2021 EBS 수능특강 수학Ⅱ 3. 미분계수와 도함수 (1)

p40 3번 단순변형

1. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+5x^2-2x$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 5
② 6
③ 7
④ 8
⑤ 9

p33 1번 단순변형

2. 함수 $f(x)=x^3+2x$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율이 $kf'(1)$의 값과 같을 때, 상수 k의 값은?

① 2
② 3
③ 4
④ 5
⑤ 6

p41 6번 응용변형

3. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+1 & (x<a) \\ 2x^2+4x-b & (x\geq a) \end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $a>0$)

① 5
② 7
③ 9
④ 11
⑤ 13

p33 2번 단순변형

4. 함수 $f(x)=x^2-ax+b$가 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x-1}=f'(1)+f(2)$를 만족시킬 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -5
② -4
③ -3
④ -2
⑤ -1

p41 5번 단순변형

5. 함수 $f(x)=x^2-ax$에서 x의 값이 a에서 $a+3$까지 변할 때의 평균변화율과 $x=-a$에서의 순간변화율이 서로 같을 때, 상수 a의 값은?

① -1
② $-\frac{3}{4}$
③ $-\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{4}$
⑤ $\frac{3}{4}$

p35 3번 단순변형

6. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+ax-b & (x<1) \\ 5 & (x \geq 1) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(-2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 12
② 13
③ 14
④ 15
⑤ 16

p33 예제1번 단순변형

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+3h)-2}{h}=6$일 때, $f(3)+f'(3)$의 값은?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

p39 8번 단순변형

8. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 2}\frac{xf(x)-x^2-2}{x-2}=f(2)$를 만족시킬 때, $f(2)\times f'(2)$의 값은?

① 6
② 7
③ 8
④ 9
⑤ 10

p35 4번 단순변형

9. 함수 $f(x)=|x-3|$에 대하여 함수 $f(x)f(2a-x)$가 $x=3$에서 미분가능할 때, 상수 a의 값은?

① 3
② 4
③ 5
④ 6
⑤ 7

p37 6번 단순변형

10. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x+y)$를 만족시킨다. $f'(2)-f'(0)$의 값을 구하시오. (단답형)

p33 1번 응용변형

11. 함수 $f(x)=2x^2-1$에서 x의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때의 평균변화율이 10일 때, 양수 h의 값은?

① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

p37 예제3번 단순변형

12. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(1)+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}=x^3-2ax$를 만족시킨다. $f'(-1)=-f'(1)$일 때, $f'(-3)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 20
② 22
③ 24
④ 26
⑤ 28

p39 7번 단순변형

13. 최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f'(-3)=f'(1)=5$를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 11
② 12
③ 13
④ 14
⑤ 15

p41 6번 단순변형

14. 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x^2+a & (x<2) \\ bx-3 & (x\geq 2)\end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) (단답형)

p42 2번 응용변형

15. 미분가능한 함수 $y=f(x)$에 대하여 다음 **보기**에서 서로 같은 것만을 있는 대로 고른 것은?

|보기|

ㄱ. $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ (a는 상수)

ㄴ. $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(\Delta x)}{\Delta x}$

ㄷ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$

ㄹ. $\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$

① ㄱ, ㄴ
② ㄱ, ㄷ
③ ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ
⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

정답 및 해설

1	⑤	2	②	3	③	4	⑤	5	②
6	③	7	④	8	①	9	①	10	8
11	③	12	③	13	④	14	13	15	③

1) 정답 ⑤

[출제범위] 미분계수와 도함수

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+5x^2-2x$에서

$f'(x)=x^2+10x-2$

이므로 $f'(1)=1+10-2=9$

필수 개념

▸ x^n의 도함수

$y=x^n$ ($n\neq 1$인 자연수)일 때, $y'=nx^{n-1}$

2) 정답 ②

[출제범위] 미분계수와 도함수

함수 $f(x)=x^3+2x$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{33-3}{2}=15$$

$$\begin{aligned} f'(1)&=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3+2x)-3}{x-1}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x-3}{x-1}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+3)}{x-1}\\ &=\lim_{x\to 1}(x^2+x+3)=1+1+3=5 \end{aligned}$$

$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=kf'(1)$에서

$15=5k$

따라서 $k=3$

필수 개념

▸ 평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

다른풀이

함수 $f(x)=x^3+2x$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{33-3}{2}=15$$

