열의 수에 의하여
$2\times2!=4$
아들과 딸이 앉을 좌석을 결정하는
경우의 수는 순열의 수에 의하여
$2!=2$
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$4\times4\times2=32$
(2) 할머니와 할아버지가 2열에 앉을 경우
(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수는 32이다.
(1), (2)가 동시에 일어나지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$32+32=64$
답 64

25)
V025 |답 ⑤

[풀이]
(1) 맨 위에 A, B를 배치할 경우
A, B를 배치할 경우의 수는 순열의 수에 의하여 2!, 나머지 자리에 C, D, E, F를 배치할 경우의 수는 순열의 수에 의하여 4!이다. 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2\times4!=48$
(2) 맨 아래에 A, B를 배치할 경우
A, B를 배치할 경우의 수는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여 $2\times2!$, 나머지 자리에 C, D, E, F를 배치할 경우의 수는 순열의 수에 의하여 4!이다. 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2\times2!\times4!=96$
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$48+96=144$
답 ⑤

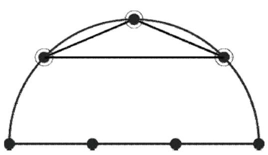
26)
V026 |답 ③

[풀이1]
다섯 개의 팀을 각각 A, B, C, D, E라고 하자.
(1) 첫째 날에 두 팀, 둘째 날에 세 팀이 공연하는 경우
이 다섯 개의 팀을 일렬로 나열한 후에, 가장 왼쪽부터 순서대로 '첫째 날에 첫 번째로 공연하는 팀', '첫째 날에 두 번째로 공연하는 팀', '둘째 날에 첫 번째로 공연하는 팀', '둘째 날에 두 번째로 공연하는 팀', '둘째 날에 세 번째로 공연하는 팀'이라고 하자. 예를 들어, B, A, C, E, D와 같이 나열된 경우를 생각하면
B는 첫째 날에 첫 번째로 공연하는 팀,
A는 첫째 날에 두 번째로 공연하는 팀,
C는 둘째 날에 첫 번째로 공연하는 팀,
E는 둘째 날에 두 번째로 공연하는 팀,
D는 둘째 날에 세 번째로 공연하는 팀이다.
경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_5\mathrm{P}_5(=120)$이다.
(2) 첫째 날에 세 팀, 둘째 날에 두 팀이 공연하는 경우
(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수는
순열의 수에 의하여 ${}_5\mathrm{P}_5(=120)$이다.
(1), (2)는 동시에 일어나지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$120+120=240$
답 ③

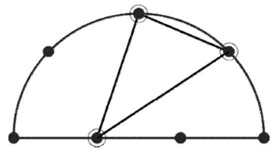
[풀이2]
다섯 개의 팀을 각각 A, B, C, D, E라고 하자.
(1) 첫째 날에 두 팀, 둘째 날에 세 팀이 공연하는 경우
첫째 날에 공연하는 팀의 순서를 정하는 경우의 수는
순열의 수에 의하여
${}_5P_2(={}_5C_2\times 2!)$
둘째 날에 공연하는 팀의 순서를 정하는 경우의 수는
순열의 수에 의하여
${}_3P_3(={}_3C_3\times 3!)$
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
${}_5P_2\times{}_3P_3=5!=120$
(2) 첫째 날에 세 팀, 둘째 날에 두 팀이 공연하는 경우
첫째 날에 공연하는 팀의 순서를 정하는 경우의 수는
순열의 수에 의하여
${}_5P_3(={}_5C_3\times 3!)$
둘째 날에 공연하는 팀의 순서를 정하는 경우의 수는
순열의 수에 의하여
${}_2P_2(={}_2C_2\times 2!)$
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
${}_5P_3\times{}_2P_2=5!=120$
(1), (2)는 동시에 일어나지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$120+120=240$
답 ③

27)
V027 |답 ④

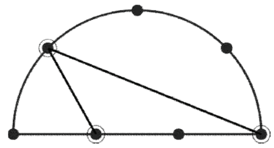
[풀이1] ★
한 직선 위에 있지 않은 3개의 점으로 하나의 삼각형이 결정된다.
문제에서 주어진 반원 위의 7개의 점을 3개의 호 위의 점과 4개의 지름 위의 점으로 구별하자.
(1) 삼각형의 세 꼭짓점이 호 위에 있는 경우



경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_3C_3$이다.
(2) 삼각형의 두 꼭짓점이 호 위에 있는 경우
나머지 한 꼭짓점은 지름 위에 있어야 한다.



경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_3C_2\times{}_4C_1$이다.
(3) 삼각형의 한 꼭짓점이 호 위에 있는 경우
나머지 두 꼭짓점은 지름 위에 있어야 한다.



경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_3C_1\times{}_4C_2$이다.
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
${}_3C_3+{}_3C_2\times{}_4C_1+{}_3C_1\times{}_4C_2=1+12+18=31$
답 ④

[풀이2] ★
한 직선 위에 있지 않은 3개의 점으로 하나의 삼각형이 결정된다.
문제에서 주어진 반원 위의 7개의 점을 3개의 호 위의 점과 4개의 지름 위의 점으로 구별하자.
만약 지름 위의 4개의 점 중에서 3개의 점을 택한다면 삼각형을 만들 수 없다.

호	지름	삼각형
3개	0개	○
2개	1개	○
1개	2개	○
0개	3개	×

반원 위의 7개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_7C_3$이고, 지름 위의 4개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_3$이므로
경우의 수는
${}_7C_3-{}_4C_3=35-4=31$
답 ④

28)
V028 |답 35

[풀이1]
두 자연수의 곱이 홀수이기 위해서는 두 수가 모두 홀수여야 한다.
10 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 선택하는 경우의 수는
조합의 수에 의하여
$${}_{10}C_2=\frac{10\times 9}{2\times 1}=45$$

10 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 홀수를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

$_5C_2 = \dfrac{5\times4}{2\times1} = 10$

따라서 구하는 경우의 수는

$45-10=35$

답 35

[풀이2]

(짝수)×(짝수)=(짝수)

(짝수)×(홀수)=(짝수)

(홀수)×(홀수)=(홀수)

이므로 두 자연수의 곱이 짝수이기 위해서는 두 수 중에서 적어도 하나 이상의 수가 짝수여야 한다.

(1) 두 자연수가 모두 짝수인 경우

10 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 짝수를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

$_5C_2 = \dfrac{5\times4}{2\times1} = 10$

(1) 한 자연수는 짝수, 나머지 자연수는 홀수인 경우

10 이하의 자연수 중에서 짝수와 홀수를 각각 하나씩 선택하는 경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

$_5C_1 \times {}_5C_1 = 5\times5 = 25$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$10+25=35$

답 35

29)

V029 | 답 ②

[풀이] ★

(1) 집합 A에서 두 개의 원소를 뽑는 경우

(즉, 집합 B에서는 아무 원소도 뽑지 않는다.)

집합 A에서 두 개의 원소를 뽑는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

$_nC_2$

집합 B에서 아무 원소도 뽑지 않는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

$_nC_0$

이므로 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $_nC_2\times{}_nC_0$이다.

(2) 집합 B에서 두 개의 원소를 뽑는 경우

(즉, 집합 A에서는 아무 원소도 뽑지 않는다.)

집합 B에서 두 개의 원소를 뽑는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

$_nC_2$

집합 A에서 아무 원소도 뽑지 않는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

$_nC_0$

이므로 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $_nC_2\times{}_nC_0$이다.

(3) 집합 A와 집합 B에서 각각 한 개의 원소를 뽑는 경우

집합 A에서 한 개의 원소를 뽑는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

$_nC_1$

집합 B에서 한 개의 원소를 뽑는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

$_nC_1$

이므로 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $_nC_1\times{}_nC_1$이다.

(1), (2), (3)에서 (가), (나)에 들어갈 식은 각각

$2\times{}_nC_2(={}_nC_2+{}_nC_2)$, $_nC_1\times{}_nC_1$

답 ②

30)

V030 | 답 52

[풀이1]

문제에서 주어진 조건에 의하여 물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ 중에서는 2과목까지만 선택할 수 있으므로 과학탐구 8과목 중 3과목을 선택하는 경우는 아래 표와 같다.

경우	물리Ⅰ, 화학Ⅰ, 생물Ⅰ, 지구과학Ⅰ	물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ
(1)	1과목 선택	2과목 선택
(2)	2과목 선택	1과목 선택
(3)	3과목 선택	0과목 선택
~~(4)~~	~~0과목 선택~~	~~3과목 선택~~

위의 표에 의하여 구하는 경우의 수는

(Ⅰ, Ⅱ의 8과목 중에서 3과목을 선택하는 경우의 수)

−(Ⅱ의 4과목 중에서 3과목을 선택하는 경우의 수)

$= {}_8C_3 - {}_4C_3 = 56-4 = 52$

답 52

[풀이2]

문제에서 주어진 조건에 의하여 물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ 중에서는 2과목까지만 선택할 수 있으므로 과학탐구 8과목 중 3과목을 선택하는 경우는 아래 표와 같다.

경우	물리Ⅰ, 화학Ⅰ, 생물Ⅰ, 지구과학Ⅰ	물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ
(1)	1과목 선택	2과목 선택
(2)	2과목 선택	1과목 선택
(3)	3과목 선택	0과목 선택

조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

(1)의 경우의 수: $_4C_1\times{}_4C_2 = 4\times6 = 24$

(2)의 경우의 수: ${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_1 = 6 \times 4 = 24$

(3)의 경우의 수: ${}_4\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_0 = 4 \times 1 = 4$

(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$24 + 24 + 4 = 52$

답 52

31)
V031

|답 360

[풀이]
전송하는 수(2○○○0)의 끝에 0을 덧붙였으므로 ○○○에 오는 세 숫자의 합은 짝수이다.

(1) ○○○에 오는 세 숫자 중에서 짝수의 개수가 3인 경우
경우의 수는 서로 다른 5개의 수 0, 2, 4, 6, 8에서 3개를 택하는 순열의 수이므로
${}_5\mathrm{P}_3 = 60$

(1) ○○○에 오는 세 숫자 중에서 짝수와 홀수의 개수가 각각 1, 2인 경우
서로 다른 5개의 수 0, 2, 4, 6, 8에서 1개를 택하는 조합의 수는
${}_5\mathrm{C}_1$
서로 다른 5개의 수 1, 3, 5, 7, 9에서 2개를 택하는 조합의 수는
${}_5\mathrm{C}_2$
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$({}_5\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_2) \times 3! = 300$

(1), (2)는 동시에 일어나지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$60 + 300 = 360$

답 360

32)
V032

|답 ③

[풀이] ★
<증명>
${}_{n+3}\mathrm{C}_{n+1}$은 집합 $A = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n+3\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수이다. 이것을 다른 방법으로 세어보자.

(ⅰ) 집합 A의 부분집합 중에서, 가장 큰 원소가 $\boxed{n+1}$이고 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수는 ${}_n\mathrm{C}_n$이다. 이때, ${}_n\mathrm{C}_n$은 집합 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 n인 부분집합의 개수이다.

(ⅱ) 집합 A의 부분집합 중에서, 가장 큰 원소가 $\boxed{n+2}$이고 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수는 ${}_{n+1}\mathrm{C}_n$이다. 이때, ${}_{n+1}\mathrm{C}_n$은 집합 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n+1\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 n인 부분집합의 개수이다.

(ⅲ) 집합 A의 부분집합 중에서, 가장 큰 원소가 $\boxed{n+3}$이고 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수는 ${}_{n+2}\mathrm{C}_n$이다. 이때, ${}_{n+2}\mathrm{C}_n$은 집합 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n+2\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 n인 부분집합의 개수이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) 중에서 한 가지 경우만 일어날 수 있으므로 합의 법칙에 의하여 ${}_n\mathrm{C}_n + {}_{n+1}\mathrm{C}_n + {}_{n+2}\mathrm{C}_n = {}_{n+3}\mathrm{C}_{n+1}$이 성립한다.

답 ③

[참고] ★
증명과정을 자세하게 설명하면 다음과 같다.

(ⅰ)의 경우
$$\underbrace{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n}_{n\text{개 선택}},\ \underbrace{\boxed{n+1}}_{\text{선택○}},\ \underbrace{n+2,\ n+3}_{\text{선택×}}$$

(ⅱ)의 경우
$$\underbrace{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ n+1}_{n\text{개 선택}},\ \underbrace{\boxed{n+2}}_{\text{선택○}},\ \underbrace{n+3}_{\text{선택×}}$$

(ⅲ)의 경우
$$\underbrace{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ n+1,\ n+2}_{n\text{개 선택}},\ \underbrace{\boxed{n+3}}_{\text{선택○}}$$

(ⅰ)의 경우는 $n+2$를 선택하지 않지만, (ⅱ)의 경우는 $n+2$를 선택하므로, (ⅰ), (ⅱ)는 서로 배반사건이다.
(ⅱ)의 경우는 $n+3$을 선택하지 않지만, (ⅲ)의 경우는 $n+3$을 선택하므로, (ⅱ), (ⅲ)은 서로 배반사건이다.
(ⅰ)의 경우는 $n+3$을 선택하지 않지만, (ⅲ)의 경우는 $n+3$을 선택하므로, (ⅰ), (ⅲ)은 서로 배반사건이다.
따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) 중에서 임의로 선택한 서로 다른 두 경우는 서로 배반이다.
집합 A의 부분집합 중에서 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합은 다음의 두 경우를 생각할 수 있다.
부분집합이 $n+3$을 원소로 갖는 경우
→ (ⅲ)에 해당
부분집합이 $n+3$을 원소로 갖지 않는 경우
→ 부분집합이 $n+2$를 원소로 갖는 경우와 부분집합이 $n+2$를 원소로 갖지 않는 경우
→ 전자는 (ⅱ)에 해당하고, 후자는 (ⅰ)에 해당한다.
따라서 문제에서 주어진 등식이 성립하는 것이다.

33)
V033

|답 150

[풀이] ★
5명의 신규 직원을 3명, 1명, 1명의 세 팀으로 나누는 경우의 수

는

$${}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 10$$

5명의 신규 직원을 2명, 2명, 1명의 세 팀으로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 15$$

이상에서 $S(5,\ 3) = 25$이다.
세 팀을 각각 대전, 대구, 광주에 배치하는 경우의 수는
순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
$S(5,\ 3) \times 3! = 150$

답 150

34)
V034

|답 126

[풀이1]
(1) 2개의 증권회사에 입사원서를 내는 경우
통신회사, 건설회사에 각각 1개씩의 입사원서를 내면 된다.
경우의 수는 조합의 수에 의하여
${}_3C_2 \times {}_3C_1 \times {}_4C_1 = 3 \times 3 \times 4 = 36$
(2) 2개의 통신회사에 원서를 내는 경우
증권회사, 건설회사에 각각 1개씩의 입사원서를 내면 된다.
${}_3C_1 \times {}_3C_2 \times {}_4C_1 = 3 \times 3 \times 4 = 36$
(3) 2개의 건설회사에 원서를 내는 경우
통신회사, 증권회사에 각각 1개씩의 입사원서를 내면 된다.
${}_3C_1 \times {}_3C_1 \times {}_4C_2 = 3 \times 3 \times 6 = 54$
(1), (2), (3)은 동시에 일어나지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$36 + 36 + 54 = 126$

답 126

[풀이2]
3개의 증권 회사, 3개의 통신 회사, 4개의 건설 회사를 각각
A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, C_4
라고 하자.
구하는 경우의 수는

$$\underbrace{{}_3C_1}_{A} \times \underbrace{{}_3C_1}_{B} \times \underbrace{{}_4C_1}_{C} \times \underbrace{{}_7C_1}_{A,\ B,\ C} \times \frac{1}{2!} = 126$$

이때, 2!으로 나누는 이유는 다음과 같이 중복되는 경우가 발생하기 때문이다. (→의 순서대로 네 번 선택하는 것이다.)
$A_2 \to B_3 \to C_1 \to A_1$
$A_1 \to B_3 \to C_1 \to A_2$(위와 중복된다.)
$A_3 \to B_1 \to C_3 \to C_2$
$A_3 \to B_1 \to C_2 \to C_3$(위와 중복된다.)
⋮

답 126

35)
V035

|답 ④

[풀이]
A 지역의 세 곳의 관광지 중에서 세 곳을 선택하는
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_3C_3$
B 지역의 네 곳의 관광지 중에서 세 곳을 선택하는
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_3$
C 지역의 다섯 곳의 관광지 중에서 세 곳을 선택하는
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_3$
D 지역의 여섯 곳의 관광지 중에서 세 곳을 선택하는
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_6C_3$
전체 관광지에서 세 곳을 선택하는 경우의 수는
합의 법칙에 의하여
${}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3 = 1 + 4 + 10 + 20 = 35$

