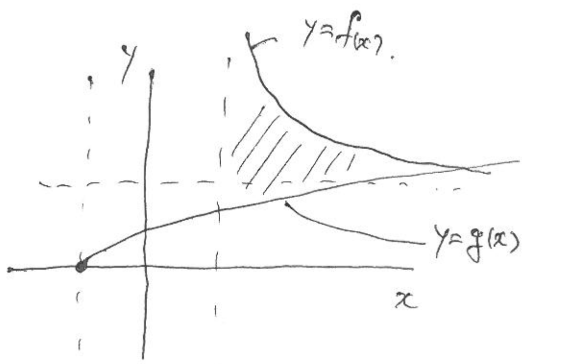
* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3 수학 나형 21번.

자연수 n, 함수 $f(x) = \frac{1}{x-n} + n$, $g(x) = \sqrt{x+n}$.

점 $P(a,b)$ 의 개수 = A_n.

(가) a, b 는 자연수. (나) $n < a \le 3n$, $g(a) < b < f(a)$

→ $n \le A_n \le 3n$ 을 만족시키는 모든 A_n의 합?



빗금친 부분에 존재하는 점들의 개수 → A_n.

(i) $n=1$. → $a = 2$ or 3

$a=2$. $g(2) = \sqrt{3} = 1.xx$. $f(2) = 1+1 = 2$. → X

$a=3$. $g(3) = \sqrt{4} = 2$. $f(3) = \frac{1}{2}+1 = 1.xx$ → X

$A_1 = 0$.

n이 고정된 상태에서 $a\uparrow$ → $g(a)\uparrow$, $f(a)\downarrow$.

∴ 특정 a값에서 조건을 충족시키지 못하면

$a+1$ 에서는 더 확인할 필요가 없다.

(ii) $n=2$. $a = 3$ or 4 or 5 or 6.

$a=3$. $g(3) = \sqrt{5} = 2.xx$. $f(3) = 1+2 = 3$. → X — $A_2 = 0$.

(iii) $n=3$. $a = 4 \sim 9$.

$a=4$. $g(4) = \sqrt{7} = 2.xx$ $f(4) = 4$. → $(4,3)$

$a=5$. $g(5) = \sqrt{8} = 2.xx$ $f(5) = 3.xx$ → $(5,3)$

$a=6$. $g(6) = 3$. $f(6) = 3.xx$ → X.

$A_3 = 2$. ($n=3 \le A_3 = 2 \le 3n = 9$ ⇒ X)

(iv) $n=4$. $a = 5 \sim 12$.

$a=5$. $g(5) = 3$. $f(5) = 5$. → $(5,4)$

$a=6$. $g(6) = 3.xx$. $f(6) = 4.xx$ → $(6,4)$

....

$a=11$. $g(11) = \sqrt{15} = 3.xx$. $f(11) = 4.xx$ → $(11,4)$

$a=12$. $g(12) = 4$. $f(12) = 4.xx$ → X.

∴ $A_4 = 7$. ($n=4 \le A_4 = 7 \le 3n = 12$ ⇒ O).

(v) $n=5$. $a = 6 \sim 15$.

$a=6$. $g(6) = \sqrt{11} = 3.xx$ $f(6) = 6$ → $(6,4)(6,5)$

$a=7$. $g(7) = \sqrt{12} = 3.xx$ $f(7) = 5.xx$ → $(7,4)(7,5)$

....

$a=10$. $g(10) = \sqrt{15} = 3.xx$. $f(10) = 5.xx$ → $(10,4)(10,5)$.

$a=11$. $g(11) = 4$. $f(11) = 5.xx$ → $(11,5)$.

....

$a=15$ $g(15) = \sqrt{20} = 4.xx$. $f(15) = 5.xx$ → $(15,5)$.

$A_5 = 15$ ($a=6$부터 $a=10$까지는 2개씩. 그 외 1개)

($n=5 \le A_5 = 15 \le 3n = 15$. ⇒ O).

(vi) $n=6$.

$A_n > 3n$. ∴ 조건에 위배.