$f(x)=x^3+2x$에서 $f'(x)=3x^2+2$이므로

$f'(1)=3+2=5$

$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=kf'(1)$에서

$15=5k$

따라서 $k=3$

3) 정답 ③

[출제범위] 미분계수와 도함수

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로 $x=a$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$이므로

$a^3+1=2a^2+4a-b$ $\cdots\cdots$ ㉠

또, $f'(a)$가 존재하므로

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

이때

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &=\lim_{x\to a-}\frac{(x^3+1)-(2a^2+4a-b)}{x-a}\\ &=\lim_{x\to a-}\frac{(x^3+1)-(a^3+1)}{x-a}\\ &=\lim_{x\to a-}\frac{x^3-a^3}{x-a} \end{aligned}$$

$= \lim_{x\to a-} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a-} (x^2+ax+a^2)$

$= a^2+a^2+a^2 = 3a^2$

$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a+} \frac{(2x^2+4x-b)-(2a^2+4a-b)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a+} \frac{2(x^2-a^2)+4(x-a)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a+} \frac{2(x-a)(x+a+2)}{x-a}$

$= \lim_{x\to a+} \{2(x+a+2)\}$

$= 2(a+a+2) = 4a+4$

즉, $3a^2 = 4a+4$, $3a^2-4a-4=0$

$(3a+2)(a-2)=0$

$\therefore\ a=2$ $(\because a>0)$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$8+1=8+8-b$ $\quad\therefore\ b=7$

$\therefore\ a+b=2+7=9$

필수 개념
▸ 미분가능성 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

다른풀이

$g(x)=x^3+1$, $h(x)=2x^2+4x-b$로 놓으면

$g'(x)=3x^2$, $h'(x)=4x+4$

$x=a$에서 연속이므로 $g(a)=h(a)$

$a^3+1=2a^2+4a-b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x=a$에서 미분계수가 존재하므로

$g'(a)=h'(a)$

$3a^2=4a+4$, $3a^2-4a-4=0$

$(3a+2)(a-2)=0$ $\quad\therefore\ a=2$ $(\because a>0)$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$8+1=8+8-b$ $\quad\therefore\ b=7$

$\therefore\ a+b=2+7=9$

4) 정답 ⑤

[출제범위] 미분계수와 도함수

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x-1}=f'(1)+f(2)$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)+2\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로 $f(1)+2=0$에서 $f(1)=-2$

$f(1)=1-a+b=-2$에서 $a-b=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또한 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=f'(1)+f(2)$에서 $f(2)=0$

$f(2)=4-2a+b=0$에서 $2a-b=4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

따라서 $a+b=1+(-2)=-1$

필수 개념
▸ 미분계수를 이용한 미정계수의 결정 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=c$ (c는 상수)이면 ⇨ $f(a)=b$, $f'(a)=c$

5) 정답 ②

[출제범위] 미분계수와 도함수

함수 $f(x)=x^2-ax$에서 x의 값이 a에서 $a+3$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a+3)-f(a)}{a+3-a}=\frac{\{(a+3)^2-a(a+3)\}-(a^2-a^2)}{3}$$

$$=\frac{3a+9}{3}=a+3 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$f'(x)=2x-a$이므로 $x=-a$에서의 순간변화율은

$f'(-a)=-2a-a=-3a$ ⋯⋯ ㉡

㉠과 ㉡의 값이 서로 같으므로

$a+3=-3a$

따라서 $a=-\dfrac{3}{4}$

필수 개념

▸ 평균변화율과 순간변화율

함수 $y=f(x)$에 대하여

(1) x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율 ⇨ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(2) $x=a$에서의 순간변화율

⇨ $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

6) 정답 ③

[출제범위] 미분계수와 도함수

함수 $f(x)$가 $x<1$인 모든 실수 x와 $x>1$인 모든 실수 x에서 미분가능하므로 $x=1$에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)=f(1)$

즉, $1+a-b=5$에서 $b=a-4$ ⋯⋯ ㉠

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1-}\frac{(x^2+ax-b)-5}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}(x+a+1)\\&=1+a+1=a+2\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{5-5}{x-1}=0$

이므로 $a+2=0$에서 $a=-2$

㉠에서 $b=-6$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+6 & (x<1)\\ 5 & (x\geq1)\end{cases}$이므로