답 ④

[참고] +확률과 통계(이항정리)
파스칼의 삼각형을 이용하여 계산하면
${}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3 = {}_7C_4 = 35$

36)
V036

|답 ③

[풀이] ★
▸ ㄱ. (참)

$$\underbrace{1 \quad 2}_{\text{한 개 선택}} \quad \boxed{3} \quad \underbrace{4 \quad 5 \quad \cdots \quad 99 \quad 100}_{\text{서로 다른 두 개 선택}}$$

3 보다 작은 자연수 중에서 한 개를 선택하는
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_2C_1$
3 보다 큰 100 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 개를 선택하는
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_{97}C_2$
곱의 법칙에 의하여
$a_3 = {}_2C_1 \times {}_{97}C_2$
예를 들어 아래와 같은 경우들이 가능하다.
$\{1,\ 3,\ 5,\ 20\}$, $\{1,\ 3,\ 77,\ 94\}$,
$\{2,\ 3,\ 16,\ 84\}$, ⋯
▸ ㄴ. (거짓)
10 보다 작은 자연수 중에서 한 개를 선택하는
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_9C_1$
10 보다 큰 100 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 개를 선택하

는
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_{90}\mathrm{C}_2$
곱의 법칙에 의하여
$a_{10} = {}_9\mathrm{C}_1 \times {}_{90}\mathrm{C}_2$
90 보다 작은 자연수 중에서 한 개를 선택하는
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_{89}\mathrm{C}_1$
90 보다 큰 100 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 개를 선택하는
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_{10}\mathrm{C}_2$
곱의 법칙에 의하여
$a_{90} = {}_{89}\mathrm{C}_1 \times {}_{10}\mathrm{C}_2$

$\therefore\ a_{10} = 9 \times \dfrac{90 \times 89}{2} \neq 89 \times \dfrac{10 \times 9}{2} = a_{90}$

▸ ㄷ. (참)
1 이상 100 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택할 때, 4개의 수 중에서 두 번째로 작은 수를 k라고 하면 k는 2 이상 98 이하의 자연수이다. 왜냐하면 1, 99, 100은 4개의 수 중에서 두 번째로 작은 수 일수 없기 때문이다.
그리고 2 이상 98 이하의 서로 다른 두 자연수 i, j에 대하여 두 번째로 작은 수가 i인 4개의 수만을 원소로 하는 집합과 두 번째로 작은 수가 j인 4개의 수만을 원소로 하는 집합의 교집합은 공집합이므로

$\therefore\ \sum_{k=2}^{98} a_k = {}_{100}\mathrm{C}_4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.
답 ③

[참고] ★
보기 ㄷ을 수학적으로 엄밀하게 설명하면 다음과 같다.
1 이상 100 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택하는 사건을 A라고 하자.
1 이상 100 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택할 때, 선택된 4개의 수 중에서 k 보다 작은 수가 한 개이고, k 보다 큰 수가 두 개인 사건을 A_k라고 하자.
(단, k는 $2 \le k \le 98$인 자연수)
2 이상 98 이하의 서로 다른 두 자연수 i, j에 대하여
$A_i \cap A_j = \varnothing$
이고
$A = A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{97} \cup A_{98}$
이므로 합의 법칙에 의하여 1 이상 100 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택하는 경우의 수는
$a_2 + a_3 + \cdots + a_{98}$이다.

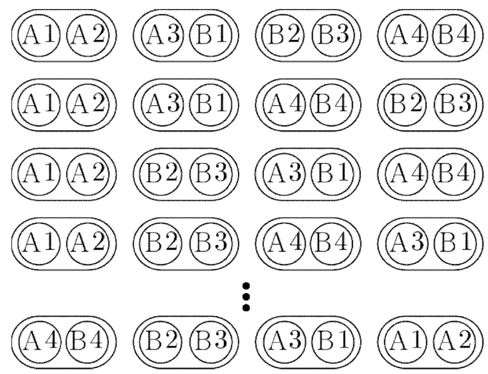
$\therefore\ {}_{100}\mathrm{C}_4 = \sum_{k=2}^{98} a_k$

37)
V037
|답 81

[풀이1] ★
아시아 4개국을 각각 A1, A2, A3, A4,
아프리카 4개국을 각각 B1, B2, B3, B4라고 하자.
8개국을 2개국씩 짝지어 4개의 그룹으로 나누는
경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_8\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2 \times \dfrac{1}{4!} = 105$

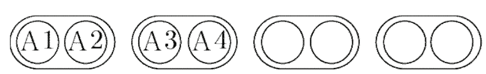
위의 계산에서 $4!$으로 나누는 이유는
${}_8\mathrm{C}_2 \times {}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2$
에서 중복 계산된 경우를 제외하기 위해서이다.
예를 들어 아래의 $24(=4!)$가지의 경우는 모두 같으므로
1가지의 경우로 계산해야 한다.



어느 아시아 2개국도 한 그룹에 속하지 않을
경우의 수는 순열의 수에 의하여
$4! = 24$
이때, $4!$은 아래의 4개의 빈칸에
아프리카 4개국을 배열하는 경우의 수이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $105 - 24 = 81$이다.
답 81

[풀이2] ★
아시아 4개국을 각각 A1, A2, A3, A4,
아프리카 4개국을 각각 B1, B2, B3, B4라고 하자.
(1) 두 개의 그룹이 아시아 국가만으로 이루어진 경우
예를 들어 아래와 같은 경우가 가능하다.



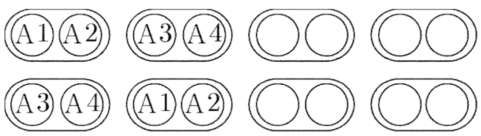
이때, 나머지 4개의 자리에 아프리카 4개국이 온다.
아시아 국가만으로 두 개의 그룹을 만드는
경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

$_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$

위의 계산에서 2!으로 나누는 이유는

$_4C_2 \times {}_2C_2$

에서 중복 계산된 경우를 제외하기 위해서이다.
예를 들어 아래의 2가지의 경우는 같으므로
1가지의 경우로 계산해야 한다.



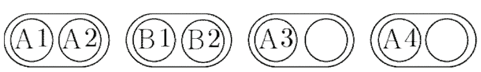
마찬가지의 방법으로 아프리카 국가만으로
두 개의 그룹을 만드는 경우의 수는
조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

$_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$

따라서 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 9$

(2) 오직 한 개의 그룹만이 아시아 국가만으로 이루어진 경우
또 다른 오직 한 개의 그룹은 아프리카 국가만으로 이루어져야 한다.
예를 들어 아래와 같은 경우가 가능하다.



이때, 나머지 2개의 자리에 B_1, B_2가 아닌 아프리카 2개국이 오면 된다.
경우의 수는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$_4C_2 \times {}_4C_2 \times 2! = 72$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$9 + 72 = 81$

답 81

[참고]
8개국을 2개국씩 짝지어 4개의 그룹으로 만드는 경우의 수를 다음과 같이 구해도 좋다.

$\frac{8!}{(2!)^4 4!} = 105$

38)
V038
|답 ④

▶ 실전풀이: [풀이2]

[풀이1] ★
아래 그림과 같이 유리 상자에 이름을 붙이자.

	1열	2열	3열	4열
a행	a_1	a_2	a_3	a_4
b행	b_1	b_2	b_3	b_4
c행	c_1	c_2	c_3	c_4

그림 (가)처럼 되기 위해서는 모든 열에 각각 1개의 검은 색 유리 상자가 와야 한다.
그림 (나)처럼 되기 위해서는 모든 행에 적어도 1개 이상의 검은 색 유리 상자가 와야 한다.
a행, b행, c행에 각각 2개, 1개, 1개씩의 검은 색 유리 상자가 오거나,
a행, b행, c행에 각각 1개, 2개, 1개씩의 검은 색 유리 상자가 오거나,
a행, b행, c행에 각각 1개, 1개, 2개씩의 검은 색 유리 상자가 오면 된다.
($\because$ 비둘기 집의 원리)
(1) a행에 2개의 유리 상자가 오는 경우
4개의 유리 상자 a_1, a_2, a_3, a_4 중에서 서로 다른 2개의 유리 상자를 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣는 방법의 수는 조합의 수에 의하여 $_4C_2$이다. 예를 들어 아래 그림과 같이 바꾸어졌다고 하자.

	1열	2열	3열	4열
a행	a_1	a_2	a_3	a_4
b행	b_1	b_2	b_3	b_4
c행	c_1	c_2	c_3	c_4

2개의 유리 상자 b_3, b_4 중에서 1개의 유리 상자를 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣는 방법의 수는 조합의 수에 의하여 $_2C_1$이다. 예를 들어 아래 그림과 같이 바꾸어졌다고 하자.

	1열	2열	3열	4열
a행	a_1	a_2	a_3	a_4
b행	b_1	b_2	b_3	b_4
c행	c_1	c_2	c_3	c_4

유리 상자 c_4를 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣으면 된다.

	1열	2열	3열	4열
a행	a_1	a_2	a_3	a_4
b행	b_1	b_2	b_3	b_4
c행	c_1	c_2	c_3	c_4

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$_4C_2 \times {}_2C_1 = 12$

(2) b행에 2개의 유리 상자가 오는 경우

예를 들어 아래와 같이 바꾸어 넣으면 된다.

	1열	2열	3열	4열
a행	a_1	a_2	a_3	a_4
b행	b_1	b_2	b_3	b_4
c행	c_1	c_2	c_3	c_4

(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수는

${}_4C_2 \times {}_2C_1 = 12$

(3) c행에 2개의 유리 상자가 오는 경우

예를 들어 아래와 같이 바꾸어 넣으면 된다.

	1열	2열	3열	4열
a행	a_1	a_2	a_3	a_4
b행	b_1	b_2	b_3	b_4
c행	c_1	c_2	c_3	c_4

(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수는

${}_4C_2 \times {}_2C_1 = 12$

(1), (2), (3)은 동시에 일어나지 않으므로

합의 법칙에서 구하는 경우의 수는

$12 + 12 + 12 = 36$

답 ④

[참고]

아래와 같은 계산도 가능하다.

(a행, b행, c행 중에서 2개의 검은 색 유리 상자가 오는 행을 결정하는 방법의 수)

×(앞서 결정된 행에서 2개의 검은 색 유리 상자가 오는 열을 결정하는 방법의 수)

×(나머지 2개의 검은 색 유리 상자가 오는 방법의 수)

$= 3 \times {}_4C_2 \times 2 \times 1 = 36$

[풀이2] ★

아래 그림과 같이 유리 상자에 이름을 붙이자.

	1열	2열	3열	4열
a행	a_1	a_2	a_3	a_4
b행	b_1	b_2	b_3	b_4
c행	c_1	c_2	c_3	c_4

그림 (가)처럼 되기 위해서는 모든 열에 각각 1개의 검은 색 유리 상자가 와야 한다.

그림 (나)처럼 되기 위해서는 모든 행에 적어도 1개 이상의 검은 색 유리 상자가 와야 한다.

즉, a행, b행, c행에 중에서 한 행에는 2개의 검은 색 유리 상자가 오고, 나머지 두 개의 행에 각각 1개의 검은 색 유리 상자가 오면 된다.

다음과 같은 순서대로 유리 상자를 검은 색 유리 상자로 바꾼다고 하자.

a행→b행→c행→(a행 또는 b행 또는 c행)

	1열	2열	3열	4열
a행	a_1	a_2	a_3	a_4
b행	b_1	b_2	b_3	b_4
c행	c_1	c_2	c_3	c_4

예를 들어 위의 그림과 같이 바꾸어졌다고 할 때,

다음의 두 가지의 순서가 가능하다.

$a_1 \to b_2 \to c_3 \to a_4$ 혹은 $a_4 \to b_2 \to c_3 \to a_1$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4 \times 3 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 36$

(※ 즉, $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$로 경우의 수를 구하면 안 된다.)

답 ④

39)

V039

| 답 ⑤

[풀이] ★

자연수를 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1 또는 2이므로

모든 자연수는 $3k$, $3k-1$, $3k-2$ 중의 하나이다.

(단, k는 자연수이다.)

서로 다른 두 자연수의 합이 3의 배수가 되는 경우는 아래의 두 가지 경우뿐이다.

$3k + 3k'$, $(3k-1) + (3k'-2)$

(단, k, k'는 자연수이다.)

30 이하의 홀수 중에서 3으로 나눈 나머지가 0인 홀수만을 원소로 하는 집합을 P_0이라고 하면

$P_0 = \{3, 9, 15, 21, 27\}$

30 이하의 홀수 중에서 3으로 나눈 나머지가 1인 홀수만을 원소로 하는 집합을 P_1이라고 하면

$P_1 = \{1, 7, 13, 19, 25\}$

30 이하의 홀수 중에서 3으로 나눈 나머지가 2인 홀수만을 원소로 하는 집합을 P_2이라고 하면

$P_2 = \{5, 11, 17, 23, 29\}$

(1) 집합 P_0의 서로 다른 두 원소를 합하는 경우

경우의 수는 조합의 수에 의하여

${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2} = 10$

(2) 두 집합 P_1, P_2의 원소 한 개씩을 합하는 경우

경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_5C_1 \times {}_5C_1 = 5 \times 5 = 25$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$25+10=35$

답 ⑤

40)

V040 |답 80

[풀이1]

다섯 곳의 휴양지를 각각 A, B, C, D, E라고 하자.

예를 들어 세 사람이 A휴양지를 선택하고 나머지 한 사람이 B, C, D, E 휴양지 중에서 한 휴양지를 선택할 경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

(A휴양지를 선택하는 세 사람의 경우의 수)×(B, C, D, E 휴양지 중에서 한 휴양지를 선택하는 경우의 수)

$= {}_4\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_1$

구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$5 \times {}_4\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_1 = 80$

답 80

[풀이2]

네 사람을 두 조(세 명/한 명)로 분할하는 방법의 수는

${}_4\mathrm{C}_3$

두 조가 휴양지를 택하는 방법의 수는

${}_5\mathrm{P}_2$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

${}_4\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{P}_2 = 80$

답 80

41)

V041 |답 25

[풀이]

(1) 한 세트에 A, B가 포함되는 경우 (C는 같은 세트에 담을 수 없다.)

D, E, F, G, H 중에서 서로 다른 2개를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5\mathrm{C}_2$이다.

(2) 한 세트에 A, B가 포함되지 않는 경우

C, D, E, F, G, H 중에서 서로 다른 4개를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_6\mathrm{C}_4(={}_6\mathrm{C}_2)$이다.

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2 + {}_6\mathrm{C}_4 = 10+15=25$

답 25

[참고]

8종류의 과자를 종류별로 각각 하나씩 사용하여 4개짜리 한 세트(예를 들어 A, B, D, E)와 또 다른 4개짜리 한 세트(C, F, G, H)를 만드는 경우의 수를 구하라는 문제가 아니다. 다시 말하면 8종류의 과자를 종류별로 각각 하나씩 사용하여 서로 다른 두 세트를 만드는 경우의 수를 구하는 문제가 아니다.

42)

V042 |답 160

[풀이1]

남학생 2명을 각각 a_1, a_2, 여학생 2명을 각각 b_1, b_2라고 하자.

남학생 a_1이 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수는 10이다.

예를 들어 아래와 같이 앉았다고 하자.

			a_1	

남학생 a_1 옆에 앉을 여학생을 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_2\mathrm{C}_1$이다.

예를 들어 b_2가 아래와 같이 앉았다고 하자.

			a_1	
			b_2	

남학생 a_2가 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수는 8이다.

예를 들어 아래와 같이 앉았다고 하자.

			a_1	
	a_2		b_2	

마지막으로 여학생 b_1이 남학생 a_2의 옆에 앉으면 된다. (경우의 수는 1이다.)

	b_1		a_1	
	a_2		b_2	

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$10 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times 8 \times 1 = 160$

답 160

[풀이2]

2명의 남학생을 각각 a_1, a_2, 2명의 여학생을 각각 b_1, b_2라고 하자.

놀이기구의 5줄 중에서 남녀 두 쌍이 앉을 2줄을 선택하는 방법의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5\mathrm{C}_2$이다.

예를 들어 아래와 같이 색칠된 줄에 남녀 두 쌍이 앉는 다고 하자.

