2020 EBS 수능특강 수학Ⅱ 4. 도함수의 활용 (1)

p49 1번 단순변형

1. 곡선 $y=-2x^3+4x-3$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?

① 5 ② 10 ③ 13
④ 17 ⑤ 20

p49 2번 단순변형

2. 다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(3,\ -2)$에서의 접선의 x절편이 1일 때, 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(3,\ 3f(3))$에서의 접선은 점 $(-1,\ a)$를 지난다. a의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

p51 3번 응용변형

3. 점 $(0,\ -4)$에서 곡선 $y=x^2-3$에 그은 두 접선의 기울기의 곱은?

① -25 ② -16 ③ -9
④ -4 ⑤ -1

p51 4번 응용변형

4. 두 곡선 $y=-x^2+2$, $y=ax^2+3x$의 교점에서 두 곡선에 그은 접선을 각각 l_1, l_2라 하고, l_1, l_2의 기울기를 각각 m_1, m_2라고 할 때, $m_1-m_2=1$이 성립한다. 이 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

p53 5번 단순변형

5. 닫힌구간 $[2,\ 4]$에서 연속이고 열린구간 $(2,\ 4)$에서 미분가능하며 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(4)$의 최댓값을 구하시오.

> (가) $f(2)=1$
> (나) $2<c<4$인 모든 실수 c에 대하여
> $0 \le f'(c) \le 5$이다.

p55 6번 단순변형

6. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=x^3+x^2+kx-4$$

의 역함수가 존재하기 위한 정수 k의 최솟값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

p55 7번 응용변형

7. 함수 $f(x)=ax^3-3x^2+(a+2)x+1$이 $x_1<x_2$인 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 항상 $f(x_1)>f(x_2)$일 때, 실수 a의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

p57 8번 응용변형

8. 함수 $f(x)=ax^3+3x^2+bx+5$가 $x=-1$에서 극솟값 -2를 갖는다고 할 때, $f(x)$의 극댓값은?

① 16 ② 19 ③ 22
④ 25 ⑤ 28

p57 9번 단순변형

9. 함수 $f(x)=x^3-ax^2+(a^2-6a)x$가 $x=3$에서 극값을 갖도록 하는 상수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

p58 1번 단순변형

10. 곡선 $y=x^4-2x^3+4$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$일 때, mn의 값은? (단, m, n은 상수이다.)

① -10 ② -6 ③ 0
④ 6 ⑤ 10

p58 2번 단순변형

11. 곡선 $y=2x^3-5x$에 접하고 기울기가 1인 접선 중 제4사분면을 지나는 직선의 y절편은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

p58 3번 단순 변형

12. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 롤의 정리를 만족시키는 모든 상수 c의 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

p58 4번 응용변형

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=x^3-3(a+1)x^2-4ax+2$$

가 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$가 성립하도록 하는 모든 정수 a의 값의 곱은?

① -6 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 6

p59 5번 단순변형

14. 곡선 $y=\frac{1}{8}x^4$ 위의 점 P에서의 접선 l_1이 직선 l_2 : $y=4x-7$와 평행할 때, 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는?

① $-\frac{2\sqrt{17}}{17}$ ② $-\frac{\sqrt{17}}{17}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{17}}{17}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{17}}{17}$

p59 7번 응용변형

15. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+(a-1)x^2-2ax$가 극댓값을 갖지 않도록 하는 실수 a의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

정답 및 해설

1	①	2	②	3	④	4	①	5	11
6	⑤	7	①	8	④	9	②	10	①
11	④	12	⑤	13	①	14	④	15	①

1) 정답 ①

[출제범위] 접선의 방정식

$f(x)=-2x^3+4x-3$으로 놓으면

$f'(x)=-6x^2+4$이므로 $x=1$인 점에서의

접선의 기울기는 $f'(1)=-6+4=-2$

$f(1)=-1$이므로 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-1)=-2(x-1)$ $\quad\therefore y=-2x+1$

따라서 $a=-2,\ b=1$이므로

$a^2+b^2=(-2)^2+1^2=5$

$\therefore\ 5$

2) 정답 ②

[출제범위] 접선의 방정식

점 $(3,\ -2)$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로 $f(3)=-2$

점 $(3,\ -2)$에서의 접선의 x절편이 1이므로 이 접선은 두 점 $(3,\ -2)$, $(1,\ 0)$을 지난다.