$f(-2)=4+4+6=14$

필수 개념

▸ 미분가능성

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

다른풀이

$g(x)=x^2+ax-b$, $h(x)=5$로 놓으면

$g'(x)=2x+a$, $h'(x)=0$

$x=1$에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$

$1+a-b=5$ $\therefore$ $a-b=4$ ⋯⋯ ㉠

$x=1$에서 미분계수가 존재하므로

$g'(1)=h'(1)$

$2+a=0$ $\therefore$ $a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$-2-b=4$ $\therefore$ $b=-6$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+6 & (x<1)\\ 5 & (x\geq1)\end{cases}$이므로

$f(-2)=4+4+6=14$

7) 정답 ④

[출제범위] 미분계수와 도함수

$\lim_{h\to0}\frac{f(3+3h)-2}{h}=6$에서 $h\to0$일 때

(분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to0}\{f(3+3h)-2\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(3)-2=0$에서 $f(3)=2$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3+3h)-2}{h}=3\times\lim_{h\to0}\frac{f(3+3h)-f(3)}{3h}$$
$$=3f'(3)=6$$

에서 $f'(3)=2$

따라서 $f(3)+f'(3)=2+2=4$

필수 개념
▸ 미분계수 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는 ⇨ $f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

8) 정답 ①

[출제범위] 미분계수와 도함수

$\lim_{x\to2}\frac{xf(x)-x^2-2}{x-2}=f(2)$에서 $x\to2$일 때

(분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{xf(x)-x^2-2\}=0$이고 다항함수

$xf(x)-x^2-2$는 연속함수이므로

$2f(2)-6=0$에서 $f(2)=3$

$g(x)=xf(x)-x^2$으로 놓으면

$g(2)=2f(2)-4=6-4=2$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{xf(x)-x^2-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$$

이때 주어진 조건에 의하여

$g'(2)=f(2)=3$

또한 $g'(x)=f(x)+xf'(x)-2x$이므로

$g'(2)=f(2)+2f'(2)-4$

$3=3+2f'(2)-4$

$f'(2)=2$

따라서 $f(2)\times f'(2)=3\times2=6$

필수 개념
▸ 미분계수 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는 ⇨ $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

9) 정답 ①

[출제범위] 미분계수와 도함수

$f(x)=|x-3|$에서

$f(2a-x)=|2a-x-3|=|x-2a+3|$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)f(2a-x)-f(3)f(2a-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{|x-3||x-2a+3|-0\times|2a-6|}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{|x-3||x-2a+3|}{x-3}$$

이때

$$\lim_{x\to3-}\frac{|x-3||x-2a+3|}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}\frac{-(x-3)|x-2a+3|}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}(-|x-2a+3|)=-|6-2a|$$

$$\lim_{x\to3+}\frac{|x-3||x-2a+3|}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}\frac{(x-3)|x-2a+3|}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}(|x-2a+3|)=|6-2a|$$

이므로 함수 $f(x)f(2a-x)$가 $x=3$에서 미분가능하려면

$-|6-2a|=|6-2a|$에서 $|6-2a|=0$

따라서 $a=3$

필수 개념

▸ 미분가능성

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

10) 정답 8

[출제범위] 미분계수와 도함수

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x+y)$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0)+0$에서 $f(0)=0$

이때

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+2xh(x+h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+\lim_{h\to 0}2x(x+h)\\&=f'(0)+2x^2\end{aligned}$$

따라서 $f'(2)=f'(0)+8$이므로

$f'(2)-f'(0)=8$

필수 개념

▸ 도함수

다항함수 $f(x)$에 대하여

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

11) 정답 ③

[출제범위] 미분계수와 도함수

x의 값이 1에서 $1+h$까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}&=\frac{\{2(1+h)^2-1\}-1}{h}\\&=\frac{2h^2+4h}{h}=2h+4\end{aligned}$$

즉, $2h+4=10$이므로

$h=3$

필수 개념

▸ 평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율

⇨ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

12) 정답 ③

[출제범위] 미분계수와 도함수

주어진 등식의 좌변은

$$f'(1)+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}$$

$$=f'(1)-\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

$$=f'(1)-f'(x)$$

이므로 $f'(1)-f'(x)=x^3-2ax$에서

$f'(x)=-x^3+2ax+f'(1)$ …… ㉠

㉠의 양변에 1을 대입하면

$f'(1)=-1+2a+f'(1)$

이므로 $a=\frac{1}{2}$

㉠의 양변에 -1을 대입하면

$$\begin{aligned}f'(-1)&=1-2a+f'(1)\\&=1-2\times\frac{1}{2}+f'(1)=f'(1)\end{aligned}$$