남학생 a_1이 의자에 앉을 방법의 수는 4이다.
예를 들어 아래와 같이 앉았다고 하자.

	a_1			

남학생 a_2가 의자에 앉을 방법의 수는 2이다.
예를 들어 아래와 같이 앉았다고 하자.

				a_2
	a_1			

두 여학생 b_1, b_2가 의자에 앉을 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $2!$이다.
예를 들어 아래와 같이 앉았다고 하자.

	b_2			a_2
	a_1			b_1

구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여
${}_5\mathrm{C}_2 \times 4 \times 2 \times 2! = 160$

답 160

[풀이3]
학생 4명을 두 개의 조로 나누는 방법의 수는 2이다. 이때, 각각의 조에 속한 두 학생의 성별은 서로 다르다.
두 개의 조를 놀이기구에 앉히는 방법의 수는
${}_5\mathrm{P}_2 \times 2! \times 2!$
이다. 이때, ${}_5\mathrm{P}_2$는 두 개의 조가 앉을 줄을 결정하는 방법의 수이고, $2! \times 2!$은 각각의 조의 두 명이 앉을 자리를 결정하는 방법의 수이다.
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$2 \times {}_5\mathrm{P}_2 \times 2! \times 2! = 160$

답 160

43)
V043
| 답 200

[풀이]
5명의 여학생을 1호실, 2호실에 각각 3명, 2명 배정하는 방법의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여
${}_5\mathrm{C}_3 \times {}_2\mathrm{C}_2 = 10$
6명의 남학생을 3호실, 4호실에 각각 3명, 3명 배정하는 방법의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여
${}_6\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_3 = 20$
따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여
$10 \times 20 = 200$

답 200

44)
V044
| 답 ②

[풀이1]
여학생의 수를 x라고 하면 남학생의 수도 x이다.
전체 학생 중에서 3명의 대표를 선출하는 경우의 수는 조합의 수에서
${}_{2x}\mathrm{C}_3$
여학생 중에서 3명의 대표를 선출하는 경우의 수는 조합의 수에서
${}_x\mathrm{C}_3$
주어진 조건에서
${}_{2x}\mathrm{C}_3 = 10\,{}_x\mathrm{C}_3 (x \geq 3)$
$$\frac{2x(2x-1)(2x-2)}{3!} = 10 \times \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}$$
$2(2x-1) = 5(x-2)$
$\therefore\ x = 8$

답 ②

[풀이2] (선택)
남녀 구분 없이 3명의 대표를 선출하는 경우를 다음과 같이 구분하자.

남학생	3명	2명	1명	0명
여학생	0명	1명	2명	3명

여학생 중에서 3명의 대표를 선출하는 경우의 수를 n이라고 하면 남녀 구분 없이 3명의 대표를 선출하는 경우의 수는 $10n$이다.

남학생	3명	2명	1명	0명
여학생	0명	1명	2명	3명
경우	$9n$			n

남학생과 여학생의 수가 같으므로 남학생 중에서 3명의 대표를 선출하는 경우의 수와 여학생 중에서 3명의 대표를 선출하는 경우의 수는 같다.

남학생	3명	2명	1명	0명
여학생	0명	1명	2명	3명
경우	n	$8n$		n

남학생과 여학생의 수가 같으므로 남학생과 여학생 중에서 각각 2명과 1명의 대표를 선출하는 경우의 수와 남학생과 여학생 중에서 각각 1명과 2명의 대표를 선출하는 경우의 수는 같다.

남학생	3명	2명	1명	0명
여학생	0명	1명	2명	3명
경우	n	$4n$	$4n$	n

남학생과 여학생의 수를 각각 x라고 하자.
(남학생과 여학생 중에서 각각 1명과 2명의 대표를 선출하는 경우의 수)
$= {}_x\mathrm{C}_1 \times {}_x\mathrm{C}_2$
(여학생 중에서 3명의 대표를 선출하는 경우의 수)
$= {}_x\mathrm{C}_3$
${}_x\mathrm{C}_1 \times {}_x\mathrm{C}_2 : {}_x\mathrm{C}_3 = 4:1$(단, $x \ge 3$)
정리하면
$4\,{}_x\mathrm{C}_3 = {}_x\mathrm{C}_1 \times {}_x\mathrm{C}_2$
$4 \times \dfrac{x(x-1)(x-2)}{3!} = x \times \dfrac{x(x-1)}{2!}$
정리하면
$\dfrac{4}{3}(x-2) = x$
풀면
$\therefore\ x = 8$
답 ②

45)
V045 | 답 72

[풀이]
운전석에 어머니 혹은 아버지가 앉는 경우의 수는 2이다.
가운데 줄에 영희와 철수가 앉는 경우의 수는
조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_3\mathrm{C}_2 \times 2!(= {}_3\mathrm{P}_2)$이다.
남은 3자리에 운전석에 아직 앉지 않은 부모님과 할머니, 할아버지가 앉을 경우의 수는 순열의 수에 의하여 $3!$이다.
구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$2 \times ({}_3\mathrm{C}_2 \times 2!) \times 3! = 72$
답 72

46)
V046 | 답 ③

[풀이]
자연수 $abcde$가 5의 배수이므로 e는 5이다.
문제에서 주어진 조건을 다시 쓰면
$a > b > c,\ c < d < 5$　　$\cdots(*)$
이때, c가 가질 수 있는 값은 1 또는 2 또는 3이다.
(1) $c = 1$인 경우
(*)은
$a > b > 1,\ 1 < d < 5$
d가 가질 수 있는 자연수의 개수는 3,
a, b가 가질 수 있는 자연수의 개수는 조합의 수에 의하여 ${}_6\mathrm{C}_2$이다.
이때, a, b는 1, d, 5 일 수 없다.
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$3 \times {}_6\mathrm{C}_2 = 45$
(2) $c = 2$인 경우
(*)은
$a > b > 2,\ 2 < d < 5$
d가 가질 수 있는 자연수의 개수는 2,
a, b가 가질 수 있는 자연수의 개수는 조합의 수에 의하여 ${}_5\mathrm{C}_2$이다.
이때, a, b는 1, 2, d, 5 일 수 없다.
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$2 \times {}_5\mathrm{C}_2 = 20$
(3) $c = 3$인 경우
(*)은
$a > b > 3,\ 3 < d < 5$
d가 가질 수 있는 자연수의 개수는 1,
a, b가 가질 수 있는 자연수의 개수는 조합의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{C}_2$이다.
이때, a, b는 1, 2, 3, $d(=4)$, 5 일 수 없다.
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$1 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 6$
(1), (2), (3)은 동시에 일어나지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$45 + 20 + 6 = 71$
답 ③

47)
V047 | 답 ④

[풀이1]
(1) 자물쇠 A와 B를 여는 열쇠의 개수가 각각 2, 1인 경우
경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여
${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 18$
(2) 자물쇠 A와 B를 여는 열쇠의 개수가 각각 1, 2인 경우
경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여
${}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2 = 12$
(1), (2)는 동시에 일어나지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$18 + 12 = 30$
답 ④

[풀이2]
자물쇠 A 또는 B를 여는 열쇠 3개를 선택할 경우의 수는
조합의 수에 의하여
${}_7C_3=35$
자물쇠 A를 여는 열쇠 3개를 선택할 경우의 수는
조합의 수에 의하여
${}_4C_3=4$
자물쇠 B를 여는 열쇠 3개를 선택할 경우의 수는
조합의 수에 의하여
${}_3C_3=1$
구하는 경우의 수는
$35-(4+1)=30$
답 ④

48)
V048 | 답 ②

[풀이] ★
〈증명〉
(1) $n=2$일 때,
$A_2=\{1,\ 2\}$의 원소가 2개인 부분집합은 자신뿐이므로
$a_2=1=\dfrac{2+1}{3}$

(2) $n=k\ (k\geq 2)$일 때 성립한다고 가정하면 $a_k=\dfrac{k+1}{3}$이다.
$A_{k+1}=\{1,\ 2,\ \cdots,\ k,\ k+1\}$의 부분집합 중 원소가 2개인 모든 부분집합은 A_k의 부분집합 중 원소가 2개인 모든 부분집합에 k개의 집합 $\{1,\ k+1\}$, $\{2,\ k+1\}$, $\cdots$, $\{k,\ k+1\}$을 추가한 것이다.
A_k의 부분집합 중 원소가 2개인 각 부분집합에서 작은 원소를 뽑아서 모두 합한 값은
$\boxed{{}_kC_2}\times a_k$
($\because$ ${}_kC_2\times a_k=$(원소의 개수가 2인 부분집합의 개수)$\times$(평균)$=$(원소의 개수가 2인 각 부분집합에서 작은 원소를 뽑아 모두 합한 값))
이고, 각 집합 $\{1,\ k+1\}$, $\{2,\ k+1\}$, $\cdots$, $\{k,\ k+1\}$에서 작은 원소를 뽑아서 모두 합한 값은
$1+2+\ \cdots\ +k$
이므로

$$a_{k+1}=\frac{\boxed{{}_kC_2\times\dfrac{k+1}{3}}+(1+2+\ \cdots\ +k)}{{}_{k+1}C_2}$$

$$=\frac{\dfrac{k(k-1)}{2}\times\dfrac{k+1}{3}+\dfrac{k(k+1)}{2}}{\dfrac{(k+1)k}{2}}$$

$$=\frac{k+2}{3}=\frac{(k+1)+1}{3}$$

그러므로 (1), (2)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여
$a_n=\dfrac{n+1}{3}$이다.
(가): ${}_kC_2$
(나): ${}_kC_2\times\dfrac{k+1}{3}$
답 ②

49)
V049 | 답 60

[풀이1] ★
서로 다른 5종류의 체험 프로그램을 각각 a, b, c, d, e라고 하자.
A가 2종류의 프로그램을 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_2$이다.
예를 들어 A가 a와 d를 선택하였다고 하자.

a	b	c	d	e
A			A	

A가 선택한 2종류의 프로그램 중에서 B가 1종류의 프로그램을 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_2C_1$이다.
예를 들어 B가 d를 선택하였다고 하자.

a	b	c	d	e
A			A	
			B	

A가 선택하지 않은 3종류의 프로그램 중에서 B가 1종류의 프로그램을 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_3C_1$이다.
예를 들어 B가 c를 선택하였다고 하자.

a	b	c	d	e
A			A	
		B	B	

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
${}_5C_2\times{}_2C_1\times{}_3C_1=10\times 2\times 3=60$
답 60

[풀이2] ★
서로 다른 5종류의 체험 프로그램을 각각 a, b, c, d, e라고 하

자.
예를 들어 A, B가 공통으로 선택한 프로그램이 a일 때,
A, B가 a가 아닌 b, c, d, e 중에서 서로 다른 프로그램을 선택할 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 4×3이다.
A, B가 공통으로 선택할 수 있는 프로그램의 수는 5이므로
구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$5\times12=60$

답 60

[풀이3] +확률과 통계(조합) ★
서로 다른 5종류의 체험 프로그램을 각각 a, b, c, d, e라고 하자.
(1) A, B가 선택한 프로그램이 모두 같은 경우
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_2$이다.
(2) A, B가 선택한 프로그램이 모두 다른 경우
경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_5C_2\times{}_3C_2$이다.
구하는 경우의 수는
${}_5C_2\times{}_5C_2-({}_5C_2+{}_5C_2\times{}_3C_2)=100-40=60$

답 60

[풀이4] ★
A가 선택한 프로그램만을 원소로 갖는 집합을 A,
B가 선택한 프로그램만을 원소로 갖는 집합을 B
라고 하자. 문제에서 주어진 조건에 의하여
$n(A\cap B)=1$, $n(A^C\cap B)=1$, $n(A\cap B^C)=1$,
$n((A\cup B)^C)=2$
을 만족시키면 된다.
세 개의 집합
$A\cap B$, $A^C\cap B$, $A\cap B^C$
에 속할 각각의 원소를 결정하는 방법의 수는
곱의 법칙에 의하여
$5\times4\times3=60$ (혹은 순열의 수에 의하여 ${}_5P_3$이다.)

답 60

50)
V050
|답 ③

[풀이]
100 이하의 자연수에서 서로 다른 3개를 선택할 때,
17을 포함하는 방법의 수는 조합의 수에 의하여
$a=1\times{}_{99}C_2$
100 이하의 자연수에서 서로 다른 3개를 선택할 때,
17을 포함하는 않는 방법의 수는 조합의 수에 의하여
$b={}_{99}C_3$

$$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{\dfrac{99\times98\times97}{1\times2\times3}}{\dfrac{99\times98}{1\times2}}=\frac{97}{3}$$

답 ③

51)
V051
|답 ④

[풀이]
(1) $1500=1000+300+200$인 경우
햄, 맛살, 김치 중에서 하나를 선택하고,
불고기, 치즈, 참치 중에서 하나를 선택하면 된다.
경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여
${}_3C_1\times{}_3C_1=9$
(2) $2000=1000+300+300+200+200$인 경우
햄, 맛살, 김치 중에서 두 개를 선택하고,
불고기, 치즈, 참치 중에서 두 개를 선택하면 된다.
경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여
${}_3C_2\times{}_3C_2=9$
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$9+9=18$

답 ④

52)
V052
|답 ⑤

[풀이]
(1) 남자와 여자를 각각 3명씩 선택하는 경우
조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
${}_5C_3\times{}_3C_3=10$
(2) 남자와 여자를 각각 2명씩 선택하는 경우
조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
${}_5C_2\times{}_3C_2=30$
(3) 남자와 여자를 각각 1명씩 선택하는 경우
조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
${}_5C_1\times{}_3C_1=15$
(1), (2), (3)은 동시에 일어나지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$10+30+15=55$

답 ⑤

53)
V053
|답 ②

[풀이]

〈증명〉

(1) $n=1$일 때,

(좌변)$=\dfrac{{}_1C_0}{{}_5C_0}+\dfrac{{}_1C_1}{{}_5C_1}=\dfrac{6}{5}$, (우변)$=\dfrac{1+5}{5}=\dfrac{6}{5}$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=m$일 때, 등식

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_mC_k}{{}_{m+4}C_k}=\frac{m+5}{5}$$

가 성립한다고 가정하자. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=0}^{m+1}\frac{{}_{m+1}C_k}{{}_{m+5}C_k}$$

$$=\frac{{}_{m+1}C_0}{{}_{m+5}C_0}+\left(\frac{{}_{m+1}C_1}{{}_{m+5}C_1}+\frac{{}_{m+1}C_2}{{}_{m+5}C_2}+\cdots+\frac{{}_{m+1}C_{m+1}}{{}_{m+5}C_{m+1}}\right)$$

$$=\boxed{1}+\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m+1}C_{k+1}}{{}_{m+5}C_{k+1}}$$

이다. 자연수 l에 대하여

${}_{l+1}C_{k+1}$

$$=\frac{(l+1)\cdot l\cdot(l-1)\cdot\ \cdots\ \cdot(l-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ \cdots\ \cdot(k+1)}$$

$$=\frac{l+1}{k+1}\cdot\frac{l\cdot(l-1)\cdot\ \cdots\ \cdot(l-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ \cdots\ \cdot k}$$

$$=\boxed{\frac{l+1}{k+1}}\cdot{}_lC_k(0\le k\le l)$$

이므로

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m+1}C_{k+1}}{{}_{m+5}C_{k+1}}=\sum_{k=0}^{m}\frac{\frac{m+1}{k+1}\cdot{}_mC_k}{\frac{m+5}{k+1}\cdot{}_{m+4}C_k}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{m+1}{m+5}\cdot\frac{{}_mC_k}{{}_{m+4}C_k}=\boxed{\frac{m+1}{m+5}}\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_mC_k}{{}_{m+4}C_k}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{m+1}\frac{{}_{m+1}C_k}{{}_{m+5}C_k}=\boxed{1}+\boxed{\frac{m+1}{m+5}}\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_mC_k}{{}_{m+4}C_k}$$

$=1+\dfrac{m+1}{m+5}\cdot\dfrac{m+5}{5}=\dfrac{m+6}{5}$이다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

(가): 1 (나): $\dfrac{l+1}{k+1}$ (다): $\dfrac{m+1}{m+5}$

답 ②

54)

V054 |답 30

[풀이1]

서로 다른 4개의 동아리를 각각 '가', '나', '다', '라' 라고 하자.

A와 B가 공통으로 가입하는 동아리의 개수는

0 또는 1 또는 2

이다.

A와 B가 동아리에 가입하는 경우의 수는

조합의 수에 의하여 각각 ${}_4C_2$, ${}_4C_2$이다.

A와 B가 공통으로 가입하는 동아리의 개수가 2인

경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_4C_2-{}_4C_2=36-6=30$

답 30

[풀이2]

서로 다른 4개의 동아리를 각각 '가', '나', '다', '라' 라고 하자.