따라서 접선의 기울기는

$f'(3)=\dfrac{-2-0}{3-1}=-1$

$g(x)=xf(x)$라 하면 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$

이때 $g(3)=3f(3)=-6$이고

$g'(3)=f(3)+3f'(3)=-2+3\times(-1)=-5$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(3,\ g(3))$에서의 접선의 방정식은

$y-g(3)=g'(3)(x-3)$

$y-(-6)=-5(x-3)$

$y=-5x+9$

이 직선이 점 $(-1,\ a)$를 지나므로

$a=5+9=14$

$\therefore\ 14$

3) 정답 ④

[출제범위] 접선의 방정식

$f(x)=x^2-3$으로 놓으면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-3)=2t(x-t)$

$\therefore\ y=2tx-t^2-3$

이 직선이 점 $(0,\ -4)$를 지나므로

$-4=-t^2-3,\ t^2=1$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$f'(-1)f'(1)=(-2)\times 2=-4$

$\therefore\ -4$

4) 정답 ①

[출제범위] 접선의 방정식

$f(x)=-x^2+2,\ g(x)=ax^2+3x$로 놓고 두 곡선의 교점의 x좌표를 t라고 하면 $f(t)=g(t)$에서

$-t^2+2=at^2+3t$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=-2x,\ g'(x)=2ax+3$이므로

$m_1=f'(t)=-2t,\ m_2=g'(t)=2at+3$

$m_1-m_2=1$에서 $-2t-2at-3=1$

$\therefore\ at=-t-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-t^2+2=t(-t-2)+3t$ $\quad\therefore\ t=2$

$t=2$를 ㉡에 대입하면

$2a=-4 \quad \therefore \quad a=-2$

5) 정답 11

[출제범위] 평균값 정리

$2 < x \leq 4$인 임의의 실수 x에 대하여

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[2,\ x]$에서 연속이고 열린구간 $(2,\ x)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(2,\ x)$에 적어도 하나 존재한다.

조건 (가)에서 $f(2)=1$이고,

조건 (나)에서 $0 \leq f'(c) \leq 5$이므로

$0 \leq \dfrac{f(x)-1}{x-2} \leq 5$

$1 \leq f(x) \leq 5x-9$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 의하여 $1 \leq f(4) \leq 11$이고,

함수 $f(x)=5x-9$는 조건 (가), (나)를 모두 만족시키므로 $f(4)$의 최댓값은 11이다.

$\therefore$ 11

6) 정답 ⑤

[출제범위] 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)$는 증가함수 또는 감소함수이어야 한다.

그런데 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 증가함수이어야 한다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이어야 하므로

$$f'(x)=3x^2+2x+k \geq 0$$

방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$D/4=1-3k \leq 0 \quad \therefore k \geq \frac{1}{3}$$

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다.

$\therefore$ 1

7) 정답 ①

[출제범위] 함수의 증가와 감소

$x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 항상 $f(x_1) > f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

$f(x)=ax^3-3x^2+(a+2)x+1$에서

$f'(x)=3ax^2-6x+(a+2)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \leq 0$이어야 하므로

$a<0$ $\cdots\cdots$ ①

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D/4=(-3)^2-3a(a+2) \leq 0$

$a^2+2a-3 \geq 0,\ (a-1)(a+3) \geq 0$

$\therefore\ a \leq -3$ 또는 $a \geq 1$ $\cdots\cdots$ ②

①, ②에서 $a \leq -3$

$\therefore\ -3$

8) 정답 ④

[출제범위] 함수의 극대와 극소

$f'(x)=3ax^2+6x+b$

$f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f'(-1)=0,\ f(-1)=-2$

$f'(-1)=3a-6+b=0$에서

$3a+b=6$ $\cdots\cdots$ ①

$f(-1)=-a+3-b+5=-2$에서

$a+b=10$ $\cdots\cdots$ ②

①과 ②를 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=12$

이때 $f(x)=-2x^3+3x^2+12x+5$이므로

$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	25	↘

따라서 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 25를 갖는다.

$\therefore$ 25

필수 개념

▸ 함수의 극대와 극소

(1) 함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

① $f(x) \le f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하고, $f(a)$를 극댓값이라 한다.

② $f(x) \ge f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소라 하고, $f(a)$를 극솟값이라 한다.

(2) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서

① $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$이다.

② $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$이다.