주어진 조건에서 $f'(-1)=-f'(1)$이므로

$-f'(1)=f'(1)$에서 $f'(1)=0$

따라서 $f'(x)=-x^3+x$이므로

$f'(-3)=27-3=24$

필수 개념

▸ 미분계수

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

⇨ $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

13) 정답 ④

[출제범위] 미분계수와 도함수

최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이므로

$f(x)=2x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$f'(x)=6x^2+2ax+b$이므로

$f'(-3)=54-6a+b=5$에서

$6a-b=49$ ⋯⋯ ㉠

$f'(1)=6+2a+b=5$에서

$2a+b=-1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=-13$

따라서 $f(x)=2x^3+6x^2-13x$이므로

$f(2)=16+24-26=14$

필수 개념

▸ x^n의 도함수

$y=x^n$ ($n\neq 1$인 자연수)일 때, $y'=nx^{n-1}$

14) 정답 13

[출제범위] 미분계수와 도함수

함수 $f(x)$가 $x<2$인 모든 실수 x와 $x>2$인 모든 실수 x에서 미분가능하므로 $x=2$에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

즉, $8+a=2b-3$에서

$a=2b-11$ ⋯⋯ ㉠

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 2-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}&=\lim_{x\to 2-}\frac{(2x^2+a)-(2b-3)}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2-}\frac{(2x^2+a)-(a+8)}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2-}\frac{2(x^2-4)}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2-}\frac{2(x+2)(x-2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2-}\{2(x+2)\}\\&=2\times 4=8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}&=\lim_{x\to 2+}\frac{(bx-3)-(2b-3)}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2+}\frac{b(x-2)}{x-2}=b\end{aligned}$$

이므로 $b=8$

$b=8$을 ㉠에 대입하면 $a=2\times 8-11=5$

따라서 $a+b=5+8=13$

필수 개념

▸ 미분가능성

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$f'(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

다른풀이

$g(x)=2x^2+a$, $h(x)=bx-3$으로 놓으면

$g'(x)=4x$, $h'(x)=b$

$x=2$에서 연속이므로 $g(2)=h(2)$

$8+a=2b-3$ $\therefore$ $a-2b=-11$ ⋯⋯ ㉠

$x=2$에서 미분계수가 존재하므로

$g'(2)=h'(2)$

$b=8$

$b=8$을 ㉠에 대입하면

$a-16=-11$ $\therefore$ $a=5$

$\therefore\ a+b=5+8=13$

15) 정답 ③

[출제범위] 미분계수와 도함수

ㄱ. $\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a)$ (a는 상수)

ㄴ. $\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x)-f(\Delta x)}{\Delta x}$

$\neq \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$

ㄷ. $\lim_{h \to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}=\lim_{h \to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$
$=f'(x)$

ㄹ. $t-x=h$로 놓으면 $t=x+h$

$t \to x$일 때 $h \to 0$이므로

$\lim_{t \to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
$=f'(x)$

따라서 서로 같은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

필수 개념
▸ 미분계수 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는 $f'(a)=\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

16) 정답 ②

[출제범위] 미분계수와 도함수

함수 $f(x)=-x^3+3x$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{-18-2}{2}=-10$

필수 개념
▸ 평균변화율 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율 ⇨ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

17) 정답 28

[출제범위] 미분계수와 도함수

$f(-1)=4$에서 $-a+b+1=4$

$\therefore\ a-b=-3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=3ax^2-b$이므로

$f'(1)=5$에서 $3a-b=5$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=7$

$\therefore\ ab=4\times 7=28$

필수 개념
▸ x^n의 도함수 $y=x^n$ ($n\neq 1$인 자연수)일 때, $y'=nx^{n-1}$

18) 정답 ①

[출제범위] 미분계수와 도함수

$\lim_{h \to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{4h}=\frac{3}{4}\times\lim_{h \to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}$
$=\frac{3}{4}f'(2)=\frac{3}{4}\times 4=3$