(1) A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 없는 경우

우선 A가 2개의 동아리에 가입한다.

	가	나	다	라
A		○		○
B		×		×

이제 B가 남은 2개의 동아리에 가입하면 된다.

	가	나	다	라
A		○		○
B	○	×	○	×

경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

${}_4C_2\times1=6$

(2) A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 1개인 경우

우선 A와 B가 1개의 동아리에 함께 가입한다.

	가	나	다	라
A			○	
B			○	

A가 남은 3개의 동아리 중에서 1개에 가입한다.

	가	나	다	라
A		○	○	
B		×	○	

B가 남은 2개의 동아리 중에서 1개에 가입한다.

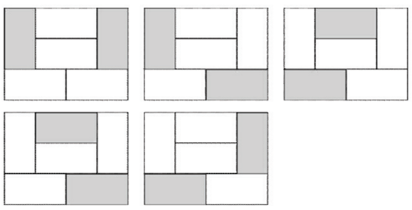
	가	나	다	라
A		○	○	
B	○	×	○	

경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

${}_4C_1 \times 3 \times 2 = 24$
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$6+24=30$
답 30

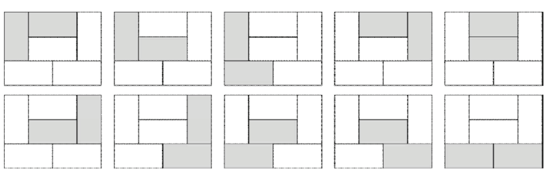
55)
V055 |답 ⑤

[풀이1]
1명의 조사원이 서로 이웃하지 않은 2개의 지역을 담당하는 경우를 생각하자.



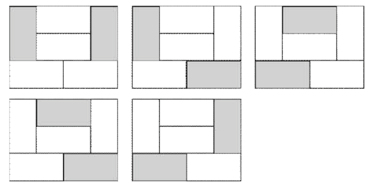
위의 그림과 같이 서로 이웃하지 않은 2개의 지역을 선택하는 경우의 수는 5이므로, 서로 이웃한 2개의 지역을 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_2-5$이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$({}_6C_2-5)\times{}_5P_5=1200$
이때, ${}_5P_5$는 5명의 조사원을 배치할 경우의 수이다.
답 ⑤

[풀이2]
서로 이웃한 2개의 지역을 모두 나타내자.



위의 그림처럼 서로 이웃한 2개의 지역의 수는 10이다.
서로 이웃한 2개의 지역에 조사원을 배치할
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_1$이고,
남은 4개의 지역에 조사원을 배치할
경우의 수는 순열의 수에 의하여 $4!(={}_4P_4)$이므로
구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$10\times{}_5C_1\times 4!=1200$
$(=10\times{}_5P_5$←서로 이웃한 2개의 지역을 1개의 지역으로 간주하고, 5개의 지역에 조사원 5명을 배치할 경우의 수)
답 ⑤

[풀이3]
같은 것이 있는 순열의 수와 여집합을 이용하여 문제를 해결해보자.
서로 이웃하지 않은 2개의 지역을 모두 선택하면 다음과 같다.



5명의 조사원을 각각 a, b, c, d, e라고 하자.
5명의 조사원 중에서 '서로 이웃한 2개의 지역'을 담당할 조사원을 선택할 경우의 수는 ${}_5C_1$이다. 예를 들어 a가 선택되었다고 하자.
a, a, b, c, d, e 각각이 담당 지역을 정할 경우의 수는
$\dfrac{6!}{2!}$
위의 그림에서 어둡게 색칠된 지역을 a, a가 담당하였을 때, b, c, d, e 각각이 담당 지역을 정할 경우의 수는
$5\times 4!$
따라서 구하는 경우의 수는
${}_5C_1\left(\dfrac{6!}{2!}-5\times 4!\right)=1200$
답 ⑤

56)
V056 |답 8

[풀이]
${}_nP_3$이 성립하려면 n은 3 이상의 자연수이어야 한다.
순열의 수와 조합의 수에 의하여
${}_nP_3=n(n-1)(n-2)$, ${}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$
주어진 방정식은
$n(n-1)(n-2)=6n(n-1)$
양변을 양수 $n(n-1)$로 나누면
$n-2=6$
$\therefore\ n=8(\geq 3)$
답 8

57)
V057 |답 ④

[풀이]
5일 중에서 3일을 선택하는 경우의 수는
조합의 수에 의하여 ${}_5C_3$이다.
남은 2일 중에서 하루를 선택하여 수영, 줄넘기 중 한 가지를 할 경

우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_2\mathrm{C}_1 \times 2$이다.

남은 하루에 농구, 축구 중 한 가지를 할 경우의 수는 2이다.

구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

${}_5\mathrm{C}_3 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times 2 \times 2 = 80$

답 ④

58)

V058 |답 ①

[풀이] ★

조건 (가)에 의하여 함수 f의 치역으로 가능한 집합의 개수는 조합의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{C}_2$이다.

예를 들어 함수 f의 치역을 $\{1, 2\}$라고 하자.

(1) $f(1)=1$인 경우

합성함수의 정의에 의하여

$f(f(1)) = f(1) = 1$

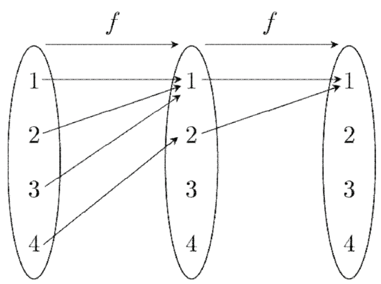
조건 (나)에 의하여

함수 $f \circ f$의 치역은 $\{1\}$이므로

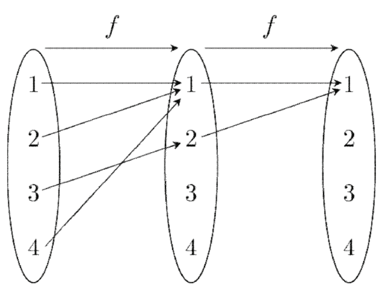
$f(2)=1$

조건 (가), (나)가 모두 성립하는 경우는 다음과 같다.

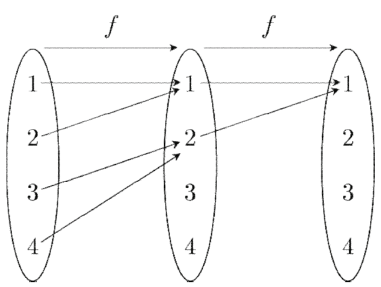
$f(3)=1, f(4)=2$인 경우



$f(3)=2, f(4)=1$인 경우



$f(3)=2, f(4)=2$인 경우



경우의 수는 3이다.

(2) $f(1)=2$인 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수는 3이다.

구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

${}_4\mathrm{C}_2 \times 2 \times 3 = 36$

답 ①

59)

V059 |답 11

[풀이]

${}_n\mathrm{C}_3$이 성립하기 위해서는 n은 3 이상의 자연수이어야 한다.

조합의 수와 순열의 수의 정의에 의하여

${}_n\mathrm{C}_3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$, ${}_n\mathrm{P}_2 = n(n-1)$

주어진 등식에 대입하면

$2 \times \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = 3 \times n(n-1)$

양변을 양수 $n(n-1)$로 나누어 정리하면

$n-2=9$

$\therefore \ n=11$

답 11

60)

V060 |답 20

[풀이]

우선 주어진 6개의 공에서 3개를 선택하여 바구니 A에 담자.

이때, 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_6\mathrm{C}_3$이다.

이제 남은 3개의 공을 바구니 B에 담자.

이때, 경우의 수는 1이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

${}_6\mathrm{C}_3 \times 1 = 20$

답 20

61)

V061 |답 60

[풀이]

1학년 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

조합의 수에 의하여 ${}_6\mathrm{C}_4$,

2학년 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

조합의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{C}_3$이므로

구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

${}_6\mathrm{C}_4 \times {}_4\mathrm{C}_3 = {}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_1 = \dfrac{6 \times 5}{2 \times 1} \times 4 = 60$

답 60

62)
V062 | 답 45

[풀이1]
문제에서 주어진 집합의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 조합의 수에 의하여

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{1\times2}=10$$

이 10개의 부분집합 중에서 임의로 선택한 두 집합은 서로 같지 않다.
따라서 구하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

$${}_{10}C_2=\frac{10\times9}{1\times2}=45$$

답 45

[참고]
문제에서 주어진 집합의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 부분집합을 모두 쓰면 다음과 같다.
$\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{1,\ 5\}$
$\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{2,\ 5\}$,
$\{3,\ 4\}$, $\{3,\ 5\}$,
$\{4,\ 5\}$

[풀이2]
문제에서 주어진 집합의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_2(=10)$이다. 이 10개의 집합 중에서 임의로 2개의 집합을 선택한다고 하자.
(1) 선택된 두 집합의 교집합의 원소의 개수가 0인 경우
(즉, 교집합이 공집합인 경우)
예를 들어, 선택된 두 집합이 각각 $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 5\}$인 경우이다.
1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 두 개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_2$이다. 예를 들어 1, 3을 선택하였을 때, 남은 2, 4, 5 중에서 서로 다른 두 개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_3C_2$이다. 예를 들어 2, 5를 선택하였다고 하자. 이때, $\{1,\ 3\}\to\{2,\ 5\}$의 순서대로 선택하는 경우와 $\{2,\ 5\}\to\{1,\ 3\}$의 순서대로 선택하는 경우가 중복되므로 ${}_5C_2\times{}_3C_2$를 순열의 수 $2!(={}_2P_2)$로 나누어 주어야 한다.
경우의 수는 조합의 수, 곱의 법칙, 순열의 수에 의하여

$$\frac{{}_5C_2\times{}_3C_2}{2!}=15$$

(2) 선택된 두 집합의 교집합의 원소의 개수가 1인 경우
(즉, 교집합이 공집합이 아닌 경우)
예를 들어, 선택된 두 집합이 각각 $\{1,\ 3\}$, $\{3,\ 4\}$인 경우이다.
1, 2, 3, 4, 5 중에서 '선택된 두 집합의 교집합의 원소가 될' 한 개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_1$이다. 예를 들어 3을 선택하였을 때, 남은 1, 2, 4, 5 중에서 한 개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_1$이다. 예를 들어 1을 선택하였을 때($\{1,\ 3\}$), 남은 2, 4, 5 중에서 한 개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_3C_1$이다. 예를 들어 4를 선택하였다고 하자.($\{3,\ 4\}$) 이때, $\{1,\ 3\}\to\{3,\ 4\}$의 순서대로 선택하는 경우와 $\{3,\ 4\}\to\{1,\ 3\}$의 순서대로 선택하는 경우가 중복되므로 ${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_1$을 순열의 수 $2!$ $(={}_2P_2)$로 나누어 주어야 한다.
경우의 수는 조합의 수, 곱의 법칙, 순열의 수에 의하여

$$\frac{{}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_1}{2!}=30$$

(1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로,
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$$\frac{{}_5C_2\times{}_3C_2}{2!}+\frac{5\times{}_4C_1\times{}_3C_1}{2!}=15+30=45$$

답 45

[풀이3]
문제에서 주어진 집합의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 부분집합을 두 개 선택하여 각각 A, B라고 하자.
$A=B$인 경우의 수가 ${}_5C_2$이므로
$A\neq B$인 경우의 수는 $\underbrace{{}_5C_2}_{A}\cdot\underbrace{{}_5C_2}_{B}-\underbrace{{}_5C_2}_{A=B}$ 이다.
따라서 구하는 경우의 수는

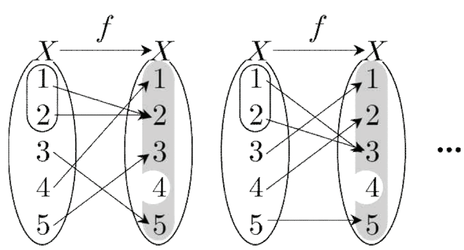
$$\frac{{}_5C_2\cdot{}_5C_2-{}_5C_2}{2!}=45$$

이때, $2!$으로 나누는 이유는 다음과 같이 중복되는 경우가 발생하기 때문이다.
$A=\{1,\ 2\}$, $B=\{3,\ 4\}$
$A=\{3,\ 4\}$, $B=\{1,\ 2\}$ (위와 중복)
$A=\{1,\ 2\}$, $B=\{2,\ 3\}$
$A=\{2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2\}$ (위와 중복)
⋮
답 45

63)
V063 | 답 ⑤

[풀이] ★
〈과정〉
(i) 공역 X의 원소 중 짝수인 원소가 2개이므로 집합 A의 네 원소 중 세 원소는 홀수이고 한 원소는 짝수이다.
(∵ '짝+짝+홀+홀=짝' (←더해지는 짝수의 개수가 2인 경우), '짝+홀+홀+홀=홀' (←더해지는 짝수의 개수가 1인 경우), 그리고

더해지는 짝수의 개수가 0인 경우는 없다.)
따라서 집합 X의 원소 중에서 집합 A의 네 원소를 택하는 경우의 수는 2이다.
($\leftarrow$ $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$ 또는 $A=\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$)
(ii) 정의역 X를 4개의 부분집합으로 분할할 때, 4개의 부분집합의 원소의 개수는 각각 2, 1, 1, 1이 되어야 한다.
($\because$ $5=5$
$=4+1$
$=3+2=3+1+1$
$=2+2+1=\boxed{2+1+1+1}$
$=1+1+1+1+1$)
따라서 집합 X를 4개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수는 $\boxed{{}_5\mathrm{C}_2}$ 이다.
($\because$
$X=\boxed{\{1,\ 2\}}\cup\{3\}\cup\{4\}\cup\{5\}$,
$X=\boxed{\{1,\ 3\}}\cup\{2\}\cup\{4\}\cup\{5\}$,
$\vdots$
$X=\boxed{\{4,\ 5\}}\cup\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}$
이때, $\boxed{}$ 안에 올 집합을 결정할 경우의 수는 다섯 개의 수 1, 2, 3, 4, 5 중에서 두 개의 수를 선택하는 조합의 수 ${}_5\mathrm{C}_2$와 같다.)
(iii) (i)과 (ii)의 각 경우에 대하여 집합 X를 분할한 4개의 부분집합을 집합 A의 네 원소에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $\boxed{4!}$이다. ($\leftarrow$비둘기 집의 원리)
($\because$ 예를 들어
집합 X를
$X=\underbrace{\{1,\ 2\}}_{\text{원소 2개}}\cup\underbrace{\{3\}}_{\text{원소 1개}}\cup\underbrace{\{4\}}_{\text{원소 1개}}\cup\underbrace{\{5\}}_{\text{원소 1개}}$
와 같이 서로 다른 4개의 집합의 합집합으로 보고,
집합 A를
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$
으로 둘 때, 다음과 같은 경우가 가능하다.

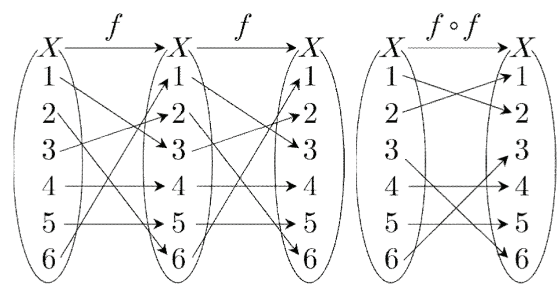


네 개의 집합 $\{1,\ 2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$에 집합 A의 서로 다른 원소를 각각 대응시킬 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{P}_4=4!$이다.)
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는
곱의 법칙에 의하여 $\boxed{2\times{}_5\mathrm{C}_2\times 4!}$이다.