9) 정답 ②

[출제범위] 함수의 극대와 극소

$f(x)=x^3-ax^2+(a^2-6a)x$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+a^2-6a$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $3x^2-2ax+a^2-6a=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 하므로

$D/4=a^2-3(a^2-6a)>0$

$-2a^2+18a>0$에서 $a(a-9)<0$

즉, $0<a<9$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극값을 가지려면 $f'(3)=0$이어야 하므로

$f'(3)=27-6a+a^2-6a=0$

$a^2-12a+27=0$, $(a-3)(a-9)=0$

㉠에 의하여 $a=3$

$\therefore$ 3

10) 정답 ①

[출제범위] 접선의 방정식

$f(x)=x^4-2x^3+4$라 하면 $f'(x)=4x^3-6x^2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 $f'(1)=-2$이므로

접선의 방정식은

$y-3=-2(x-1)$, 즉 $y=-2x+5$

따라서 $m=-2$, $n=5$이므로

$mn=(-2)\times 5=-10$

$\therefore$ -10

11) 정답 ④

[출제범위] 접선의 방정식

$f(x)=2x^3-5x$라 하면 $f'(x)=6x^2-5$

기울기가 1인 접선의 접점의 좌표를 $(a,\ 2a^3-5a)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=6a^2-5=1$이므로

$a^2=1$에서 $a=-1$ 또는 $a=1$

(i) $a=-1$일 때,

접점의 좌표는 $(-1,\ 3)$이고, 접선의 방정식은

$y-3=x+1$, 즉 $y=x+4$

이 직선은 제4사분면을 지나지 않는다.

(ii) $a=1$일 때,

접점의 좌표는 $(1,\ -3)$이고, 접선의 방정식은

$y-(-3)=x-1$, 즉 $y=x-4$
이 직선은 제4사분면을 지난다.
(i), (ii)에서 제4사분면을 지나는 접선의 방정식은
$y=x-4$이고 이 직선의 y절편은 -4이다.
$\therefore\ -4$

12) 정답 ⑤
[출제범위] 평균값 정리
함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)=0$이므로
롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
$f'(x)=3x^2-6x+2$이므로 $f'(c)=3c^2-6c+2$
$f'(c)=0$, 즉 $3c^2-6c+2=0$에서
모든 상수 c의 값의 합은
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-\frac{-6}{3}=2$
$\therefore\ 2$

13) 정답 ⑤
[출제범위] 함수의 증가와 감소
$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$를 만족시키는 함수는 일대일 대응이고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이다.
즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이어야 하므로
$f'(x)=3x^2-6(a+1)x-4a \geq 0$
방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 할 때,
$D/4=9(a+1)^2+12a \leq 0$
$3a^2+10a+3 \leq 0,\quad (a+3)(3a+1) \leq 0$
$\therefore -3 \leq a \leq -\frac{1}{3}$
따라서 정수 a는 -3, -2, -1이므로 구하는 곱은 $-3\times(-2)\times(-1)=-6$
$\therefore\ -6$

14) 정답 ④
[출제범위] 접선의 방정식
$y=\frac{1}{8}x^4$에서 $y'=\frac{1}{2}x^3$
점 P의 x좌표를 a라 하면 점 P에서의 접선의 기울기가 4이므로
$\frac{1}{2}a^3=4$에서 $a^3=8, a=2$
그러므로 접점의 좌표는 $(2,\ 2)$이다.
따라서 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는 점 $(2,\ 2)$와 직선 $y=4x-7$, 즉 $4x-y-7=0$ 사이의 거리와 같으므로
$\frac{|4\times2-2-7|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$
$\therefore\ \frac{\sqrt{17}}{17}$

15) 정답 ①
[출제범위] 함수의 극대와 극소
$f(x)=\frac{1}{2}x^4+(a-1)x^2-2ax$에서
$f'(x)=2x^3+2(a-1)x-2a$
$\quad=2(x-1)(x^2+x+a)$
사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$이 한 실근과 두 허근 또는 한 실근과 중근(또는 삼중근)을 가져야 한다.
(i) $2(x-1)(x^2+x+a)=0$이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우
$x^2+x+a=0$이 허근을 가져야 하므로

$D=1-4a<0 \quad \therefore\ a>\frac{1}{4}$

(ii) $2(x-1)(x^2+x+a)=0$이 한 실근과 중근을 갖는 경우

$x^2+x+a=0$이 $x=1$을 근으로 갖거나 1이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

$x^2+x+a=0$이 $x=1$을 근으로 가지면

$2+a=0 \qquad \therefore\ a=-2$

$x^2+x+a=0$이 1이 아닌 실수를 중근으로 가지면

$D=1-4a=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 실수 a의 값의 범위는

$a=-2$ 또는 $a\ge\frac{1}{4}$

따라서 a의 최솟값은 -2이다.

$\therefore\ -2$