필수 개념
▸ 미분계수 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는 ⇨ $f'(a)=\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

19) 정답 ③

[출제범위] 미분계수와 도함수

$f(x)=(ax^2-2x+3)(x^2+x-2)$에서

$f'(x)=(2ax-2)(x^2+x-2)+(ax^2-2x+3)(2x+1)$

이므로

$f'(2)=4(4a-2)+5(4a-1)=36a-13$

따라서 $36a-13=5$에서 $a=\frac{1}{2}$

필수 개념

▸ 곱의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$y=f(x)g(x)$ ⇨ $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

다른풀이

$$f(x)=(ax^2-2x+3)(x^2+x-2)$$
$$=ax^4+(a-2)x^3+(1-2a)x^2+7x-6$$

에서

$f'(x)=4ax^3+3(a-2)x^2+2(1-2a)x+7$이므로

$$f'(2)=32a+12(a-2)+4(1-2a)+7$$
$$=36a-13=5$$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

20) 정답 ⑤

[출제범위] 미분계수와 도함수

다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1,3)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$f(1)=3$, $f'(1)=-2$

따라서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x+1}\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times f'(1)=-1$$

필수 개념

▸ 미분계수의 기하학적 의미

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,f(a))$에서의 접선의 기울기이다.

21) 정답 ①

[출제범위] 미분계수와 도함수

다항식 $P(x)=x^5+ax^2-bx$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^5+ax^2-bx=(x-1)^2Q(x)$

$x^5+ax^2-bx=(x^2-2x+1)Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a-b=0$, $a-b=-1$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5x^4+2ax-b=(2x-2)Q(x)+(x^2-2x+1)Q'(x)$

$5x^4+2ax-b=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

…… ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$5+2a-b=0$, $2a-b=-5$ …… ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=-3$

이므로 $P(x)=x^5-4x^2+3x$

따라서 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여

$P(-1)=-1-4-3=-8$

필수 개념

▸ 다항식의 나눗셈

다항식 $P(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지면

⇨ $P(a)=0$, $P'(a)=0$

다른풀이

$P(x)=x^5+ax^2-bx$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$P(1)=0$, $P'(1)=0$

$P(1)=0$에서

$1+a-b=0$ $\therefore\ a-b=-1$ …… ㉠

$P'(x)=5x^4+2ax-b$이므로 $P'(1)=0$에서

$5+2a-b=0$ $\therefore\ 2a-b=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=-3$

이므로 $P(x)=x^5-4x^2+3x$

따라서 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여

$P(-1)=-1-4-3=-8$

22) 정답 ③

[출제범위] 미분계수와 도함수

0이 아닌 모든 실수 a에 대하여 x의 값이 $-a$에서 0까지 변할 때 다항함수 $f(x)$의 평균변화율이 $2a^2+3a+4$이므로

$$\frac{f(0)-f(-a)}{0-(-a)}=2a^2+3a+4$$

$f(-a)=-2a^3-3a^2-4a+f(0)$ (단, $a\neq 0$)

이때 위 식의 a 대신에 $-a$를 대입하면

$f(a)=2a^3-3a^2+4a+f(0)$

따라서 $f'(a)=6a^2-6a+4$ $(a\neq 0)$이므로

$f'(2)=24-12+4=16$

필수 개념
▸ 평균변화율 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율 ⇨ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

23) 정답 18

[출제범위] 미분계수와 도함수

조건 (나)에서

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=5$$

이므로 모든 실수 x와 모든 양수 h에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(x, f(x))$, $(x+h, f(x+h))$를 지나는 직선의 기울기는 5이다.

그러므로 다항함수 $f(x)$는 일차항의 계수가 5인 일차함수이다.

이때 $f(x)=5x+a$ (a는 상수)라 하면 조건 (가)에서

$f(0)=a=3$

따라서 $f(x)=5x+3$이고 $f'(x)=5$이므로

$f(2)+f'(2)=13+5=18$

필수 개념
▸ 직선의 기울기 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 기울기 ⇨ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (단, $x_1\neq x_2$)

24) 정답 ②

[출제범위] 미분계수와 도함수

ㄱ. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=-f'(a)$

ㄴ. 주어진 극한에서 $h\to 0$일 때 $h^3\to 0$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}\times h\right\}=\lim_{h^3\to 0}\frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}\times\lim_{h\to 0}h=f'(a)\times 0=0$$

ㄷ. 주어진 극한에서 $x+2a=h$로 놓으면 $x\to -2a$일 때 $h\to 0$이므로

$$\lim_{x\to -2a}\frac{f(x+3a)-f(a)}{x+2a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

이상에서 $f'(a)$의 값과 항상 같은 값을 갖는 것은 ㄷ뿐이다.