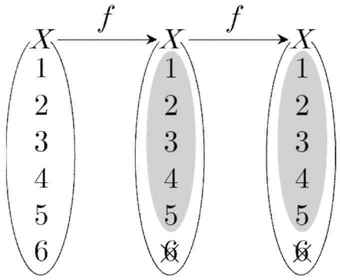
(가): ${}_5\mathrm{C}_2=10$
(나): $4!=24$
(다): $2\times{}_5\mathrm{C}_2\times 4!=480$
$\therefore$ $a+b+c=514$
답 ⑤

64)
V064 | 답 ①

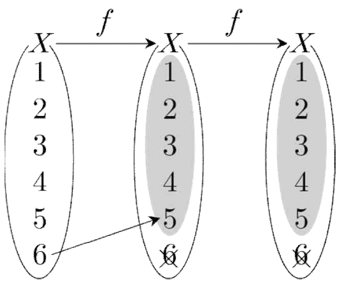
[풀이] ★
〈과정〉
함수 f와 함수 $f\circ f$의 치역을 각각 A와 B라 하자.
$n(A)=6$이면 함수 f는 일대일대응이고,
함수 $f\circ f$도 일대일대응이므로
$n(B)=6$이다.
예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



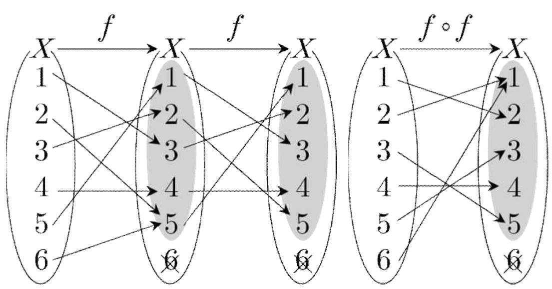
또한 $n(A)\le 4$이면 $B\subset A$이므로
($\because$ $A=\{f(x)|x\in X\}$, $B=\{f(f(x))|x\in X\}$
이므로 집합 B의 모든 원소는 집합 A의 원소이다.)
$n(B)\le 4$이다.
그러므로 $n(A)=5$,
즉 $B=A$인 경우만 생각하면 된다.
($\because$ 6 이하의 자연수 $n(A)$가 6, 4, 3, 2, 1
을 값으로 갖지 못하므로
$n(A)$의 값은 5일 수 밖에 없는 것이다.
그리고 집합 A의 부분집합 중에서
원소의 개수가 5인 집합은 집합 A뿐이다.)
(i) $n(A)=5$인 X의 부분집합 A를
선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 $\boxed{{}_6\mathrm{C}_5}$이다.
예를 들어 집합 A가 다음과 같이
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$라고 하자.



(ii) (i)에서 선택한 집합 A에 대하여,
X의 원소 중 A에 속하지 않는 원소를 k라 하자.
($\leftarrow$위와 같은 경우 $k=6$이다.)
$n(A)=5$이므로 집합 A에서 $f(k)$를
선택하는 경우의 수는 $\boxed{5}$이다.
예를 들어 $f(k)=f(6)=5$라고 하자.



(iii) (i)에서 선택한
$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$
와 (ii)에서 선택한 $f(k)$에 대하여,
$f(k)\in A$이며 $A=B$이므로
$A=\{f(a_1),\ f(a_2),\ f(a_3),\ f(a_4),\ f(a_5)\}$ $\cdots$(*)
이다. (*)을 만족시키는 경우의 수는
집합 A에서 집합 A로의 일대일대응의 개수와
같으므로 $\boxed{5!}$이다.
예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.

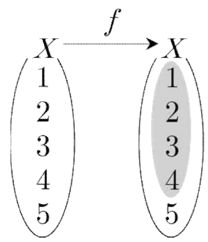


따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는
함수 f의 개수는
$\boxed{{}_6\mathrm{C}_5}\times\boxed{5}\times\boxed{5!}$이다.
이상에서
(가): $p=6$
(나): $q=5$
(다): $r=120$

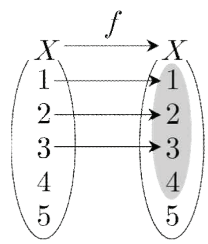
$\therefore\ p+q+r=6+5+120=131$
답 ①

65)
V065
|답 60

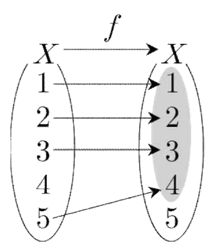
[풀이]
조건 (가)에 의하여 함수 f의 치역 $f(X)$의 원소의 개수는 4이다. 이때, 함수 f의 치역을 결정하는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{C}_4$이다.
예를 들어 $f(X)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$라고 하자.



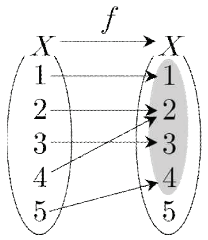
조건 (나)를 만족시키는 집합 X의 원소 $a(\in f(X))$를 결정하는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3$이다.
예를 들어 $f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=3$이라고 하자.



$f(b)=4$이면 $b=5$이다.
왜냐하면
$f(1)=1\neq 4,\ f(2)=2\neq 4,$
$f(3)=3\neq 4,\ f(4)\neq 4$
이기 때문이다.
만약 $f(4)=4$이면 $f(a)=a$인 집합 X의 원소 a의 개수는 4이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



$f(4)$가 가질 수 있는 값은 1 또는 2 또는 3이다.
왜냐하면 $f(4)\neq 4,\ f(4)\neq 5$이기 때문이다.
예를 들어 $f(4)=2$라고 하자.



따라서 함수 $f:X\to X$의 개수는 곱의 법칙에 의하여

${}_5C_4\times{}_4C_3\times3=60$

답 60

66)

V066

| 답 ④

[풀이] ★

서로 다른 n개를 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\cdots$, $\boxed{n}$이라 하자.

(1)

$\boxed{1}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{{}_{n-1}C_{r-1}}$이다.

$(\because \underbrace{\underbrace{1}_{\text{선택}}\ \underbrace{2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n}_{n-1\text{개 중에서 } r-1\text{개를 선택}}}_{n\text{개 중에서 } r\text{개를 선택}})$

$\boxed{2}$를 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{{}_{n-1}C_{r-1}}$이다.

$(\because \underbrace{\underbrace{2}_{\text{선택}}\ \underbrace{1,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n}_{n-1\text{개 중에서 } r-1\text{개를 선택}}}_{n\text{개 중에서 } r\text{개를 선택}})$

$\boxed{3}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{{}_{n-1}C_{r-1}}$이다.

$(\because \underbrace{\underbrace{3}_{\text{선택}}\ \underbrace{1,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ n}_{n-1\text{개 중에서 } r-1\text{개를 선택}}}_{n\text{개 중에서 } r\text{개를 선택}})$

$\vdots$

$\boxed{n}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{{}_{n-1}C_{r-1}}$이다.

$(\because \underbrace{\underbrace{n}_{\text{선택}}\ \underbrace{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1}_{n-1\text{개 중에서 } r-1\text{개를 선택}}}_{n\text{개 중에서 } r\text{개를 선택}})$

이상을 모두 합하면 $n\times\boxed{{}_{n-1}C_{r-1}}$이다. $\cdots$㉠

(2) 그런데 위의 ㉠에 있는 조합의 수 중에는 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\cdots$, $\boxed{r}$의 r개로 구성된 하나의 조합이 $\boxed{r}$번 반복되어 계산되었다.

왜냐하면 다음과 같이 r번 중복되기 때문이다.

$\boxed{1}$을 포함하여 r개를 선택하는 경우

$:\ \underbrace{\underbrace{1}_{1\text{개}}\ \underbrace{2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ r}_{r-1\text{개}}}_{r\text{개}}$

$\boxed{2}$를 포함하여 r개를 선택하는 경우

$:\ \underbrace{\underbrace{2}_{1\text{개}}\ \underbrace{1,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ r}_{r-1\text{개}}}_{r\text{개}}$

$\boxed{3}$을 포함하여 r개를 선택하는 경우

$:\ \underbrace{\underbrace{3}_{1\text{개}}\ \underbrace{1,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ r}_{r-1\text{개}}}_{r\text{개}}$

$\vdots$

$\boxed{r}$을 포함하여 r개를 선택하는 경우

$:\ \underbrace{\underbrace{r}_{1\text{개}}\ \underbrace{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ r-1}_{r-1\text{개}}}_{r\text{개}}$

(중략)

(1), (2)로부터 서로 다른 n개에서 r개를 선택하는 조합의 수 ${}_nC_r$는

$${}_nC_r=\boxed{\frac{n}{r}}\times{}_{n-1}C_{r-1}$$

(=(1)에서 구한 경우의 수를 r로 나눈다.)

이상에서

(가): ${}_{n-1}C_{r-1}$

(나): r

(다): $\dfrac{n}{r}$

답 ④

67)

V067

| 답 60

[풀이1]

문제에서 주어진 9개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

${}_9C_3=84$

그런데 택한 3개의 점이 한 직선 위에 있으면 삼각형이 결정되지 않으므로, 이에 해당하는 경우의 수를 제외해야 한다.

선분 AF 위의 6개의 점 중에서 3개의 점을 택할 경우의 수는

${}_6C_3=20$

선분 CI 위의 4개의 점 중에서 3개의 점을 택할 경우의 수는

${}_4C_3=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$84-(20+4)=60$

답 60

[풀이2]

한 직선 위에 있는 세 점은 삼각형을 결정하지 않는다.

- (1) 삼각형의 한 변이 선분 AF 위에 있고, 꼭짓점이 선분 GI 위에 있는 경우

선분 AF 위의 6개의 점 중에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

${}_6C_2=15$

선분 GI 위의 3개의 점 중에서 1개의 점을 택하는 경우의 수는 3이다.

경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$15 \times 3 = 45$

• (2) 삼각형의 한 변이 선분 CI 위에 있고, 꼭짓점이 선분 AB 또는 DF 위에 있는 경우

선분 CI 위의 4개의 점 중에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

${}_4C_2 = 6$

선분 AB 또는 선분 DF 위의 5개의 점 중에서 1개의 점을 택하는 경우의 수는 5이다.

경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$6 \times 5 = 30$

이제 (1), (2)에 모두 해당하는 경우의 수를 구하자.

예를 들어 삼각형 DCG는 (1), (2)에 모두 해당한다.

점 C를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$5 \times 3 = 15$

이때, 5는 선분 AF에서 점 C를 제외한 점들의 개수이고, 3은 선분 CI에서 점 C를 제외한 점들의 개수이다.

구하는 경우의 수는

$45 + 30 - 15 = 60$

답 60

68)

V068

|답 ④

[풀이]

세 가지 색 빨강, 파랑, 노랑 보자기를 각각 R, B, Y라고 하자.

첫 번째 행에 보자기를 덮을 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_3P_3 = 3!$이다. 예를 들어 다음과 같은 경우를 생각하자.

R	B	Y

2행 1열, 3행 1열에 보자기를 덮는 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_2P_2 = 2!$이다. 예를 들어 다음과 같은 경우를 생각하자.

R	B	Y
Y		
B		

이제 남은 보자기를 덮으면 다음과 같다.

R	B	Y
Y	R	B
B	Y	R

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3! \times 2! = 12$

답 ④

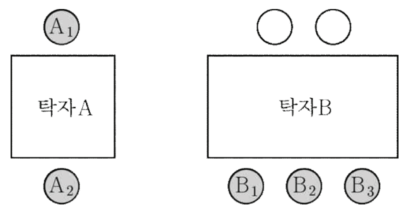
69)

V069

|답 64

[풀이]

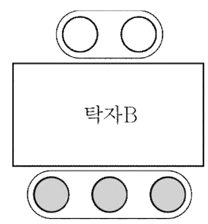
탁자 A에 앉은 2명을 A_1, A_2, 탁자 B에 앉은 3명을 B_1, B_2, B_3이라고 하자. 분임토의를 할 때, 아래 그림과 같이 앉았다고 하자.



탁자B에서 위의 두 자리를 (○○), 아래의 세 자리를 (○○○)라고 하자.

(1) (○○○)에 세 사람 B_1, B_2, B_3가 모두 앉을 경우

아래 그림처럼 두 사람 A_1, A_2는 ○에 앉고, 세 사람 B_1, B_2, B_3는 ●에 앉는다.



두 사람 A_1, A_2가 (○○)에 앉을 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_2P_2$, 세 사람 B_1, B_2, B_3가 (○○○)에 앉을 경우의 수는 2이다. (아래 표)

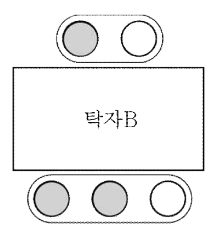
B_1	B_2	B_3
B_2	B_3	B_1
B_3	B_1	B_2

따라서 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_2P_2 \times 2 = 4$

(2) (○○○)에 세 사람 B_1, B_2, B_3 중에서 두 사람만이 앉을 경우

예를 들어 아래 그림처럼 두 사람 A_1, A_2는 ○에 앉고, 세 사람 B_1, B_2, B_3는 ●에 앉는다.



두 사람 A_1, A_2가 (○○)와 (○○○)에 앉을 경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 $2 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1$, 세 사람 B_1, B_2, B_3가 남은

자리에 앉을 경우의 수는 3이다. (아래 표)

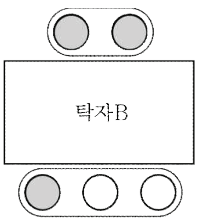
B_1	B_2	B_3
B_2	B_3	
B_2	B_1	
B_3	B_1	

따라서 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$2\times {}_2C_1\times {}_3C_1\times 3=36$

(3) (○○○)에 세 사람 B_1, B_2, B_3 중에서 한 사람만이 앉을 경우

예를 들어 아래 그림처럼 두 사람 A_1, A_2는 ○에 앉고, 세 사람 B_1, B_2, B_3는 ●에 앉는다.



두 사람 A_1, A_2가 (○○○)에 앉을 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_3P_2$, 세 사람 B_1, B_2, B_3가 남은 자리에 앉을 경우의 수는 $2\times {}_2P_2$이다. (아래 표)

B_1	B_2	B_3
B_2		
B_3		

따라서 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_3P_2\times 2\times {}_2P_2=24$

(1), (2), (3)이 동시에 발생하지 않으므로

구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$4+36+24=64$

답 64

70)

V070

| 답 380

[풀이]

7을 4번 이상 사용하면 7끼리 이웃하지 않도록 다섯 자리의 자연수를 만들 수 없다. 따라서 사용되는 7의 개수는 2 또는 3이다.

(1) 7을 2번 사용하는 경우

전체를 다음과 같은 3가지의 경우로 구분하자.

7○7○○ 또는 ○7○7○ 또는 ○○7○7

또는 ○7○○7 또는 7○○7○ 또는 7○○○7

각 경우에 대하여 3개의 ○에 1, 2, 3, 5, 9를 배열하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_5P_3(=60)$이다.

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$6\times 60=360$

(2) 7을 3번 사용하는 경우

7○7○7

위의 경우에 대하여 2개의 ○에 1, 2, 3, 5, 9를 배열하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_5P_2(=20)$이다.

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$360+20=380$

답 380

71)

V071

| 답 ②

[풀이]

5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여

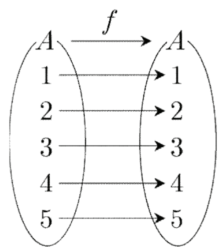
$f(a)=b$라고 하면

$f(f(a))=f(b)=a$이다.

즉, $f(a)=b$이면 $f(b)=a$이다.

이때, 두 수 a, b가 서로 같을 수도 있고, a와 b가 서로 다를 수도 있다.

(1) $f(x)=x$인 x의 개수가 5인 경우



함수 f는 항등함수이다. 경우의 수는 1이다.

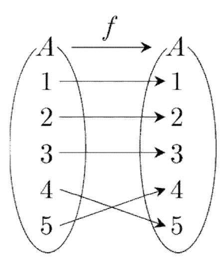
(2) $f(x)=x$인 x의 개수가 3인 경우

$f(x)=x$인 x의 개수가 3일 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_3$ $(=10)$이다.

예를 들어

$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$

이라고 하자.



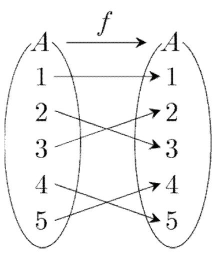
$f(4)=5$, $f(5)=4$이면

$f(f(4))=f(5)=4$, $f(f(5))=f(4)=5$

이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$10 \times 1 = 10$
(3) $f(x)=x$인 x의 개수가 1인 경우
$f(x)=x$인 x의 개수가 1일 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_1$ $(=5)$이다.
예를 들어
$f(1)=1$
이라고 하자.
$a \neq b$, $f(a)=b$, $f(b)=a$이면
$f(f(a))=f(b)=a$, $f(f(b))=f(a)=b$
이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.
예를 들어 다음과 같이
$f(2)=3$, $f(3)=2$,
$f(4)=5$, $f(5)=4$
인 경우를 생각할 수 있다.