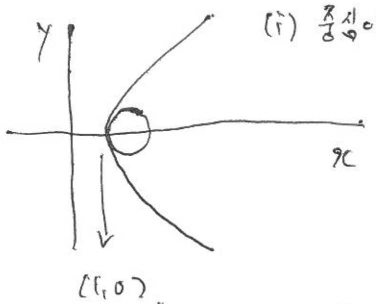
∴ 조건에 맞는 모든 A_n은 A_4, A_5 이므로

$A_4(=7) + A_5(=15) = 22$

* 2017년 10월 시행 교육청 모의고사 고3수학 가형 20번.

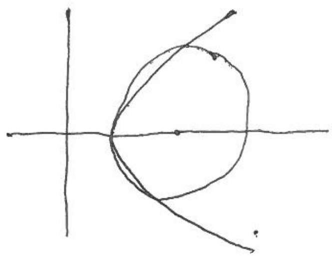
쌍곡선 $x^2-y^2=1$, x축 위의 점 $A(t, 0)$. $\overline{AP}$의 $\min = f(t)$. → $f(t)$는 y축 대칭.

∴ $(0 \le x \le 1)$ $f(t)=1-t$. → y축 대칭이므로 $x \ge 0$ 에서 구한 뒤에 확장.



(i) 중심이 $(t,0)$이고 반지름이 $t-1$인 원과 쌍곡선이 $(1,0)$에서 접할 때.

(ii)



→ (i)과 (ii)의 임계점에 해당하는 t 값을 찾는것이 관건.

$P(a,b)$라 하면 $a \ge 1$일 때 $\overline{AP}^2=(a-t)^2+b^2$

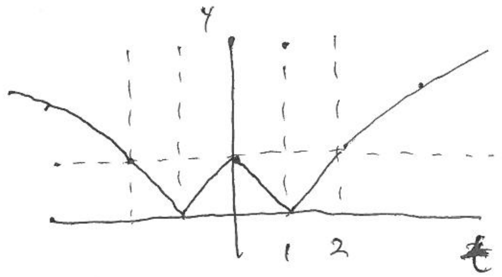
$P(a,b)$는 쌍곡선 위의 점이므로 $a^2-b^2=1$.

$$f(t)=\sqrt{(a-t)^2+b^2}=\sqrt{(a-t)^2+a^2-1}$$
$$=\sqrt{2a^2-2ta+t^2-1}=\sqrt{2\left(a-\frac{t}{2}\right)^2+\frac{t^2}{2}-1}.$$

∴ $a=\frac{t}{2}$일 때 $f(t)=\sqrt{\frac{t^2}{2}-1}$ 이고, $a \ge 1$ 이므로 $t \ge 2$ (위에서의 (i)과 (ii)의 임계점이 $(2,0)$).

따라서 $(1<x\le 2)$ $f(t)=t-1$, $(x \ge 2)$ $f(t)=\sqrt{\frac{t^2}{2}-1}$ → $(2,1)$, $(\sqrt{10}, 2)$, ...

$f(t)$의 개형은 다음과 같다.



$y=f(t)$.

$(-2 \le t \le 2)$ 직선
$(x<-2 \text{ or } x>2)$ 곡선 } 형태.

ㄱ. $f(0)=1$. → True.

ㄴ. $f(t)=\frac{1}{3}$ 의 실근의 개수는 4 → True

ㄷ. $\lim_{t\to 2-}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\lim_{t\to 2-}\frac{t-2}{t-2}=1$.

$$\lim_{t\to 2+}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\lim_{t\to 2+}\frac{\sqrt{\frac{t^2}{2}-1}-1}{t-2}$$
$$=\lim_{t\to 2+}\frac{\frac{t^2}{2}-2=\frac{1}{2}(t-2)(t+2)}{(t-2)\left(\sqrt{\frac{t^2}{2}-1}+1\right)}=1.$$

∴ $f(t)$가 미분불가능한 t는 $t=-1, 0, 1$ 의 세 곳이다. ∴ ㄷ → False.