필수 개념
▸ 미분계수 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는 ⇨ $f'(a)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

25) 정답 ⑤

[출제범위] 미분계수와 도함수

x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 함수

$f(x)$의 평균변화율은

$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{28-4}{3}=8$

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$\begin{aligned} f'(a)&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &=\lim_{h\to0}\frac{\{(a+h)^2+3(a+h)\}-(a^2+3a)}{h} \\ &=\lim_{h\to0}\frac{2ah+h^2+3h}{h} \\ &=\lim_{h\to0}(2a+h+3)=2a+3 \end{aligned}$$

즉, $2a+3=8$이므로 $a=\frac{5}{2}$

필수 개념

▸ 평균변화율과 미분계수

함수 $y=f(x)$에 대하여

(1) x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율 ⇨ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(2) $x=a$에서의 미분계수

⇨ $f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

다른풀이

x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율은

$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{28-4}{3}=8$

$f(x)=x^2+3x$에서 $f'(x)=2x+3$이므로

$f'(a)=2a+3$

즉, $2a+3=8$이므로 $a=\frac{5}{2}$

26) 정답 5

[출제범위] 미분계수와 도함수

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to0}\frac{f(-1+kh)-f(-1)}{h} \\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+kh)-f(-1)}{kh}\times k \\ &=kf'(-1)=5k \end{aligned}$$

즉, $5k=25$이므로 $k=5$

필수 개념

▸ 미분계수

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

⇨ $f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

27) 정답 ④

[출제범위] 미분계수와 도함수

$f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-0 \quad \therefore\ f(0)=0$

$$\begin{aligned} f'(3a)&=\lim_{h\to0}\frac{f(3a+h)-f(3a)}{h} \\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(3a)+f(h)-3ah-f(3a)}{h} \\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-3ah}{h} \\ &=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+\lim_{h\to0}(-3a) \\ &=f'(0)-3a=-2-3a \end{aligned}$$

즉, $-2-3a=-11$이므로 $a=3$

필수 개념

▸ 미분계수

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

⇨ $f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

28) 정답 15

[출제범위] 미분계수와 도함수

다항식 x^8-3x^4+5를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^8-3x^4+5=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-3+5=a+b \quad \therefore\ a+b=3$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$8x^7-12x^3=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a=-4$

$a=-4$를 ㉡에 대입하면 $b=7$

따라서 $R(x)=-4x+7$이므로

$R(-2)=8+7=15$

필수 개념

▸ 다항식의 나눗셈

다항식 $P(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)=mx+n$이라 하면

⇨ $P(a)=R(a)=ma+n$, $P'(a)=R'(a)=m$

29) 정답 7

[출제범위] 미분계수와 도함수

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=4$에서 $x\to-1$일 때 (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)=4$

한편, $f(x)=x^3+ax^2-bx+2a$에서

$f(-1)=0$이므로

$-1+a+b+2a=0$ $\quad\therefore\ 3a+b=1$ …… ㉠

$f'(x)=3x^2+2ax-b$이고 $f'(-1)=4$이므로

$3-2a-b=4$ $\quad\therefore\ 2a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-5$

$\therefore\ a-b=2-(-5)=7$

필수 개념

▸ 미분계수를 이용한 미정계수의 결정

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=c$ (c는 상수)이면

⇨ $f(a)=b$, $f'(a)=c$

30) 정답 60

[출제범위] 미분계수와 도함수

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$ …… ㉠

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=-1$에서 $x\to2$일 때 (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 삼차함수 $f(x)$는 $(x-1)(x-2)$를 인수로 가지므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-2)(ax+b)=-(a+b)$$

즉, $-a-b=3$ …… ㉢

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x-1)(ax+b)=2a+b$$

즉, $2a+b=-1$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=-5$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(2x-5)$이므로

$f(5)=4\times3\times5=60$

필수 개념

▸ 인수정리

다항식 $f(x)$가 $x-a$를 인수로 갖는다.

⇔ $f(a)=0$