조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$5 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \dfrac{1}{2!} = 15$
(1), (2), (3)에서 합의 법칙에 의하여
구하는 경우의 수는
$1+10+15=26$
답 ②

72)
V072
|답 126

[풀이]
문제에서 a, b, c, d의 대소 관계가 주어졌으므로
집합 S의 개수와 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 같다.
따라서 구하는 경우의 수는 11 이상 19 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개를 택하는 조합의 수 ${}_9C_4=126$이다.
답 126

73)
V073
|답 ④

[풀이]
A ◎○○○○
B는 ◎에 올 수 없고, ○에 와야 한다.
예를 들어
A ◎○○B○
와 같이 B가 올 수 있다. 이때, C, D, E, F가 오는 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_4P_4=4!$이다.
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙과 순열의 수에 의하여
$4 \times 4! = 96$
답 ④

74)
V074
|답 ⑤

[풀이1]
세 자리 자연수를 $100a+10b+c$라고 하자.
(단, $1 \le a \le 9$, $0 \le b \le 9$, $0 \le c \le 9$)
• (1) $b=0(c \neq 0)$ 또는 $c=0(b \neq 0)$인 경우
$b=0$이면 $a=c$이어야 한다.
101, 202, $\cdots$, 909
이므로 경우의 수는 9이다.
마찬가지 방법으로 $c=0$인 경우의 수는 9이다.
• (2) $b \neq 0$, $c \neq 0$인 경우
우선 $a=b+c$인 경우를 생각하자.
$2=1+1$,
$3=2+1=1+2$,
$4=3+1=2+2=1+3$,
$5=4+1=3+2=2+3=1+4$,
$6=5+1=4+2=3+3=2+4=1+5$,
$\vdots$
$9=8+1=7+2= \cdots =1+8$
이므로 경우의 수는 $36(=1+2+ \cdots +8)$이다.
마찬가지의 방법으로
$b=a+c$, $c=a+b$
인 경우의 수도 각각 36, 36이다.
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는
$2 \times 9 + 3 \times 36 = 126$
답 ⑤

[풀이2]
세 자리 자연수를 $100a+10b+c$라고 하자.
(단, $1 \le a \le 9$, $0 \le b \le 9$, $0 \le c \le 9$)
• (1) $b=0(c \neq 0)$ 또는 $c=0(b \neq 0)$인 경우
$b=0$이면 $a=c$이어야 한다.
101, 202, $\cdots$, 909
이므로 경우의 수는 9이다.
마찬가지 방법으로 $c=0$인 경우의 수는 9이다.
• (2) $b \neq 0$, $c \neq 0$이고 a, b, c 중에서 어느 두 수만 같고, 나머지 한 수는 다른 경우

$2=1+1$, $(\rightarrow 211,\ 121,\ 112)$
$4=2+2$, $(\rightarrow 422,\ 242,\ 224)$
$6=3+3$, $(\rightarrow 633,\ 363,\ 336)$
$8=4+4$ $(\rightarrow 844,\ 484,\ 448)$
이므로 경우의 수는 $12(=4\times3)$이다.

• (3) $b\neq0$, $c\neq0$이고 a, b, c 중에서 어느 두 수도 같지 않은 경우
$3=2+1$,
$4=3+1$,
$5=4+1=3+2$,
$6=5+1=4+2$,
$7=6+1=5+2=4+3$,
$8=7+1=6+2=5+3$,
$9=8+1=7+2=6+3=5+4$,
이므로 경우의 수는 $96(={16}\times{}_3\mathrm{P}_3)$이다.
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는
$18+12+96=126$
답 ⑤

75)
V075 | 답 72
[풀이]
조건 (가)에 의하여 f는 일대일대응이다.
조건 (나)에 의하여 $f(1)\neq1$이다.
$f(1)=2$라고 가정하면
$f(f(1))=f(2)$이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.
이는 가정에 모순이다. 따라서 $f(1)\neq2$이다.
$f(1)=k(3\leq k\leq5)$라고 하면
$f(f(1))=f(k)\neq f(2)$이므로
조건 (나), (다)를 모두 만족시킨다.
$f(1)$의 값을 결정하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_3\mathrm{C}_1$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 결정하는 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{P}_4$이다.
함수 f의 개수는 곱의 법칙에 의하여
${}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{P}_4=72$
답 72

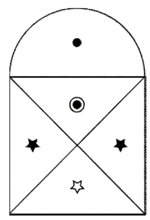
76)
V076 | 답 ③
[풀이]
남자와 여자를 각각 ●, ○로 표시하자.
남자끼리 좌우에 이웃하여 앉지 않고, 여자끼리 좌우에 이웃하여 앉지 않는 경우를 다음과 같이 구분하자. (3가지의 경우로 구분)

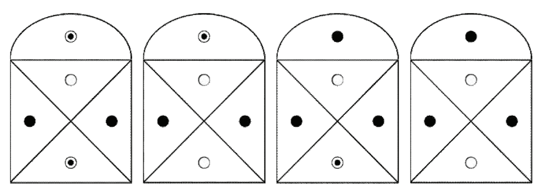
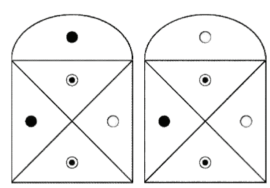
○	●	○
●	○	●
●	○	●

●	○	●
○	●	○
●	○	●

●	○	●
●	○	●
○	●	○

구하는 경우의 수는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
$3\times4!\times5!$
이때, $4!$, $5!$은 각각 여자와 남자를 앉히는 경우의 수이다.
답 ③

77)
V077 | 답 36
[풀이1]

두 영역 ●, ◉에 색칠하는 방법의 수는
${}_3\mathrm{P}_2=6$
이다. 세 영역 ★, ★, ☆에 색칠하는 방법의 수는
$\underbrace{2\times2}_{★,★\text{에 같은 색}}+\underbrace{2!\times1}_{★,★\text{에 다른 색}}=6$
따라서 구하는 방법의 수는
$6\times6=36$
답 36

[풀이2]

●, ◉, ○에 오는 색을 결정하는 경우의 수는 각각 3, 2, 1이다.
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $4\times3!=24$이다.

●, ◉, ○에 오는 색을 결정하는 경우의 수는 각각 3, 2, 1이다.
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2\times3!=12$이다.
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$24+12=36$

답 36

78)

V078

|답 288

[풀이]

행과 열이 다음과 같다고 하자.

	1열	2열	3열
1행	1	2	3
2행	4	5	6
3행	7	8	9
4행	*	0	#

조건 (나)에 의하여 0은 반드시 누르게 된다.

- (1) 1열에서 2개의 숫자를 누르는 경우

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.

	1열	2열	3열
1행	1	2	3
2행	4	5	6
3행	7	8	9
4행	*	0	#

조합의 수, 순열의 수, 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_3C_2\times 4!=72$

이때, ${}_3C_2$는 1열에서 2개의 숫자를 선택하는 경우의 수이고, $4!$은 선택된 4개의 수를 나열하는 경우의 수이다.

- (2) 2열에서 2개의 숫자를 누르는 경우

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.

	1열	2열	3열
1행	1	2	3
2행	4	5	6
3행	7	8	9
4행	*	0	#

조합의 수, 순열의 수, 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_2C_1\times 4!=144$

이때, ${}_3C_1$은 2열에서 0이 아닌 숫자 1개를 선택하는 경우의 수이고, ${}_2C_1$은 1열에서 숫자 1개를 선택하는 경우의 수이고, $4!$은 선택된 4개의 수를 나열하는 경우의 수이다.

- (3) 3열에서 2개의 숫자를 누르는 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수는 72이다.

(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로

$72+144+72=288$

답 288

79)

V079

|답 82

[풀이]

- (1) 2명의 여학생이 A 구역에 배정받을 경우

A 구역에 배정받는 남학생의 수는 1 또는 2 또는 3이다. 각각의 경우에 대하여 B 구역에 배정받는 남학생의 수는 5 또는 4 또는 3이다.

경우의 수는 조합의 수와 합의 법칙에 의하여

${}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3=6+15+20=41$

- (2) 2명의 여학생이 B 구역에 배정받을 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수는 41이다.

따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$41+41=82$

답 82

80)

V080

|답 132

▶ 실전풀이: [풀이2]

[풀이1]

세 자리의 자연수를 ◎◉◍라고 하자. (단, ◎는 백의 자리 수, ◉는 십의 자리 수, ◍는 일의 자리 수이다.)

자연수 ◎×◉×◍는 10의 배수이므로 세 수 ◎, ◉, ◍ 중에서 어떤 한 수는 5이고, 나머지 두 수 중에서 적어도 한 수는 2의 배수이어야 한다.

예를 들어 ◎가 5라고 하자.

5◉◍

◉와 ◍가 모두 2의 배수인 경우:

경우의 수는 ${}_4P_2=12$

◉가 2의 배수이고, ◍가 홀수인 경우:

경우의 수는 $4\times 4=16$

◉가 홀수이고, ◍가 2의 배수인 경우:

경우의 수는 $4\times 4=16$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times(12+16+16)=132$

이때, 3은 5를 배열할 경우의 수이다.

답 132

[참고]

여집합을 이용하여 경우의 수를 구할 수도 있다.

◉와 ◍가 5가 아닌 자연수일 경우:

${}_8P_2=56$

◉와 ◍가 모두 홀수인 경우:

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$3\times(56-12)=132$

[풀이2]
세 자리의 자연수의 '백의 자리의 수', '십의 자리의 수', '일의 자리의 수' 중에서 오직 한 수는 5이어야 한다. 그리고 나머지 자리의 두 수 중에서 적어도 하나는 2의 배수이어야 한다.
5가 아닌 9 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 선택할 경우의 수는
${}_8C_2=28$
5가 아닌 9 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 홀수를 선택할 경우의 수는
${}_4C_2=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$3!\times(28-6)=132$
이때, $3!$은 선택된 세 개의 수를 나열하는 순열의 수이다.
답 132

81)
V081 |답 ①

[풀이]
두 조건 (가), (나)에 의하여
$1\le f(1)<f(2)<f(3)\le 4$
이고
$6\le f(5)\le 7$
이다.
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 방법의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_3(=4)$이다. 이때, ${}_4C_3$은 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 세 수를 택하는 조합의 수이다. 예를 들어 1, 2, 4가 선택되었을 때, $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=4$이다.
$f(5)$의 값을 정하는 방법의 수는 2이다.
곱의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는
$4\times2=8$이다.
답 ①

82)
V082 |답 576

[풀이]
1행의 모자걸이에 모자를 거는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $4!$이다.
예를 들어 다음과 같이 1행의 모자걸이에 4개의 모자가 걸렸다고 하자.

	1열	2열	3열	4열
1행	A	B	C	D
2행				
3행				

2행1열의 모자걸이에 모자 B가 걸렸을 때, 2행의 나머지 모자걸이에 3개의 모자를 거는 방법의 수는 3이다. (아래의 경우1, 경우2, 경우3)

• (경우1)

	1열	2열	3열	4열
1행	A	B	C	D
2행	B	A	D	C
3행	C	D	A	B
	C	D	B	A
	D	C	A	B
	D	C	B	A

3행의 모자걸이에 4개의 모자를 거는 방법의 수는 4이다.

• (경우2)

	1열	2열	3열	4열
1행	A	B	C	D
2행	B	C	D	A
3행	C	D	A	B
	D	A	B	C

3행의 모자걸이에 4개의 모자를 거는 방법의 수는 2이다.

• (경우3)

	1열	2열	3열	4열
1행	A	B	C	D
2행	B	D	A	C
3행	C	A	D	B
	D	C	B	A

3행의 모자걸이에 4개의 모자를 거는 방법의 수는 2이다.
따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙과 합의 법칙에 의하여
$4!\times3\times(4+2+2)=576$
답 576

83)
V083 |답 ④

[풀이]
3명의 경위가 서로 다른 세 순찰차에 탑승할 경우의 수는 $3!$이다.
8명의 순경이 3명, 3명, 2명의 세 조로 나뉘어 서로 다른 세 순찰차에 탑승할 경우의 수는
$\left({}_8C_3\times{}_5C_3\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)\times3!$

따라서 곱의 법칙에 의하여 탑승하는 방법의 수는

$3!\times\left({}_8C_3\times{}_5C_3\times{}_2C_2\times\dfrac{1}{2!}\right)\times 3!$

$=6\times1680=10080$

답 ④

84)

V084

| 답 ⑤

[풀이]

(1) $|f(1)-f(2)|=1$인 경우

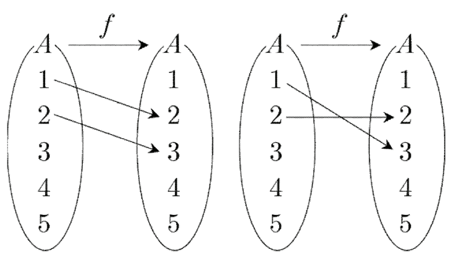
집합 $\{f(1),\ f(2)\}$로 가능한 집합을 모두 쓰면

$\{1,\ 2\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{3,\ 4\}$, $\{4,\ 5\}$

예를 들어

$\{f(1),\ f(2)\}=\{2,\ 3\}$

일 때, 다음의 두 경우가 가능하다.



위의 각 경우에 대하여

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$

의 값을 정하는 방법의 수는

순열의 수에 의하여 $3!(=6)$이다.

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$4\times2\times3!=48$

(2) $|f(2)-f(3)|=1$인 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로

경우의 수는 48이다.

(3) $|f(1)-f(2)|=1$이고

$|f(2)-f(3)|=1$인 경우

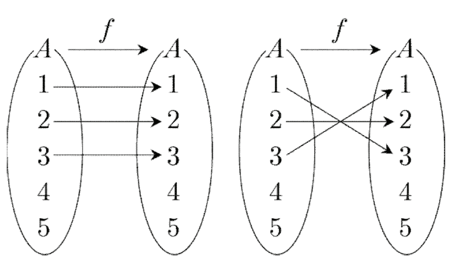
집합 $\{f(1),\ f(2),\ f(3)\}$으로 가능한 집합을 모두 쓰면

$\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{2,\ 3,\ 4\}$, $\{3,\ 4,\ 5\}$

예를 들어

$\{f(1),\ f(2),\ f(3)\}=\{1,\ 2,\ 3\}$

일 때, 다음의 두 경우가 가능하다.



위의 각 경우에 대하여

$f(4)$, $f(5)$

의 값을 정하는 방법의 수는

순열의 수에 의하여 $2!(=2)$이다.

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$3\times2\times2!=12$

(1), (2), (3)에서 구하는 경우의 수는

$48+48-12=84$

답 ⑤

85)

V085

| 답 432

[풀이]

조건 (나)에서 주어진 등식에서

$f(1)-f(2)=f(2)-f(3)$

(즉, $f(1)+f(3)=2f(2)$)

또는

$f(1)-f(2)=f(3)-f(2)$

(즉, $f(1)=f(3)$)

조건 (가)에서 f는 일대일대응이므로

$f(1)\neq f(3)$

따라서 $f(1)+f(3)=2f(2)$이다.

세 수 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$은 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이 수열의 공차를 d라고 하자.

(1) $d=1$인 경우

순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은

$(1,\ 2,\ 3)$, $(3,\ 2,\ 1)$,

$(2,\ 3,\ 4)$, $(4,\ 3,\ 2)$,

$\vdots$

$(5,\ 6,\ 7)$, $(7,\ 6,\ 5)$

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$의 값을 정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $4!(=24)$이다.

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$5\times2\times4!=240$

(2) $d=2$인 경우

순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은

$(1,\ 3,\ 5)$, $(5,\ 3,\ 1)$,

$(2,\ 4,\ 6)$, $(6,\ 4,\ 2)$,

$(3,\ 5,\ 7)$, $(7,\ 5,\ 3)$

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$의 값을 정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $4!(=24)$이다.

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$3\times2\times4!=144$

(3) $d=3$인 경우

순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은

$(1,\ 4,\ 7)$, $(7,\ 4,\ 1)$

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$의 값을 정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $4!(=24)$이다.

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$2\times 4!=48$

(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$240+144+48=432$

답 432

[참고]

두 실수 a, b에 대하여 다음의 필요충분조건이 성립한다.

$|a|=|b| \Leftrightarrow a=b$ 또는 $a=-b$

시험에 자주 출제되는 필요충분조건이므로 반드시 기억해두어야 한다.

86)

V086

| 답 ①

[풀이]

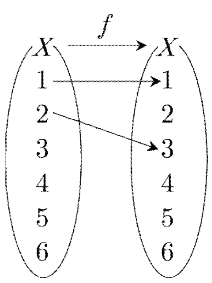
(1) $f(1)=1$인 경우

$f(f(1))=f(1)=1$이므로

조건 (나)는 성립한다.

조건 (다)에 의하여

$f(2)=f(1)+2=3$



조건 (가)에 의하여

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 결정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $4!(=24)$이다.

(2) $f(1)\neq 1$인 경우

$f(1)=2$라고 하자.

조건 (다)에 의하여

$f(2)=f(1)+2=4$

그런데

$f(f(1))=f(2)=4\neq 1$

이므로 조건 (나)는 성립하지 않는다.

이는 가정에 모순이다.

따라서 $f(1)\neq 2$이다.

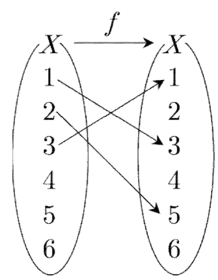
$f(1)=3$이라고 하자.

조건 (다)에 의하여

$f(2)=f(1)+2=5$

조건 (나)에 의하여

$f(f(1))=f(3)=1$



$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 결정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $3!(=6)$이다.

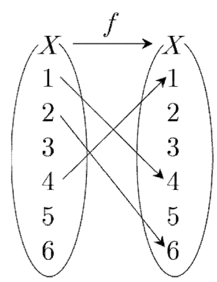
$f(1)=4$라고 하자.

조건 (다)에 의하여

$f(2)=f(1)+2=6$

조건 (나)에 의하여

$f(f(1))=f(4)=1$



$f(3)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 결정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $3!(=6)$이다.

$f(1)\geq 5$라고 하자.

조건 (다)에서

$f(2)=f(1)+2\geq 7$

이므로, 이는 가정에 모순이다.

(1), (2)에서 함수 f의 개수는 합의 법칙에 의하여

$24+6+6=36$

답 ①

87)

V087

| 답 228

[풀이1] ★

네 수 a, b, c, d 중에서 적어도 하나 이상의 수가 짝수이면 네 수의 곱 $abcd$는 짝수이다.

따라서 전체 경우의 수에서 네 수 a, b, c, d가 모두 홀수인 경우를 제외하면 된다.

순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_5\mathrm{P}_2\times {}_4\mathrm{P}_2=240$

네 수 a, b, c, d가 모두 홀수인 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_3\mathrm{P}_2 \times {}_2\mathrm{P}_2 = 12$

따라서 구하는 경우의 수는

$240 - 12 = 228$

답 228

[풀이2]

(1) ab가 짝수, cd가 짝수인 경우

순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$({}_5\mathrm{P}_2 - {}_3\mathrm{P}_2) \times ({}_4\mathrm{P}_2 - {}_2\mathrm{P}_2) = 140$

(2) ab가 짝수, cd가 홀수인 경우

순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$({}_5\mathrm{P}_2 - {}_3\mathrm{P}_2) \times {}_2\mathrm{P}_2 = 28$

(3) ab가 홀수, cd가 짝수인 경우

순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_3\mathrm{P}_2 \times ({}_4\mathrm{P}_2 - {}_2\mathrm{P}_2) = 60$

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$140 + 28 + 60 = 228$

답 228

88)

V088

| 답 ①

[풀이]

빨간 공, 파란 공, 노란 공을 각각 ●, ○, ◎, 빨간 상자, 파란 상자, 노란 상자를 각각 R, B, Y 라고 하자.

$5 = 5 + 0$

$= 4 + 1$

$= 3 + 2$

$= 2 + 3$

$= 1 + 4$

$= 0 + 5$

아래와 같이 빨간 공 5개를 상자에 담는 경우의 수는 6이다.

R	B	Y
	●●●●●	
	●●●●	●
	●●●	●●
	●●	●●●
	●	●●●●
		●●●●●

이제 아래와 같이 노란 공을 상자에 담으면 된다.

R	B	Y
◎◎◎◎◎	●●●●●	
◎◎◎◎	●●●●◎	●
◎◎◎	●●●◎◎	●●
◎◎	●●◎◎◎	●●●
◎	●◎◎◎◎	●●●●
	◎◎◎◎◎	●●●●●

이제 아래와 같이 파란 공을 상자에 담으면 된다.

R	B	Y
◎◎◎◎◎	●●●●●	○○○○○
◎◎◎◎○	●●●●◎	●○○○○
◎◎◎○○	●●●◎◎	●●○○○
◎◎○○○	●●◎◎◎	●●●○○
◎○○○○	●◎◎◎◎	●●●●○
○○○○○	◎◎◎◎◎	●●●●●

따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$6 \times 1 \times 1 = 6$이다.

답 ①

89)

V089

| 답 336

[풀이1]

우선 각 자리의 수 중 어떤 두 수의 합이 9가 되는 경우를 생각하자.

$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$

예를 들어 183, 217, 693, 457, …등이다.

$9 = 8 + 1$에 대하여

18○, 1○8, ○18, 81○, 8○1, ○81

: ○에 1, 8이 아닌 수가 들어가는 경우 (6×7가지)

합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$4 \times 42 = 168$

따라서 구하는 경우의 수는

${}_9\mathrm{P}_3 - 168 = 504 - 168 = 336$

답 336

[풀이2]

우선 각 자리의 수 중 어떤 두 수의 합이 9가 되는 경우를 생각하자.

$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$

예를 들어 183, 217, 693, 457, …등이다.

• (1) 9가 포함되는 경우

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ⑨

9◉◎, ◉9◎, ◉◎9 (3가지)

예를 들어 ◉에 5가 온다고 하면(8가지), ◎에 4가 올 수 없다.

1, 2, 3, $\cancel{4}$, ⑤, 6, 7, 8, ⑨
◎에 올 수 있는 수의 개수는 6이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$3\times8\times6=144$

• (2) 9가 포함되지 않는 경우
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, $\cancel{9}$
예를 들어 백의 자리에 3이 온다고 하자. (8가지)
3◉◎
이때, ◉에 6이 올 수 없다.
1, 2, ③, 4, 5, $\cancel{6}$, 7, 8, $\cancel{9}$
예를 들어 ◉에 7이 온다고 하면(6가지), ◎에 2가 올 수 없다.
1, $\cancel{2}$, ③, 4, 5, $\cancel{6}$, ⑦, 8, $\cancel{9}$
◎에 올 수 있는 수의 개수는 4이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$8\times6\times4=192$
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$144+192=336$
답 336

90)
V090
| 답 ②

[풀이]
5개의 자연수의 합이 짝수인 경우를 다음과 같이 두 경우로 구분하여 생각하자.
(경우1) 짝+짝+짝+홀+홀
경우의 수는 ${}_4C_3\times{}_4C_2=24$
(경우2) 짝+홀+홀+홀+홀
경우의 수는 ${}_4C_1\times{}_4C_4=4$
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$24+4=28$
답 ②

91)
V091
| 답 450

[풀이]
서로 다른 5개의 바구니를 각각 A, B, C, D, E, 빨간색 공을 ●, 파란색 공을 ○라고 하자.
조건 (나)에 의하여 빨간색 공을 넣은 바구니의 빨간색 공의 개수는 1이다. 따라서 빨간색 공을 넣는 바구니를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_3(={}_5C_2=10)$이다.
예를 들어 세 바구니 A, B, C에 빨간색 공을 넣었다고 하자.

A	B	C	D	E
●	●	●		

조건 (가)에 의하여 공을 넣지 않는 바구니는 없어야 하므로, 두 바구니 D, E 각각에 파란색 공을 각각 1개씩 넣자. 이제 남은 파란색 공의 개수는 4이다.

A	B	C	D	E
●	●	●	○	○

$4=3+1$ (×)
$=2+2$ (◯)
$=2+1+1$ (◯)
$=1+1+1+1$ (◯)
조건 (가)에 의하여 남은 4개의 파란색 공을 한 바구니에 모두 넣는 것은 불가능하다. 그리고 남은 4개의 파란색 공을 3개, 1개로 나누어 두 바구니에 각각 넣는 것도 불가능하다.
남은 4개의 파란색 공을 2개, 2개로 나누어 두 바구니에 각각 넣는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_2(=10)$이다. 예를 들어 아래와 같은 경우를 생각할 수 있다.

A	B	C	D	E
●	●○○	●	○○○	○

남은 4개의 파란색 공을 2개, 1개, 1개로 나누어 세 바구니에 각각 넣는 경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_5C_3\times3(=30)$이다. 예를 들어 아래와 같은 경우를 생각할 수 있다.

A	B	C	D	E
●○○	●	●○	○	○○

남은 4개의 파란색 공을 1개, 1개, 1개, 1개로 나누어 네 바구니에 각각 넣는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_1(=5)$이다. 예를 들어 아래와 같은 경우를 생각할 수 있다.

A	B	C	D	E
●	●○	●○	○○	○○

합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$10\times(10+30+5)=450$
답 450

92)
V092
| 답 64

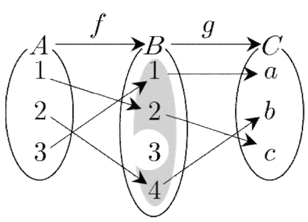
[풀이]
집합 X의 두 원소의 합의 절댓값이 1이 되는 경우를 모두 쓰자. (조건 (가))
$|3+(-2)|=1$
$|2+(-1)|=1$

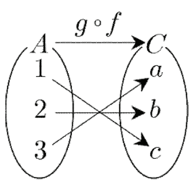
$|1+(-2)|=1$
$|2+(-3)|=1$
순서쌍 $(f(3),\ f(-3))$을 모두 쓰면 다음과 같다. (조건(나))
$(1,\ -2),\ (2,\ -1),\ (2,\ -3),\ (3,\ -2)$
순서쌍 $(f(3),\ f(-3))$의 개수는 4이다.
마찬가지의 방법으로
순서쌍 $(f(2),\ f(-2)),\ (f(1),\ f(-1))$의 개수는 각각 $4,\ 4$이다.
곱의 법칙에서 구하는 경우의 수는
$4^3=64$
답 64

93)

V093 | 답 ④

[풀이] ★
함수 $f:A\to B$의 치역을 $f(A)$라고 하자.
합성함수 $g\circ f$의 역함수가 존재하기 위해서는
두 함수
$f:A\to f(A),\ g:f(A)\to C$
의 역함수가 각각 존재해야 한다.
즉, 위의 두 함수가 일대일대응이어야 한다.
예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.





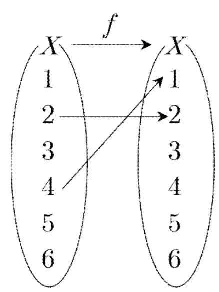
집합 $f(A)$의 개수는 조합의 수에 의하여
${}_4C_3$
일대일대응 $f:A\to f(A)$의 개수는 순열의 수에 의하여
${}_3P_3$
일대일대응 $g:f(A)\to C$의 개수는 순열의 수에 의하여
${}_3P_3$
그런데
$g(3)=a$ 또는 $g(3)=b$ 또는 $g(3)=c$
의 3가지의 경우까지 생각해 주어야 한다.
구하는 순서쌍의 개수는 곱의 법칙에 의하여
${}_4C_3\times{}_3P_3\times{}_3P_3\times3=432$

답 ④

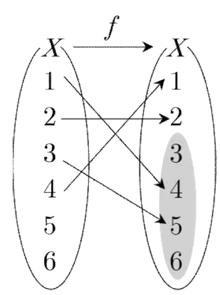
94)

V094 | 답 18

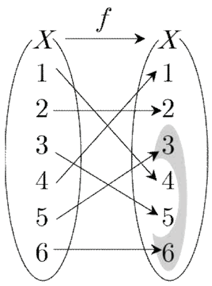
[풀이] ★
조건 (나)에서
$f(2)<f(1)<f(3),\ f(4)<f(2)<f(6)$
정리하면
$f(4)<f(2)<f(1)<f(3),\ f(2)<f(6)$
$f(2)=1$라고 가정하자.
$f(4)<1=f(2)$이므로 가정에 모순이다.
따라서 $f(2)\neq1$이다.
$f(2)=4$라고 가정하자.
$f(2)=4<f(1)<f(3),\ f(2)=4<f(6)$
이므로 $f(1),\ f(3),\ f(6)$은 5 또는 6을 값으로 가져야 한다.
이는 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 모순이다.
따라서 $f(2)\neq4$이다.
마찬가지의 방법으로 $f(2)\neq5,\ f(2)\neq6$임을 보일 수 있다.
$f(2)$가 가질 수 있는 값은 2 또는 3이다.
(1) $f(2)=2$인 경우
$f(4)<2=f(2)$이므로 $f(4)=1$이어야 한다.



$f(2)=2<f(1)<f(3),\ f(2)=2<f(6)$
이므로 순서쌍 $(f(1),\ f(3))$의 개수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2$이다. 예를 들어 아래와 같은 경우가 가능하다.



$f(6)$가 가질 수 있는 값의 개수는 조합의 수에 의하여 ${}_2C_1$이다. 예를 들어 아래와 같이 경우가 가능하다. ($f(5)$의 값은 자동적으로 결정된다.)

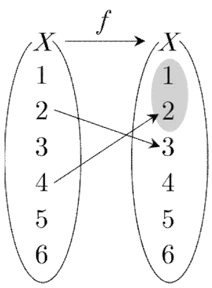


곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_4C_2 \times {}_2C_1 \times 1 = 12$

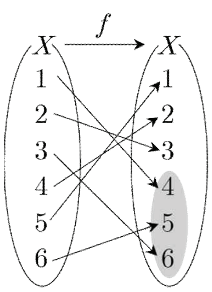
(2) $f(2)=3$인 경우

$f(4) < 3 = f(2)$이므로 $f(4)=1$ 또는 $f(4)=2$이다. 예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



$f(2)=3 < f(1) < f(3)$, $f(2)=3 < f(6)$

이므로 순서쌍 $(f(1),\ f(3))$의 개수는 조합의 수에 의하여 ${}_3C_2$이다. 예를 들어 아래와 같은 경우가 가능하다. ($f(5)$, $f(6)$의 값은 자동적으로 결정된다.)



곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_2C_1 \times {}_3C_2 = 6$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$12+6=18$

답 18

95)

V095

| 답 528

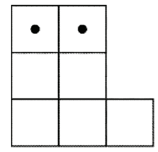
[풀이]

남학생을 ○, 여학생을 ●으로 두자.

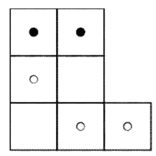
(1) 여학생 2명이 같은 층의 사물함을 사용하는 경우 (2층 또는 3층)

2층과 3층중에서 하나의 층을 선택할 경우의 수는 2이다.

예를 들어 여학생 2명이 3층의 사물함을 사용한다고 하자.



남학생 3명은 남은 5개의 사물함 중에서 3개의 사물함을 사용하면 된다. 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_3$이다. 예를 들어 남학생 3명은 아래 그림처럼 사물함을 사용할 수 있다.



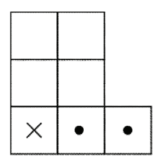
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2 \times {}_5C_3 \times 3! \times 2! = 240$

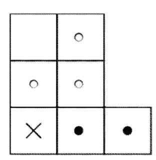
이때, $3!$은 3명의 남학생에게 사물함을 배정하는 경우의 수, $2!$은 여학생 2명에게 사물함을 배정하는 경우의 수이다.

(2) 여학생 2명이 같은 층의 사물함을 사용하는 경우 (1층)

여학생 2명이 사용할 사물함을 정할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_3C_2$이다. 예를 들어 아래 그림처럼 사용한다고 하자. 이때, 남학생은 1층의 사물함을 사용할 수 없다.



남학생 3명은 남은 4개의 사물함 중에서 3개의 사물함을 사용하면 된다. 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_3$이다. 예를 들어 남학생 3명은 아래 그림처럼 사물함을 사용할 수 있다.



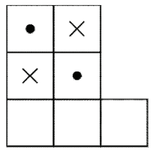
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

${}_3C_2 \times {}_4C_3 \times 3! \times 2! = 144$

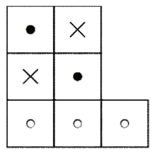
이때, $3!$은 3명의 남학생에게 사물함을 배정하는 경우의 수, $2!$은 여학생 2명에게 사물함을 배정하는 경우의 수이다.

(3) 여학생 2명이 다른 층의 사물함을 사용하는 경우 (3층 제외)

여학생 2명 중 한 명은 2층의 사물함을, 나머지 한 명은 3층의 사물함을 사용해야 한다. 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 2×2이다. 예를 들어 여학생 2명이 아래 그림과 같이 사물함을 사용한다고 하자. 이때, 남학생 3명은 2층 또는 3층의 사물함을 사용할 수 없다.



남학생 3명은 남은 3개의 사물함을 사용하면 된다. 경우의 수는 1이다.



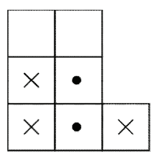
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times2\times3!\times2!=48$

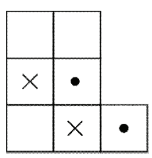
이때, $3!$은 3명의 남학생에게 사물함을 배정하는 경우의 수, $2!$은 여학생 2명에게 사물함을 배정하는 경우의 수이다.

(4) 여학생 2명이 다른 층의 사물함을 사용하는 경우 (3층 반드시 포함)

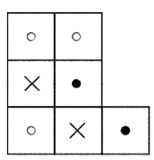
여학생은 1층의 가운데에 있는 사물함을 사용할 수 없다. 왜냐하면 여학생이 1층의 가운데에 있는 사물함을 사용하면 남학생 3명 중 한 명이 사물함을 사용할 수 없기 때문이다.



따라서 여학생 2명 중 한 명은 1층의 사물함 중에서 가장 왼쪽 또는 가장 오른쪽 사물함을 사용해야 한다. 경우의 수는 2이다. 그리고 남은 한 명은 2층과 3층의 네 개의 사물함 중에서 하나를 사용하면 된다. 경우의 수는 4이다. 예를 들어 다음과 같다고 하자.



남학생 3명은 남은 3개의 사물함을 사용하면 된다. 경우의 수는 1이다.



경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times4\times3!\times2!=96$

이때, $3!$은 3명의 남학생에게 사물함을 배정하는 경우의 수, $2!$은 여학생 2명에게 사물함을 배정하는 경우의 수이다.

(1)~(4)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$240+144+48+96=528$

답 528

96)

V096 | 답 ①

[풀이] ★

주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우는

'(ⅰ) 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우' 에서

'(ⅱ) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우' 와

'(ⅲ) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우' 를 제외하면 된다.

(ⅰ)의 경우:

n개의 공이 들어 있는 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_{n}\mathrm{C}_{3}$이다.

(ⅱ)의 경우:

주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우의 수는 $(n-2)$이다.

($\because$ 다음의 경우들이 가능하다.

$(1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 4),\ (3,\ 4,\ 5),\ \cdots,$

$(n-2,\ n-1,\ n)$←총 $n-2$개다.)

(ⅲ)의 경우:

연속되는 두 수 중 하나가 1인 경우의 수는 $\boxed{n-3}$

($\because$ $(1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 2,\ 5),\ \cdots,\ (1,\ 2,\ n)$

←총 $n-3$개다.)

이고, 마찬가지로 연속되는 두 수 중 하나가 n인 경우의 수도

$\boxed{n-3}$이다.

($\because$ $(n-3,\ n-1,\ n),\ (n-4,\ n-1,\ n),$

$\cdots,\ (1,\ n-1,\ n)$←총 $n-3$개다.)

또한 연속되는 두 수 중 어느 하나도 1과 n이 아닌 경우의 수는

$\boxed{(n-3)(n-4)}$이다.

($\because$ 2와 3이 연속되는 경우: $5,\ 6,\ \cdots,\ n$ 중에서 나머지 한 수를 선택해야 한다.($n-4$개)

3과 4가 연속되는 경우: $1,\ 6,\ 7,\ \cdots,\ n$ 중에서 나머지 한 수를 선택해야 한다.($n-4$개)

⋮

$n-2$와 $n-1$이 연속되는 경우: $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-4$ 중에서 나머지 한 수를 선택해야 한다.($n-4$개)

경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$(n-3)(n-4)$이다.)

따라서 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우의 수는

$2\times(\boxed{n-3})+\boxed{(n-3)(n-4)}$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 n개의 공이 들어 있는 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우의 수는

${}_{n}\mathrm{C}_{3}-(n-2)-2\times(n-3)-(n-3)(n-4)$

$=\boxed{\dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}}$이다.

(가): $p(n)=n-3$, (나): $q(n)=(n-3)(n-4)$

(다): $r(n)=\dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$

$\therefore \dfrac{p(18)\times q(17)}{r(16)}=\dfrac{15\times14\times13}{\dfrac{14\times13\times12}{6}}=\dfrac{15}{2}$

답 ①

97)

V097

| 답 81

[풀이] ★

집합 X의 세 원소 a, b, c에 대하여

$f(a)=b$, $f(b)=c$, $f(c)=a$로 두면

$f(f(f(a)))=f(f(b))=f(c)=a$

즉, $f(f(f(a)))=a$이다.

$b=a$이면 $f(b)=f(a)=c$이므로 $b=c$이다.

왜냐하면 함수의 정의에 의하여

$f(a)=b$, $f(a)=c$일 때, $b=c$일 수 밖에 없다.

$c=a$이면 $f(c)=f(a)=a$이므로 $b=a$이다.

왜냐하면 함수의 정의에 의하여

$f(a)=b$, $f(a)=a$일 때, $b=a$일 수 밖에 없다.

다음의 필요충분조건이 성립한다.

$a=b \Leftrightarrow a=c$

명제의 대우명제는 항상 참이므로 다음의 필요충분조건이 성립한다.

$a\neq c \Leftrightarrow a\neq b$

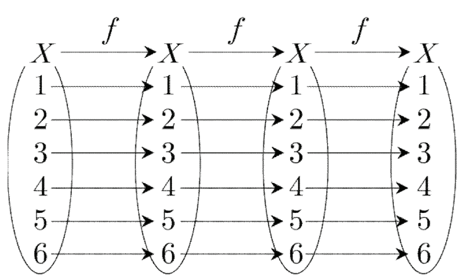
따라서 다음의 두 경우를 생각할 수 있다.

$a=b=c$ ⋯(경우1)

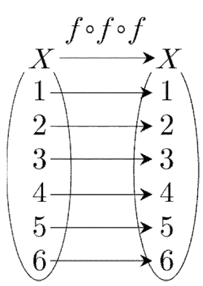
$a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$ ⋯(경우2)

• (1) (경우1)만 발생하는 경우

다음의 경우만이 가능하다.



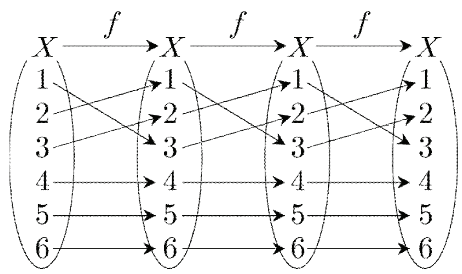
이때, 함수 $f\circ f\circ f: X\to X$는 다음과 같다.



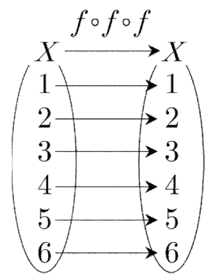
경우의 수는 1이다.

• (2) (경우1), (경우2)가 모두 발생하는 경우

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



이때, 함수 $f\circ f\circ f: X\to X$는 다음과 같다.



경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_6C_3\times2=40$

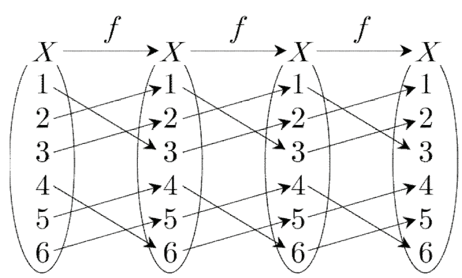
이때, ${}_6C_3$은 집합 X에서 (경우2)를 만족시키는 서로 다른 세 수를 택할 조합의 수이고, 2는 다음의 두 경우이다.

$f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=1$

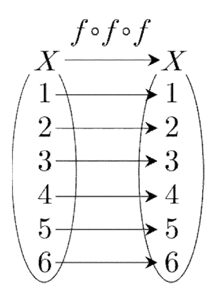
$f(1)=3$, $f(3)=2$, $f(2)=1$

• (3) (경우2)만 발생하는 경우

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



이때, 함수 $f\circ f\circ f: X\to X$는 다음과 같다.



경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

$\left({}_6C_3\times\dfrac{1}{2!}\right)\times2\times2=40$

이때, ${}_6\mathrm{C}_3 \times \frac{1}{2!}$은 집합 X를 원소의 개수가 각각 3개, 3개인 두 부분집합으로 분할하는 경우의 수이고, 전자의 2는 다음의 두 경우이다.
$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=1$
$f(1)=3,\ f(3)=2,\ f(2)=1$
그리고 후자의 2는 다음의 두 경우이다.
$f(4)=5,\ f(5)=6,\ f(6)=4$
$f(4)=6,\ f(6)=5,\ f(5)=4$
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 함수 f의 개수는
$1+40+40=81$
답 81

98)
V098 | 답 108
[풀이1]
사자, 토끼, 호랑이를 각각 ◉◎◍로 두자. 문제에서 주어진 9개의 카드를 각각
1◉, 2◉, 3◉
1◎, 2◎, 3◎
1◍, 2◍, 3◍
로 두자.
$5=3+1+1=2+2+1$
• (1) 특정 번호가 적힌 카드를 모두 택하는 경우
즉, $5=3+1+1$인 경우이다.
예를 들어 다음과 같이 카드를 택하면 된다.
1◉, 1◎, 1◍, 2◉, 3◎
경우의 수는 $3\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=27$이다.
이때, 3은 특정 번호가 적힌 카드를 모두 택하는 경우의 수이다. 예를 들어 1이 적힌 카드를 모두 택했다고 하자. 가운데 ${}_3\mathrm{C}_1$은 2가 적힌 세 개의 카드 중에서 하나를 택하는 경우의 수, 마지막 ${}_3\mathrm{C}_1$은 3이 적힌 세 개의 카드 중에서 하나를 택하는 경우의 수이다.
• (2) 특정 번호가 적힌 카드를 모두 택하지는 않는 경우
즉, $5=2+2+1$인 경우이다.
예를 들어 다음과 같이 카드를 택하면 된다.
1◉, 1◎, 2◎, 2◍, 3◉
경우의 수는 $3\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=81$이다.
이때, $3\times{}_3\mathrm{C}_1$은 특정 번호가 적힌 카드를 한 장만 택하는 경우의 수이다. 예를 들어 3이 적힌 카드 중에서 3◉을 택했다고 하자. ${}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2$는 1, 2가 적힌 카드 중에서 각각 두 장 씩을 택하는 경우의 수이다.
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는 $27+81=108$이다.
답 108

[풀이2]
9장의 카드 중에서 서로 다른 5장의 카드를 선택하는 경우의 수는 ${}_9\mathrm{C}_5$, 이 중에서 특정 숫자가 적힌 카드가 아예 선택되지 않는 경우의 수는
$3\times2\times{}_3\mathrm{C}_2$ …(*)
이다. 이때, (*)의 3은 제외되는 숫자를 결정하는 경우의 수이다. 예를 들어 1이 적힌 3장의 카드는 선택하지 않는다고 하자. 그러면
2(사자), 2(토끼), 2(호랑이)
3(사자), 3(토끼)
또는
2(사자), 2(토끼)
3(사자), 3(토끼), 3(호랑이)
⋮
등이 가능하다. 이때, (*)의 2는 같은 숫자가 적힌 3장의 카드를 선택하는 경우의 수이다.
마지막으로 (*)의 ${}_3\mathrm{C}_2$는 남은 3개의 카드(모두 같은 숫자가 적힘)에서 2장을 선택하는 경우의 수이다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_9\mathrm{C}_5-3\times2\times{}_3\mathrm{C}_2=126-18=108$
답 108

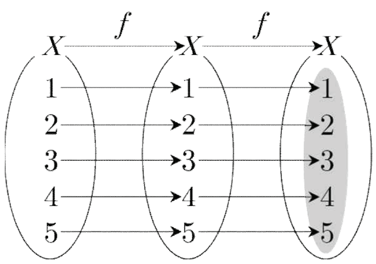
99)
V099 | 답 ③
[풀이] ★
문제에서 주어진 조건에 의하여 집합
$\{(f\circ f)(x)\,|\,x\in X\}$
는 1, 2, 3을 반드시 원소로 가져야 한다. 따라서 이 집합의 원소의 개수는 3 또는 4 또는 5이다.
만약 함수 $f:X\to X$의 치역의 원소의 개수가 1이면 함수 $f\circ f:X\to X$의 치역의 원소의 개수는 1이다. 이는 가정에 모순이다. 따라서 함수 $f:X\to X$의 치역의 원소의 개수는 2 이상이다.
만약 함수 $f:X\to X$의 치역의 원소의 개수가 2이면 함수 $f\circ f:X\to X$의 치역의 원소의 개수는 1 또는 2이다. 이는 가정에 모순이다. 따라서 함수 $f:X\to X$의 치역의 원소의 개수는 3 이상이다.
왜냐하면 다음이 성립하기 때문이다.
$\{(f\circ f)(x)\,|\,x\in X\}\subset\{f(x)\,|\,x\in X\}$
이제 전체의 경우를 다음과 같이 세 가지의 경우로 구분하여 생각하자.
• (경우1)

함수 $f: X \to X$의 치역의 원소의 개수가 5인 경우

함수 $f: X \to X$의 치역은 집합 X이다.

이때, 함수 $f: X \to X$는 일대일대응이다.

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



경우의 수는 순열의 수에 의하여 $5! = 120$이다.

• (경우2)

함수 $f: X \to X$의 치역의 원소의 개수가 4인 경우

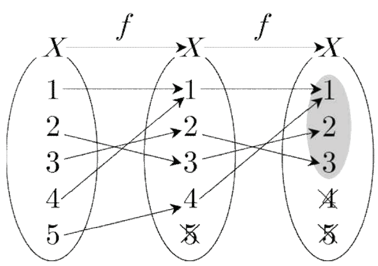
함수 $f \circ f: X \to X$의 치역이

집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$을 부분집합으로 가져야 하므로

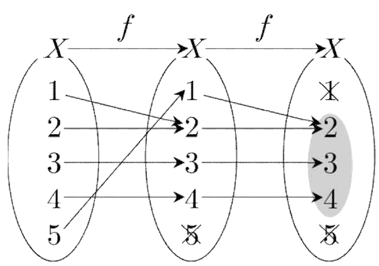
함수 $f: X \to X$의 치역은

집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 또는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이다.

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



하지만 다음과 같은 경우는 가능하지 않다.



경우의 수는 $2 \times ({}_5\mathrm{C}_2 \times 4! - 3 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times 3!) = 264$이다.

이때, 2는 4 또는 5 중에서 하나를 택하는 경우의 수이다.

예를 들어 $4 \in$(함수 $f: X \to X$의 치역)이라고 하자.

${}_5\mathrm{C}_2 \times 4!$은 함수 $f: X \to X$를 만드는 경우의 수이다.

예를 들어 함수 $f: X \to X$가 다음과 같다고 하자.

$f(1) = f(4) = 1$(←즉, 집합 X의 어떤 두 원소가 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 하나의 원소에 대응된다.),

$f(2) = 3,\ f(3) = 2,\ f(5) = 4$

함수 $f \circ f: X \to X$의 치역은 $\{1,\ 2,\ 3\}$이다.

3은 $f(5) = 1,\ f(5) = 2,\ f(5) = 3$ 중에서 하나를 택하는 경우의 수이다.

예를 들어 $f(5) = 1$이라고 하자.

${}_4\mathrm{C}_2 \times 3!$은 함수 $f: X \to X$를 만드는 경우의 수이다.

예를 들어 함수 $f: X \to X$가 다음과 같다고 하자.

$f(1) = f(2) = 2$(←즉, 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 어떤 두 원소가 집합 $\{2,\ 3,\ 4\}$의 하나의 원소에 대응된다.),

$f(3) = 3,\ f(4) = 4$

함수 $f \circ f: X \to X$의 치역은 $\{2,\ 3,\ 4\}$이다.

• (경우3)

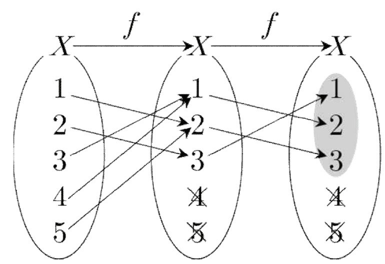
함수 $f: X \to X$의 치역의 원소의 개수가 3인 경우

함수 $f \circ f: X \to X$의 치역이

집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$을 부분집합으로 가져야 하므로

함수 $f: X \to X$의 치역은 집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$이다.

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



경우의 수는 $3! \times 3 \times 3 = 54$이다.

이때, $3!$은 집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$에서 집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$으로의 일대일대응을 만드는 경우의 수이다.

그리고 가운데 3은 $f(4) = 1,\ f(4) = 2,\ f(4) = 3$ 중에서 하나를 택할 경우의 수이고,

마지막 3은 $f(5) = 1,\ f(5) = 2,\ f(5) = 3$ 중에서 하나를 택할 경우의 수이다.

따라서 함수 $f: X \to X$의 개수는

합의 법칙에 의하여

$120 + 264 + 54 = 438$

답 ③